

Algèbre linéaire

Introduction	5
Historique des versions	5
Systèmes d'équations linéaires	6
Définitions	6
Opérations élémentaires	6
Matrices échelonnées	7
Méthode d'élimination de Gauss	7
Résolution de systèmes linéaires	7
Algèbre matricielle	8
Addition, multiplication scalaire et transposée	8
Produit matriciel	9
Matrices spécifiques	9
Système d'équations et matrices	10
Matrices élémentaires	10
Critère d'inversibilité et calcul de l'inverse	11
Décomposition LU	11
Espaces vectoriels	12
Définition	12
Sous-espaces vectoriels	12
Combinaisons linéaires	13
Bases et dimension	14
Dépendance et indépendance linéaire	14
Bases et dimension	14
Rang ligne et rang colonne	15
Méthode de calcul	15
Application aux systèmes d'équations	15
Coordonnées	16
Coordonnées par rapport à une base	16
Base à partir de générateurs	16
Applications linéaires	17
Définitions	17
Noyau, image et rang	18
Matrice d'une application linéaire	18
Opérations sur les applications linéaires	18
Base de l'image et du noyau	19

Changement de base	20
Effet sur des coordonnées	20
Effet sur une matrice d'application linéaire	20
Matrices semblables	20
Déterminant	21
Méthodes de calcul	21
Calcul par récursivité	21
Règle de Sarrus (matrices 3×3)	21
Matrices triangulaires	21
Propriétés	22
Critère d'inversibilité	22
Effet des opérations élémentaires	22
Produits et transposée	22
Applications	22
Calcul d'aire/volume	22
Valeurs et vecteurs propres	23
Définitions	23
Pour une application linéaire	23
Pour une matrice	23
Sous-espaces propres	23
Méthode de calcul	24
Transformations linéaires similaires	24
Calcul des valeurs propres	24
Détermination des sous-espaces propres	24
Diagonalisation	25
Critère de diagonalisation	25
Produit scalaire et espaces euclidiens	26
Définition	26
Norme	26
Distance	26
Angle	26
Orthogonalité	26
Inégalités de Cauchy-Schwartz, triangulaire + Pythagore	26
Bases orthogonales et orthonormées	27
Définitions	27

Projection orthogonale	27
Procédé Gram-Schmidt	27
Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel	28
Complément orthogonal	28
Meilleure approximation quadratique	28
Matrices et transformations orthogonales	29
Définition	29
Propriétés	29
Diagonalisation orthogonale	29

Introduction

Ce document est un résumé mis au propre des notes que j'ai prises pendant le semestre.

Attention, ce document :

- ✗ **ne remplace pas les cours** : il est écrit en partant du principe que tu vois déjà de quoi on parle, sans prendre le temps de bien introduire les sujets et présenter des exemples ;
- ✗ remplace encore moins les **séries d'exercices** et les **révisions** : t'entraîner sera essentiel pour bien comprendre les notions et te préparer à l'examen ;
- ✗ contient peut-être des **erreurs ou imprécisions**, malgré mes efforts de relecture (mais si tu en trouves, n'hésite pas à me les transmettre pour que je puisse les corriger !).

Par contre, ce document peut être :

- ✓ une autre manière de voir les nouvelles notions, si tu bloques avec la formulation du cours ;
 - ✓ une aide pendant les révisions, pour vérifier que tu es à jour sur tous les sujets ;
 - ✓ un moyen rapide pour retrouver une formule du cours pendant les exercices.
- (Mais n'oublie pas d'apprendre par cœur celles dont tu auras besoin pour l'examen !)

En espérant que ces notes puissent t'être utiles, je te souhaite un bon courage et beaucoup de succès pour la BA1 !

Historique des versions

Avant de commencer à lire le document, je te conseille de **vérifier sur le drive** que tu en as la **version la plus récente**, qui contiendra les derniers correctifs et ajouts.

Version	Date	Modifications
v1.0	septembre 2021	Version initiale
v1.1	16 octobre 2021	Correction d'une erreur dans la définition de l'inversibilité
v1.2	7 novembre 2021	Correction d'une erreur dans la la partie <i>indépendance linéaire</i>

Si tu as des **questions ou suggestions**, n'hésite pas à me parler sur Discord : [Nicolapps#3110](#).

Systèmes d'équations linéaires

DÉFINITIONS

Une **équation linéaire** aux inconnues $x_1, \dots, x_n$ à coefficients réels est une équation de la forme :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad \text{avec } a_i, b \in \mathbb{R}$$

Une famille de telles équations s'appelle un **système d'équations linéaires** :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots = \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Ce système est dit **homogène** si $b_i = 0$ pour tout i .

SOLUTIONS

Une **solution** d'un système d'équations linéaires est une suite ordonnée de n nombres réels $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ telle qu'en posant $x_i = \alpha_i$ pour tout i , toutes les équations sont vérifiées. Pour un système donné, il y a soit aucune solution, une solution unique ou une infinité de solutions.

MATRICES

Une **matrice** $m \times n$ à coefficients réels ($\in M_{m \times n}(\mathbb{R})$) est un tableau rectangulaire de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{avec } a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Pour le système (S) vu au-dessus, on appelle **matrice des coefficients** la matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}$,

et **matrice augmentée** la matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} & b_p \end{pmatrix}$ (qui a la colonne de constantes).

OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Les trois opérations suivantes sur un système sont dites « élémentaires ». Elles ne modifient pas l'ensemble des solutions.

- I. Permuter deux lignes du système
- II. Multiplier une ligne du système par un nombre réel non nul
- III. Ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne

On peut effectuer les mêmes opérations sur la matrice augmentée d'un système, toujours sans changer l'ensemble des solutions.

Lorsqu'on peut transformer une matrice A en une matrice B en utilisant ces méthodes élémentaires, on dit que A et B sont **lignes-équivalentes**.

MATRICES ÉCHELONNÉES

Une matrice est dite **échelonnée** si les deux conditions suivantes sont remplies :

- Chaque pivot est strictement à droite du pivot de la ligne précédente (Un pivot est le premier coefficient non nul d'une ligne.)
- Après une ligne nulle (qui ne contient que des zéros), il n'y a que des lignes nulles.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une matrice est dite **échelonnée réduite** si elle est échelonnée, et que :

- Tous les pivots sont égaux à 1
- Tous les autres coefficients dans la colonne d'un pivot sont nuls

Il est beaucoup plus facile de trouver les solutions à un système d'équations sous la forme d'une matrice échelonnée, ou échelonnée réduite.

MÉTHODE D'ÉLIMINATION DE GAUSS

Il est possible de transformer n'importe quelle matrice en une matrice échelonnée (et matrice échelonnée réduite) en utilisant cette méthode.

TRANSFORMATION EN MATRICE ÉCHELONNÉE

On effectue les opérations suivantes :

1. Si nécessaire, on échange des lignes pour **avoir un pivot dans la 1^{re} ligne**.
2. On **soustrait la première ligne aux suivantes** pour n'avoir un pivot que dans la 1^{re} ligne.
3. On **réitère l'opération** pour les lignes et colonnes suivantes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 9 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{\& divisions}]{\text{permutations}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L'_3 = L_3 - 9L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{L'_3 = L_3 - 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -19 \end{pmatrix}$$

TRANSFORMATION EN MATRICE ÉCHELONNÉE RÉDUITE

Pour atteindre la forme échelonnée réduite :

- On divise chaque ligne de manière à que **chaque pivot soit égal à 1**.
- On fait **apparaître des zéros** au-dessus de chaque pivot à l'aide de soustractions. (on procède d'en bas à droite vers en haut à gauche.)



Chaque matrice n'a qu'une matrice échelonnée réduite correspondante.

RÉSOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES

On peut employer les matrices échelonnées pour trouver la solution d'un système linéaire :

- On détermine la matrice augmentée du système, et on l'échelonne.
- À partir de la matrice échelonnée, on sait s'il existe des solutions :
 - S'il existe une ligne de la forme $(0 \quad \dots \quad 0 \quad c)$, avec $c \neq 0$, il n'y a pas de solution.
 - Sinon, il existe des solutions. Les colonnes de la matrice où il n'y a pas de pivot correspondent aux variables libres (s'il y en a, il y a une infinité de solutions). On associe une lettre grecque à chaque variable libre et on l'utilise dans la solution.

Algèbre matricielle

ADDITION, MULTIPLICATION SCALAIRE ET TRANSPOSÉE

ADDITION

On peut additionner deux matrices de même taille en additionnant les coefficients un par un :

$$A + B = [a_{i,j}] + [b_{i,j}] = [a_{i,j} + b_{i,j}]$$

MULTIPLICATION PAR UN SCALAIRE

Lorsqu'on multiplie une matrice par un scalaire ($\in \mathbb{R}$), on multiplie chaque coefficient :

$$\alpha A = \alpha [a_{i,j}] = [\alpha \cdot a_{i,j}]$$

TRANSPOSITION

La transposée d'une matrice est la matrice dont on inverse toutes les lignes et les colonnes.

$$A^T = [a_{i,j}]^T \begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p \end{matrix} = [a_{j,i}] \begin{matrix} 1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \implies A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$

PROPRIÉTÉS

Pour tous $A, B, C \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$A + B = B + A$	L'addition est commutative
$A + (B + C) = (A + B) + C$	L'addition est associative
$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$	Distributivité d'un facteur réel
$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$	Distributivité d'un facteur scalaire
$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$	L'ordre des facteurs réels n'est pas important
$1 \cdot A = A$	Existence d'un élément neutre pour la multiplication scalaire
$(A + B)^T = A^T + B^T$	Distributivité de la transposée
$(A^T)^T = A$	Double transposée
$(\lambda A)^T = \lambda A^T$	Multiplication scalaire et transposée
$(AB)^T = B^T A^T$	Multiplication matricielle et transposée (⚠ ordre inversé !)
$-1 \cdot A + A = -A + A = 0$	Existence d'un inverse pour l'addition

Soit $\mathbf{0} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ la matrice dont toutes les composantes sont nuls (appelée « **matrice nulle** »).

$\mathbf{0} + A = A = A + \mathbf{0}$	Élément neutre pour l'addition
$-1 \cdot A + A = -A + A = \mathbf{0}$	Existence d'un inverse pour l'addition
$0 \cdot A = \mathbf{0}$	Multiplication scalaire par zéro

PRODUIT MATRICIEL

Le produit matriciel est l'opération effectuée lorsqu'on multiplie deux matrices ($C = AB$).

On ne peut le refaire que si nombre de colonnes de A = nombre de lignes de B .

TERME GÉNÉRAL

$$AB = \overbrace{[a_{i,j}] \begin{matrix} 1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}}^{p \times n} \overbrace{[b_{i,j}] \begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq s \end{matrix}}^{n \times s} = \overbrace{[c_{i,j}] \begin{matrix} 1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq s \end{matrix}}^{p \times s} \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

MÉTHODE DE CALCUL

On peut calculer le produit des deux matrices plus facilement en appliquant f_A aux colonnes de B .

$$AB = (f_A(C_1) \quad \dots \quad f_A(C_S)) \quad C_1, \dots, C_S \in M_{m,1}(\mathbb{R}) \text{ sont les colonnes de } B$$

Matrices spécifiques

MATRICES CARRÉES

Une matrice carrée est une matrice qui a autant de lignes que de colonnes.

$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ **carrée** est **inversible** s'il existe une (unique) matrice B telle que $AB = BA = I_n$.

MATRICE TRIANGULAIRE SUPÉRIEURE

On dit qu'une matrice est triangulaire supérieure si

$$i > j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \delta & \mu & \dots \\ 0 & \beta & \varepsilon & \\ 0 & 0 & \gamma & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

MATRICE TRIANGULAIRE INFÉRIEURE

On dit qu'une matrice est triangulaire inférieure si

$$i < j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots \\ \delta & \beta & 0 & \\ \mu & \varepsilon & \gamma & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

MATRICE DIAGONALE

Une matrice est diagonale si elle est **carrée**, et que

$$i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & & \\ 0 & 0 & \alpha_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

MATRICE SYMÉTRIQUE

Une matrice (carrée) est symétrique si $A = A^T$.

Système d'équations et matrices

On pose les matrices des **coefficients** (A), des **inconnues** (X), et des **constantes** (b) :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots = \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{mn} \end{pmatrix} \\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \end{matrix}$$

On peut ainsi réécrire le système d'équations sous une forme d'**équation matricielle** qui contient exactement les mêmes informations :

$$AX = b$$

Si A est inversible, le système possède une solution unique, $A^{-1}b$.

Matrices élémentaires

Les **matrices élémentaires** sont les matrices obtenues par application d'une (et une seule) opération élémentaire sur les lignes d'une matrice identité (I_n). Il en existe trois types :

$$T_{ij}$$

Permutation des lignes i et j

$$T_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_r(\lambda)$$

Multiplication de la ligne r par $\lambda \neq 0$

$$D_2(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_{rs}(\lambda)$$

Ajout à la ligne r de λ fois la ligne s

$$L_{12}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MULTIPLICATION À GAUCHE

Lorsqu'on multiplie à gauche une matrice X par une matrice élémentaire E ($Y = EX$), on effectue sur X l'opération élémentaire qui correspond à E .

INVERSE

Les matrices élémentaires sont toutes inversibles, et leur inverse est la matrice élémentaire qui correspond à l'opération élémentaire inverse (c'est-à-dire T_{ji} , $D_r\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ ou $L_{rs}(-\lambda)$).

MULTIPLICATION À DROITE

Multiplier une matrice X à droite par une matrice élémentaire ($Y = XE$) revient à effectuer l'opération de la matrice élémentaire sur les *colonnes* de X .

$$XT_{ij}$$

Permutation des *colonnes* i et j

$$XD_r(\lambda)$$

Multiplication de la *colonne* r par $\lambda \neq 0$

$$XL_{rs}(\lambda)$$

Ajout à la colonne s de λ fois la colonne r

⚠ $s \leftarrow r$

CRITÈRE D'INVERSIBILITÉ ET CALCUL DE L'INVERSE

DÉFINITION

Une matrice A **carrée** (⚠) est dite **inversible** si :

$$A \text{ est inversible} \Leftrightarrow \exists B \text{ telle que } BA = I_n \Leftrightarrow \exists B \text{ telle que } AB = I_n$$

S'il existe, l'inverse est unique.

CRITÈRE D'INVERSIBILITÉ

A est inversible $\Leftrightarrow$ le système homogène associé $AX = 0$ admet une solution unique (triviale).

MÉTHODE DE CALCUL

On échelonne la matrice suivante (de manière à arriver à I_n à gauche) :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array} \right)$$

Si la matrice est inversible, on doit trouver une matrice de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array} \right)$$

Par exemple : $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array} \right).$

Décomposition LU

DÉFINITION

Dans certains cas, on peut décomposer une matrice $A \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ comme étant le produit d'une matrice triangulaire inférieure et d'une matrice triangulaire supérieure :

$$A = LU \quad \text{où} \quad \begin{cases} L \text{ est triangulaire inférieure (Lower)} \\ U \text{ est triangulaire supérieure (Upper)} \end{cases}$$

Cette décomposition existe lorsqu'on peut échelonner A en n'utilisant que des opérations élémentaires de type II ($D_r(\lambda)$) et III ($L_{rs}(\lambda)$) telles que $r > s$.

ALGORITHME

Pour obtenir U : on échelonne A en utilisant uniquement des opérations élémentaires de type II ($D_r(\lambda)$) et III ($L_{rs}(\lambda)$) telles que $r > s$.

Pour obtenir L : on effectue dans le même ordre les opérations **inverses** sur les **colonnes** de I_n .

APPLICATION AUX SYSTÈMES LINÉAIRES

✨ Cette méthode permet de résoudre plus rapidement des systèmes $AX = b$ (où b varie).

1. On décompose A en LU .
2. On résout $LY = b$, pour trouver $Y = (y_1 \quad \cdots \quad y_n)^T$.
3. On résout $UX = Y$, ce qui nous donne les solutions du système d'équations.

Espaces vectoriels

DÉFINITION

Un **espace vectoriel** (réel) V est un ensemble muni des opérations suivantes :

- *Addition* $V \times V \rightarrow V \quad (v, w) \rightarrow v + w$
- *Multiplication scalaire* $\mathbb{R} \times V \rightarrow V \quad (\alpha, v) \rightarrow \alpha \cdot v$ (souvent noté αv)

Par exemple : $\mathbb{R}^n$, $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ (matrices $m \times n$), $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ (polynômes réels de degré quelconque / degré $\leq n$), $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ (fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) et $\{\mathbf{0}\}$ sont des espaces vectoriels.

Les éléments de V sont appelés **vecteurs**.

Tout espace vectoriel doit respecter les axiomes suivants :

ADDITION

$\forall v, w \in V$	$v + w = w + v$	Commutativité
$\forall u, v, w \in V$	$(u + v) + w = u + (v + w)$	Associativité
$\forall v \in V$	$\exists \mathbf{0} \in V, \mathbf{0} + v = v + \mathbf{0} = v$	$\exists$ un (unique) élément neutre
$\forall v \in V$	$\exists -v \in V, v + (-v) = (-v) + v = \mathbf{0}$	$\exists$ un (unique) opposé

MULTIPLICATION SCALAIRE

$\forall v \in V$	$1 \cdot v = v$	Multiplication par 1 : identité
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$\forall v \in V, (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$	Associativité
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v, w \in V$	$\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$	Distributivité (éléments)
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v \in V$	$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$	Distributivité (réels)

SOUS-ESPACES VECTORIELS

Pour qu'un sous-ensemble W de V soit un **sous-espace vectoriel**, il faut que :

$\forall v, w \in V$	$\mathbf{0}_V \in W$	Le zéro de V doit être dans W
	$(v \in W \text{ et } w \in W) \Rightarrow v + w \in W$	Stable par addition : on reste dans W en additionnant deux W
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in V$	$(v \in W) \Rightarrow (\alpha v \in W)$	Stable par multiplication scalaire : on reste dans W en amplifiant un W

Pour le prouver (pour $W \neq \emptyset$), il suffit de prouver que $\forall A, B \in W, \forall \lambda \in \mathbb{R}, A + (\lambda B) \in W$.

Si un ensemble est un sous-espace vectoriel, alors il vérifie automatiquement toutes les propriétés des espaces vectoriels.

SOLUTIONS DES SYSTÈMES LINÉAIRES

- Lorsque la colonne des constantes b est telle que $b = \mathbf{0}$ (**système homogène**), l'ensemble des solutions du système est **toujours** un espace vectoriel.
- Lorsque $b \neq \mathbf{0}$, l'ensemble des solutions n'est **jamais** un espace vectoriel ($\mathbf{0} \notin S$).

COMBINAISONS LINÉAIRES

Soit V un espace vectoriel, et $v_1, \dots, v_n \in V$ une *famille* d'éléments de V .

COMBINAISON LINÉAIRE

v est une combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_n \in V$

$$\Leftrightarrow \exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \mid v = \alpha_1 v_1 + \dots + a_n v_n.$$

$\Leftrightarrow$ Il existe des coefficients permettant d'atteindre v à partir de la famille.

SOUS-ESPACE VECTORIEL ENGENDRÉ

= Ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'une famille

$$\text{Vect}\{v_1, \dots, v_n\} = \left\{ \alpha_1 v_1 + \dots + a_n v_n, \alpha_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

On peut faire la même opération avec un ensemble infini, par exemple :

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}) = \text{Vect}\{S\}, S = \{x^n \in \mathbb{P}(\mathbb{R}) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$\text{Vect}\{S\}$ est un **sous-espace vectoriel** de V : c'est le **sous-espace vectoriel engendré** par S .

Par convention, $\text{Vect}\{\emptyset\} = \{\mathbf{0}\}$.

Autres notations : $\text{Vect}(S)$, $\text{span}(S)$, $\text{lin}(S)$...

SOMME DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

Soient W_1 et W_2 des sous-espaces vectoriels de V .

$$W_1 + W_2 = \left\{ u + v \in V \mid u \in W_1, v \in W_2 \right\}$$

Si $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$, on dit que la somme est **directe** et on écrit $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$.

$W_1 + W_2$, tout comme $W_1 \cap W_2$, est un sous-espace vectoriel de V .

ESPACE LIGNE ET ESPACE COLONNE

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

- L'**espace ligne** de A est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les lignes de A .
- L'**espace colonne** de A est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les colonnes de A .

Bases et dimension

DÉPENDANCE ET INDÉPENDANCE LINÉAIRE

Soit V un espace vectoriel réel, et $S \subset V$ une collection d'éléments (pas forcément finie) de V .

S est **linéairement dépendante** s'il existe $v_1, \dots, v_n \in S$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

avec au moins un λ_i non nul tel que $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mathbf{0}$.

REFORMULATIONS AVEC Vect

S est linéairement dépendante

$\Leftrightarrow$ Il existe $v \in S$ tel que $v \in \text{Vect}(S \setminus \{v\})$ v est engendré par le reste de S

$\Leftrightarrow$ Il existe $v \in S$ tel que $W = \text{Vect}(S) = \text{Vect}(S \setminus \{v\})$ W reste identique sans v

ÉLÉMENT NUL $\in S$

Si $\mathbf{0} \in S$, alors S est forcément linéairement dépendante.

SOUS-ENSEMBLES ET DÉPENDANCE LINÉAIRE

Si S est libre, alors tout sous-ensemble de S l'est aussi.

La collection vide $S = \emptyset$ est donc toujours linéairement indépendante.

Si S est liée, alors tout ensemble contenant S ($S \subset V$) est aussi lié.

BASES ET DIMENSION

S est une **base** de V si elle est libre, et qu'elle engendre linéairement V .

Si un espace vectoriel V a une base finie, alors toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

On l'appelle **dimension de V** , notée $\dim V$. Sinon, on dit que V est de dimension infinie.

BORNES

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n . Soit $S \subset V$ un ensemble fini de m éléments.

- Si $m < n$ (pas assez d'éléments), alors S ne peut pas engendrer V .
Si S est libre, alors on pourra le **compléter en une base** avec des éléments de V qui ne sont pas dans S ($S \subset \mathcal{B}$).
- Si $m = n$, alors S est une base $\Leftrightarrow S$ est libre $\Leftrightarrow S$ est génératrice de V .
- Si $m > n$ (trop d'éléments), alors S est liée linéairement.
Si S est génératrice, alors on peut avoir **extraire une base** en retirant des éléments :
il existera $\mathcal{B} \subset S$ linéairement indépendante.

DIMENSION DES SOLUTIONS D'UN ENSEMBLE HOMOGÈNE

Soit $AX = 0$ un système d'équations homogène.

La **dimension de l'ensemble des solutions** est le nombre de variables libres, c'est-à-dire le nombre de colonnes sans pivots dans la matrice échelonnée de A .

On peut trouver une **base de l'ensemble des solutions** en posant successivement chaque variable libre $= 1$, et les autres $= 0$.

DIMENSION D'UN SOUS-ESPACE

Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel.

Alors W est de dimension finie, et $\dim W \leq \dim V$.

De plus, si $\dim V = \dim W$, on peut conclure que $V = W$.

Rang ligne et rang colonne

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Le **rang ligne** de A est la dimension de son espace ligne.

Le **rang colonne** de A est la dimension de son espace colonne.

Les deux sont $\leq \min(m, n)$.

Note : pour n'importe quelle matrice, **le rang ligne et le rang colonne sont égaux**.

Le rang est **invariant par transposée**.

TRANSPOSÉE

Le rang ligne de A est le rang colonne de A^T , et vice-versa.

MATRICES LIGNES-ÉQUIVALENTES

Deux matrices qui sont lignes-équivalentes ont le même rang ligne.

MÉTHODE DE CALCUL

Le **rang ligne** de A est égal au nombre de pivots d'une forme échelonnée de A .

Les **lignes non-nulles** de la forme échelonnée donnent une **base de l'espace ligne**.

Pour obtenir le **rang colonne**, on détermine de manière similaire le nombre de pivots de A^T .

APPLICATION AUX SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

Soit le système linéaire $AX = b$, de matrice augmentée $\hat{A}$.

Le système $AX = b$ possède au moins une solution

$\Leftrightarrow b \in$ l'espace colonne de A

$\Leftrightarrow$ le rang colonne de $A =$ le rang colonne de $\hat{A}$.

Coordonnées

COORDONNÉES PAR RAPPORT À UNE BASE

BASE ORDONNÉE

Une **base ordonnée** $\mathcal{B}$ de l'espace vectoriel réel V est une suite ordonnée $((v_1, \dots, v_n))$ de vecteurs de V qui en forment une base.

BASE CANONIQUE

La base canonique d'un ensemble est sa base la plus « simple ».

Par exemple, pour les matrices 2×2 , c'est par convention $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, où E_{ij} est la

matrice telle que $[E_{ij}]_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = i \text{ et } y = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

COORDONNÉES

Pour tout $v \in V$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = v$.

Les **coordonnées** de v (par rapport à $\mathcal{B}$) sont $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ($n = \dim V$).

BASE À PARTIR DE GÉNÉRATEURS

Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n , et de base ordonnée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

Soit $W = \text{Vect}(\{v_1, \dots, v_p\})$. Comment trouver une base de W ?

- Pour chaque v_i , on pose les coordonnées de v_i (comme un vecteur de $\mathbb{R}^n$).
- On pose la matrice A , dont chaque ligne est la transposée des coordonnées d'un v_i .

$$A = \begin{pmatrix} \text{Coordonnées de } \vec{v}_1 \text{ dans } \mathcal{B} \\ \dots \\ \text{Coordonnées de } \vec{v}_p \text{ dans } \mathcal{B} \end{pmatrix}$$

- On échelonne la matrice en $\hat{A}$ (qui est ligne-équivalente à A).

On peut y ajouter des lignes contenant des pivots pour compléter en une base de V .

$$\hat{A} = \left\{ \begin{array}{ccccc} \text{Coordonnées dans } \mathcal{B} \text{ des} & 1 & * & * & * & * \\ \text{vecteurs de la base de } W & 0 & 1 & * & * & * \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Vecteurs pour} \\ \text{compléter la base} \\ \text{en une base de } V \end{array}$$

Applications linéaires

DÉFINITIONS

APPLICATION

Soient X et Y , deux ensembles.

Une **application** (ou fonction) de X (ensemble de départ) dans Y (ensemble d'arrivée), notée $f : X \rightarrow Y$, est une règle qui associe à chaque $x \in X$ un unique élément $f(x) \in Y$.

INJECTIVITÉ

f est **injective** si et seulement si $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ ($x_1, x_2 \in X$).

SURJECTIVITÉ

f est **surjective** si et seulement si $\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$.

BIJECTIVITÉ

f est **bijjective** si et seulement si elle est injective et surjective.

si et seulement si $\exists f^{-1} : Y \rightarrow X$ telle que $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$, $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$.

COMPOSITION

Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$.

$g \circ f : X \rightarrow Z$ est la fonction définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Applications linéaires

APPLICATION LINÉAIRE

Soient V, W des espaces vectoriels réels.

Une application linéaire $T : V \rightarrow W$ est une application telle que

$$\forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}, T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y).$$

PROPRIÉTÉS

- $T(0_V) = 0_W$ et $T(-x) = -T(x)$
- T est entièrement déterminée par les images des éléments d'une base de V .

EXEMPLES

Géométriques : $\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{v_1x + v_2y}{v_1^2 + v_2^2} \vec{v}$, $S_{\vec{v}}(\vec{u}) = 2\text{proj}_{\vec{v}}(u) - u$.

Sur $\mathcal{F} : D$ (dérivée), I (intégrale définie), ev_γ (évaluation en $\gamma \in \mathbb{R}$).

Matrices : $T_A : V \rightarrow W$, application linéaire de la matrice A par rapport à $\mathcal{B}_V$ et $\mathcal{B}_W$.

TRANSFORMATION LINÉAIRE

Une **transformation linéaire** (ou **endomorphisme**, **opérateur linéaire**) est une application linéaire de V dans V .

ISOMORPHISME

Un **isomorphisme** est une application linéaire bijective.

NOYAU, IMAGE ET RANG

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire où V et W sont des espaces vectoriels.

NOYAU

$$\ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0_W\}$$

$\ker(T)$ est un sous-espace vectoriel de V .

T injective $\Leftrightarrow \ker(T) = \{0\}$.

IMAGE

$$\operatorname{im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$$

$\operatorname{im}(T)$ est un sous-espace vectoriel de W .

T surjective $\Leftrightarrow \operatorname{im} T = W \Leftrightarrow \operatorname{rg} T = \dim W$

Le **rang** est $\operatorname{rg}(T) = \dim(\operatorname{im} T)$ (si fini).

THÉORÈME DU RANG

Supposons que V soit de dimension finie.

$$\dim V = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{im} T) = \dim(\ker T) + \operatorname{rg} T$$

MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Soient $T : V \rightarrow W$ linéaire ($T \in \mathcal{L}(V, W)$), $\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$, où V et W sont des espaces vectoriels de dim. finie de bases $\mathcal{B}_v(v_1, \dots, v_n)$ et $\mathcal{B}_w(w_1, \dots, w_m)$.

On peut associer de manière bijective à T la matrice $[T]_{\mathcal{B}_w \mathcal{B}_v} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, telle que :

$$T(x) = y \Leftrightarrow [T]_{\mathcal{B}_w \mathcal{B}_v} \cdot [x]_{\mathcal{B}_v} = [y]_{\mathcal{B}_w}$$

L'application $\Theta : \mathcal{L}(V, W) \hookrightarrow M_{m \times n}(\mathbb{R})$ telle que $\Theta(T) = [T]_{\mathcal{B}_w \mathcal{B}_v}$ est linéaire et bijective.

On peut obtenir cette matrice à partir des images des vecteurs de $\mathcal{B}_v$ exprimés dans $\mathcal{B}_w$:

$$[T]_{\mathcal{B}_w \mathcal{B}_v} = \left(\begin{array}{c|c|c} T(\vec{v}_1) \text{ exprimée} & \dots & T(\vec{v}_n) \text{ exprimée} \\ \text{dans } \mathcal{B}_w & & \text{dans } \mathcal{B}_w \end{array} \right) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

Par exemple, si $n = m = 2$, $T(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $T(v_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, la matrice associée est $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

OPÉRATIONS SUR LES APPLICATIONS LINÉAIRES

Soient les applications linéaires $T, S : V \rightarrow W$ et $R : W \rightarrow U$ où V, W et U sont des espaces vectoriels.

Les applications suivantes sont également linéaires :

ADDITION

$$(T + S) : V \rightarrow W$$

$$v \mapsto T(v) + S(v)$$

$$M_{(T+S)} = M_T + M_S$$

MULTIPLICATION SCALAIRE

$$(\lambda T) : V \rightarrow W$$

$$v \mapsto \lambda \cdot T(v)$$

$$M_{\lambda T} = \lambda \cdot M_T$$

COMPOSITION

$$(R \circ T) : V \rightarrow U$$

$$v \mapsto R(T(v))$$

$$M_{(R \circ T)} = M_R \cdot M_T$$

INVERSE

T bijective $\Rightarrow T^{-1}$ est aussi linéaire ($T \circ T^{-1} = \operatorname{id}_V$ et $T^{-1} \circ T = \operatorname{id}_W$).

Aussi, $M_{(T^{-1})} = (M_T)^{-1}$ (T bijective $\Leftrightarrow M_T$ inversible).

BASE DE L'IMAGE ET DU NOYAU

On obtient une **base de** $\ker M$ en échelonnant M en $\hat{M}$, et en calculant la solution (cela revient à résoudre le système homogène $Mx = 0$).

Les colonnes de M ayant un pivot dans la colonne équivalente de $\hat{M}$ forment une **base de** $\text{Im } T$.

Base de $\text{Im } A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 16 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Changement de base

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n , avec bases $\mathcal{B}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ et $\mathcal{C}$.

La **matrice de passage** $P = [\text{id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$ (! notation) est :

$$P = [\text{id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \text{ exprimé dans } \mathcal{C} & \dots & \vec{b}_n \text{ exprimé dans } \mathcal{C} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(n \times n, \mathbb{R})$$

EFFET SUR DES COORDONNÉES

On peut passer de $[x]_{\mathcal{B}}$, les composantes de $\vec{x} \in V$ dans l'ancienne base $\mathcal{B}$, à $[x]_{\mathcal{C}}$, les composantes de $\vec{x}$ dans la nouvelle base $\mathcal{C}$, avec le produit matriciel suivant :

$$[x]_{\mathcal{B}} = [\text{id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} [x]_{\mathcal{C}}$$

EFFET SUR UNE MATRICE D'APPLICATION LINÉAIRE

Pour changer la base à laquelle se rapport la matrice d'une application linéaire, on utilise :

$$M' = Q^{-1}MP$$

On peut faire un **schéma de changement de base** pour se repérer, par exemple :

$$\begin{array}{ccc} f : (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_u) & \xrightarrow{M} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_v) \\ X & & Y = MX \\ \downarrow P \in \mathbb{M}(3 \times 3, \mathbb{R}) & & \downarrow Q \in \mathbb{M}(2 \times 2, \mathbb{R}) \\ (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_n) & \xrightarrow{M' = Q^{-1}MP} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_w) \\ X' & & Y' = M'X' \end{array}$$

MATRICES SEMBLABLES

Deux matrices carrées A_1, A_2 de même taille sont **semblables** s'il existe un changement de base qui transforme l'une en l'autre.

La matrice identité I_n n'est semblable qu'à elle-même.

INVARIANTS DE SIMILITUDE

Déterminant, trace, polynôme caractéristique.

Déterminant

Le **déterminant** (det) est une application $M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Méthodes de calcul

CALCUL PAR RÉCURSIVITÉ

MATRICE 1×1

$$\det(a) = a$$

MATRICE 2×2

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

MATRICE N×N

On peut calculer par récurrence le déterminant d'une matrice de n'importe quelle taille, en le réduisant à une matrice de taille 2.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \rho \\ \lambda & \mu & \sigma \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{développement selon la première colonne}} +\alpha \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \varepsilon & \rho \end{vmatrix} - \delta \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \lambda & \sigma \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon \end{vmatrix}$$

Le signe de chaque coefficient est donné par $\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$

$$= \alpha \begin{vmatrix} \varepsilon & \rho \\ \mu & \sigma \end{vmatrix} - \delta \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \mu & \sigma \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \varepsilon & \rho \end{vmatrix}$$

RÈGLE DE SARRUS (MATRICES 3×3)

On additionne le produit des diagonales vertes, et on soustrait le produit des diagonales rouges :

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \rho \\ \lambda & \mu & \sigma \end{pmatrix} = \alpha\varepsilon\sigma + \beta\rho\lambda - \gamma\delta\mu - \lambda\varepsilon\gamma + \mu\rho\alpha + \sigma\delta\beta$$

MATRICES TRIANGULAIRES

Le déterminant d'une matrice triangulaire est donnée par le produit des coefficients diagonaux.

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & * & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ * & \beta & 0 \\ * & * & \gamma \end{pmatrix} = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$$

Propriétés

CRITÈRE D'INVERSIBILITÉ

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ est inversible} \Leftrightarrow A^{-1} \text{ existe.}$$

EFFET DES OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

PERMUTATION DE LIGNES/COLONNES

$$\begin{vmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & \gamma \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \quad - \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}$$

MULTIPLICATION D'UNE LIGNE/COLONNE

$$\lambda \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \lambda\gamma & \lambda\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda\alpha & \beta \\ \lambda\gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \lambda\beta \\ \gamma & \lambda\delta \end{vmatrix}$$

AJOUT D'UN MULTIPLE D'UNE LIGNE/COLONNE À UNE AUTRE

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+\lambda\gamma & \beta+\lambda\delta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma+\lambda\alpha & \delta+\lambda\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+\lambda\beta & \beta \\ \gamma+\lambda\delta & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta+\lambda\alpha \\ \gamma & \delta+\lambda\gamma \end{vmatrix}$$

ADDITIVITÉ

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+\alpha' & \beta+\beta' \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma+\gamma' & \delta+\delta' \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha' & \beta \\ \gamma' & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+\alpha' & \beta \\ \gamma+\gamma' & \delta \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma+\gamma' & \delta+\delta' \end{vmatrix}$$

PRODUITS ET TRANSPOSÉE

PRODUIT

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

INVERSE

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

TRANSPOSÉE

$$\det(A^T) = \det(A)$$

MATRICES SEMBLABLES

Soient A et B deux matrices semblables.

$$\det(A) = \det(B)$$

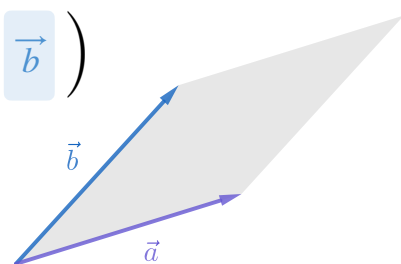
Applications

CALCUL D'AIRE/VOLUME

L'aire d'un parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ vaut $\det \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix}$

De la même manière, le volume d'un parallélépipède rectangle

formé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et $\vec{c}$ vaut $\det \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}$.



Valeurs et vecteurs propres

Définitions

Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, $T : V \rightarrow V$ une transformation linéaire, et $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

POUR UNE APPLICATION LINÉAIRE

$\lambda \in \mathbb{R}$ est une **valeur propre** de T ssi

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } T(v) = \lambda v$$

v est alors un **vecteur propre** de T (associé à la valeur propre λ).

POUR UNE MATRICE

Les mêmes définitions restent valables, avec $AX = \lambda X$.

Si $A = [T]_{\mathcal{B}}$ pour une base $\mathcal{B}$, alors

$$T(v) = \lambda v \Leftrightarrow A[v]_{\mathcal{B}} = \lambda[v]_{\mathcal{B}}.$$

Les valeurs propres sont donc **invariantes par changement de base**.

SOUS-ESPACES PROPRES

On note E_{λ} l'ensemble des vecteurs $v \in V$ tels que $T(v) = \lambda v$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} E_{\lambda} &= \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} \\ &= \{\vec{0}\} \cup \{\text{vecteurs propres associés à } \lambda\} \end{aligned}$$

Cet ensemble est appelé **sous-espace propre associé à λ** .

C'est un **sous-espace vectoriel** de E , pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Méthode de calcul

TRANSFORMATIONS LINÉAIRES SIMILAIRES

$\forall k \in \mathbb{R}^* : k\lambda$ est une valeur propre de kf .

$\forall k \in \mathbb{N}^* : \lambda^k$ est une valeur propre de f^k .

CALCUL DES VALEURS PROPRES

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } f \Leftrightarrow \det(f - \lambda I_e) = 0$$

I_V est l'application identité sur V , dont la matrice est $I_n \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.



Dans le calcul de $\det(M - \lambda I_e)$, λ apparaît n fois. Donc il y a **au maximum** n valeurs propres.

POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

On appelle $\det(T - \lambda I_E)$ le **polynôme caractéristique** de f , noté $p(\lambda)$.

Ses zéros sont les valeurs propres. $p(\lambda)$ est invariant par changement de bases.

C'est un polynôme de degré n , donc un endomorphisme a au plus n valeurs propres.

$$p(\lambda) = \det(M - \lambda I_n)$$

$$\text{Pour } n = 2 : p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr } M \cdot \lambda + \det M$$

TRACE

La **trace de M** (notée $\text{tr } M$) est la somme de la diagonale principale : $\text{tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$.

C'est une **application linéaire** telle que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

INVARIANCES



La trace et le déterminant d'une matrice sont invariants par changements de base : ce sont des **invariants par similitude**.

DÉTERMINATION DES SOUS-ESPACES PROPRES

Une fois qu'on a les valeurs propres, on peut calculer pour chacune son sous-espace propre :

$$E_\lambda = \left\{ v \in V \mid (T - \lambda I_e)(v) = \vec{0} \right\} = \ker(T - \lambda I_E)$$

Les vecteurs non nuls de deux espaces propres distincts sont toujours **linéairement indépendants** : la somme $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$ est directe.

Diagonalisation

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n finie.

Soit la transformation linéaire $T : V \rightarrow V$, et $M \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ sa matrice.

BORNES DE LA MULTIPLICITÉ GÉOMÉTRIQUE

Si λ_i est une valeur propre de multiplicité algébrique k , et E_{λ_i} son sous-espace propre,

$$1 \leq \dim E_{\lambda_i} \leq k$$



Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, une valeur propre de multiplicité 1 aura donc forcément une droite comme sous-espace propre associé.

THÉORÈME : QUAND LE NOMBRE DE VALEURS PROPRES EST LA DIMENSION

Si f admet n valeurs propres **distinctes**, λ_i , $i = 1, \dots, n$, alors $\forall i, \dim E_{\lambda_i} = 1$.

f est donc diagonalisable (car des vecteurs propres sont toujours linéairement indépendants).

CRITÈRE DE DIAGONALISATION

Un endomorphisme T est diagonalisable si et seulement si :

- $p(\lambda)$ a exactement n racines réelles (qui peuvent être confondues),
de **multiplicités algébriques** telles que la somme des ordres de multiplicité vaut n
($\sum_{i=1}^k n_i = n$).
- pour tout λ_i , sa **multiplicité algébrique** est égale à la **multiplicité géométrique** ($\dim E_{\lambda_i}$)

THÉORÈME : MATRICES SYMÉTRIQUES

Si $A_{n \times n}$ est une matrice symétrique, alors A admet n valeurs propres (qui peuvent être confondues), elle est diagonalisable, et il existe une base propre orthonormée.

✨ Ce théorème est utilisé pour prouver que la méthode de réduction des coniques fonctionne dans tous les cas (c.f. cours de géométrie analytique).

Produit scalaire et espaces euclidiens

Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Définition

Un **produit scalaire** sur V est une application $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ qui est :

$$\forall u, v, w \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- **Symétrique** $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
- **Bilinéaire**
$$\begin{cases} \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \\ \text{et} \\ \langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle \end{cases}$$
- **Définie positive**
$$\begin{cases} \langle u, u \rangle \geq 0 \\ \langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0 \end{cases}$$

NORME

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

PROPRIÉTÉS

- $\|v\| \geq 0$ Valeur $\in \mathbb{R}_+$
- $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ Norme nulle
- $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$ Facteur scalaire

DISTANCE

$$\text{dist}(u, v) = \|u - v\|$$

ANGLE

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

ORTHOGONALITÉ

$$v \text{ et } w \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$$

Toute **famille** de vecteurs orthogonaux (non nuls) est **linéairement indépendante**.

INÉGALITÉS DE CAUCHY-SCHWARTZ, TRIANGULAIRE + PYTHAGORE

Pour tous $u, v \in V$, on a...

INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARTZ

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

INÉGALITÉ TRIANGULAIRE

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

THÉORÈME DE PYTHAGORE (GÉNÉRALISÉ)

Si $v_1, \dots, v_t \in V$ sont tels que pour toute paire, les vecteurs sont **orthogonaux**, alors

$$\|v_1 + \dots + v_t\|^2 = \|v_1\|^2 + \dots + \|v_t\|^2$$

Bases orthogonales et orthonormées

DÉFINITIONS

- **famille orthogonale** : une famille de vecteurs tels que $\langle u, v \rangle = 0$ pour tous $u \neq v$
base orthogonale : une famille orthogonale qui constitue une base
- **famille orthonormale/orthonormée** : une famille **orthogonale** telle que $\langle u, u \rangle = 1$
base orthonormale/orthonormée : une famille orthonormale qui constitue une base

COORDONNÉES PAR PROJECTION

Dans une **base orthogonale** $\mathcal{B}(v_1, \dots, v_n)$ de V , les coordonnées de $v \in V$ sont :

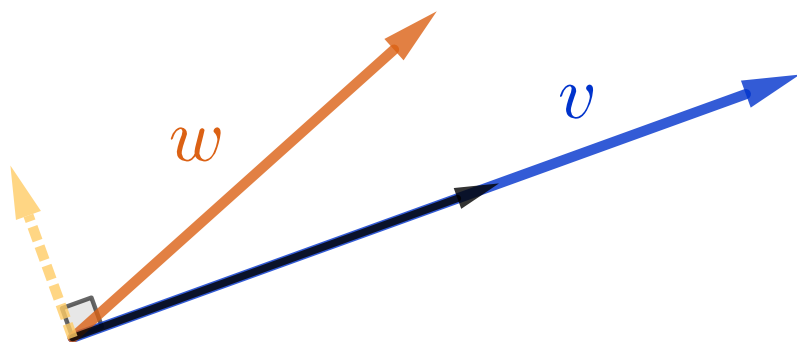
$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{\langle v_1, v \rangle}{\|v_1\|^2} \\ \vdots \\ \frac{\langle v_n, v \rangle}{\|v_n\|^2} \end{pmatrix}$$

Si la base est **orthonormée**, alors $\langle x, y \rangle_V = [x]_{\mathcal{B}} \cdot [y]_{\mathcal{B}}$ (produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$).
Ce résultat ne fonctionne que sur les bases orthonormées. Tout espace euclidien en a une.

PROJECTION ORTHOGONALE

DÉFINITION

$$\text{proj}_v w = \frac{\langle w, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$



PROPRIÉTÉ "D'ORTHOGONALITÉ"

$$\langle w - \text{proj}_v w, v \rangle = 0$$

✦ Utilisé dans la preuve de Gram-Schmidt.

PROCÉDÉ GRAM-SCHMIDT

À partir d'une base $\{x_1, \dots, x_k\}$ de V , on obtient une **base orthogonale** du même espace ainsi :

$$\begin{cases} v_1 = x_1 \\ v_2 = x_2 - \text{proj}_{v_1} x_2 \\ v_3 = x_3 - \text{proj}_{v_1} x_3 - \text{proj}_{v_2} x_3 \\ \vdots = \vdots \end{cases}$$

Pour obtenir une base **orthonormale**, il suffit de diviser les vecteurs par leur norme.

Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel

Soit V , un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel.

COMPLÉMENT ORTHOGONAL

DÉFINITION

Le **complément orthogonal** à W est le sous-espace vectoriel suivant :

$$W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W\}$$

Le seul vecteur à la fois dans W et $W^\perp$ est le vecteur nul.

DIMENSION

$$\dim V = \dim W + \dim W^\perp$$

DOUBLE ORTHOGONALITÉ

$$(W^\perp)^\perp = W$$

car $V = W \oplus W^\perp$

DÉCOMPOSITION

Pour tout vecteur $v \in V$ (dim. finie), on a une décomposition unique :

PROJECTION SUR UN SEV

Si $w_1, \dots, w_n$ est une base **orthogonale** de W , on calcule la projection sur W ainsi :

$$\text{proj}_W(v) = \text{proj}_{w_1}(v) + \dots + \text{proj}_{w_n}(v) = \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \dots + \frac{\langle v, w_n \rangle}{\|w_n\|^2} w_n$$

Cette formule permet d'avoir la partie dans W de la décomposition.

MEILLEURE APPROXIMATION QUADRATIQUE

$\text{proj}_W(v)$ est la **meilleure approximation quadratique** (ou **meilleure approximation au sens des moindres carrés**) du vecteur v dans W . En effet, on a pour tout vecteur de W :

$$\|v - \text{proj}_W(v)\| \leq \|v - w\|$$

SOLUTION AU SENS DES MOINDRES CARRÉS

On peut aussi trouver la (ou les) solution(s) la plus proche d'un système incompatible :

$$A^T A X = A^T b$$

Il y aura toujours ≥ 1 solution. Si le système est compatible, c'est ses solutions.

RÉGRESSION LINÉAIRE

✨ On veut trouver une droite (ou une courbe) qui approxime au mieux des points (x_i, y_i) .

1. On **paramétrise** la droite avec les solutions du système : $y = \beta_0 + \beta_1 x$

2. On pose un **système linéaire** :
$$\begin{cases} y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_1 \\ y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_2 \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

3. On **résout** au sens des moindres carrés pour trouver la valeur des paramètres.

Matrices et transformations orthogonales

DÉFINITION

Soit $T : V \rightarrow V$ une transformation $\mathbb{R}$ -linéaire de matrice A dans une base quelconque.

L'application linéaire T est orthogonale

$\Leftrightarrow$ La matrice A est orthogonale

$\Leftrightarrow$ Les normes sont préservées par T $\|T(v)\| = \|v\| \quad \forall v \in V$

$\Leftrightarrow$ Les normes sont préservées par A $\|AX\| = \|X\| \quad \forall x \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow$ Produits scalaires $\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle$

$\Leftrightarrow$ Sa transposée est son inverse $AA^T = I = A^T A$

$\Leftrightarrow$ Les lignes et les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

PROPRIÉTÉS

ANGLES CONSERVÉS

Les angles entre deux vecteurs sont préservés.

DÉTERMINANT

Le déterminant d'une application orthogonale est ± 1 . Elle est donc bijective.

$$v = \underbrace{\in W}_w + \underbrace{\in W^\perp}_{w'}$$

DIAGONALISATION ORTHOGONALE

DÉFINITION (MATRICE)

$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est **orthogonalement diagonalisable** $\Leftrightarrow \exists P$ orthogonale, $P^{-1}AP$ est diagonale.
 $\Leftrightarrow A$ est **symétrique** (théorème spectral).

DÉFINITION (TRANSFORMATION LINÉAIRE)

T est **orthogonalement diagonalisable** si $\exists$ une base orthogonale où $[T]_{\mathcal{B}}$ est diagonale.

T orthogonalement diagonalisable $\Leftrightarrow [T]_{\mathcal{B}}$ ($\mathcal{B}$ orthonormée) est orthogonalement diagonalisable.

ORTHOGONALITÉ DES ESPACES PROPRES

Lorsque T est orthogonalement diagonalisable, les **espaces propres** sont **orthogonaux**.

(Deux vecteurs de deux espaces propres distincts sont toujours orthogonaux)

MÉTHODE DE CALCUL

1. Calculer le **polynôme caractéristique** et trouver ses **racines**
2. Trouver des **bases des** E_{λ_i} et séparément les **orthogonaliser** (Gram-Schmidt) et **normaliser**
3. On a une base propre orthonormée par l'**union** des vecteurs des bases des E_{λ_i} .

DÉCOMPOSITION SPECTRALE

Toute matrice symétrique A peut être écrite sous la forme :

$$A = \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + \dots + \lambda_n \vec{u}_n \vec{u}_n^T$$

où les $\vec{u}_i$ sont les vecteurs de la base propre orthonormale de A .