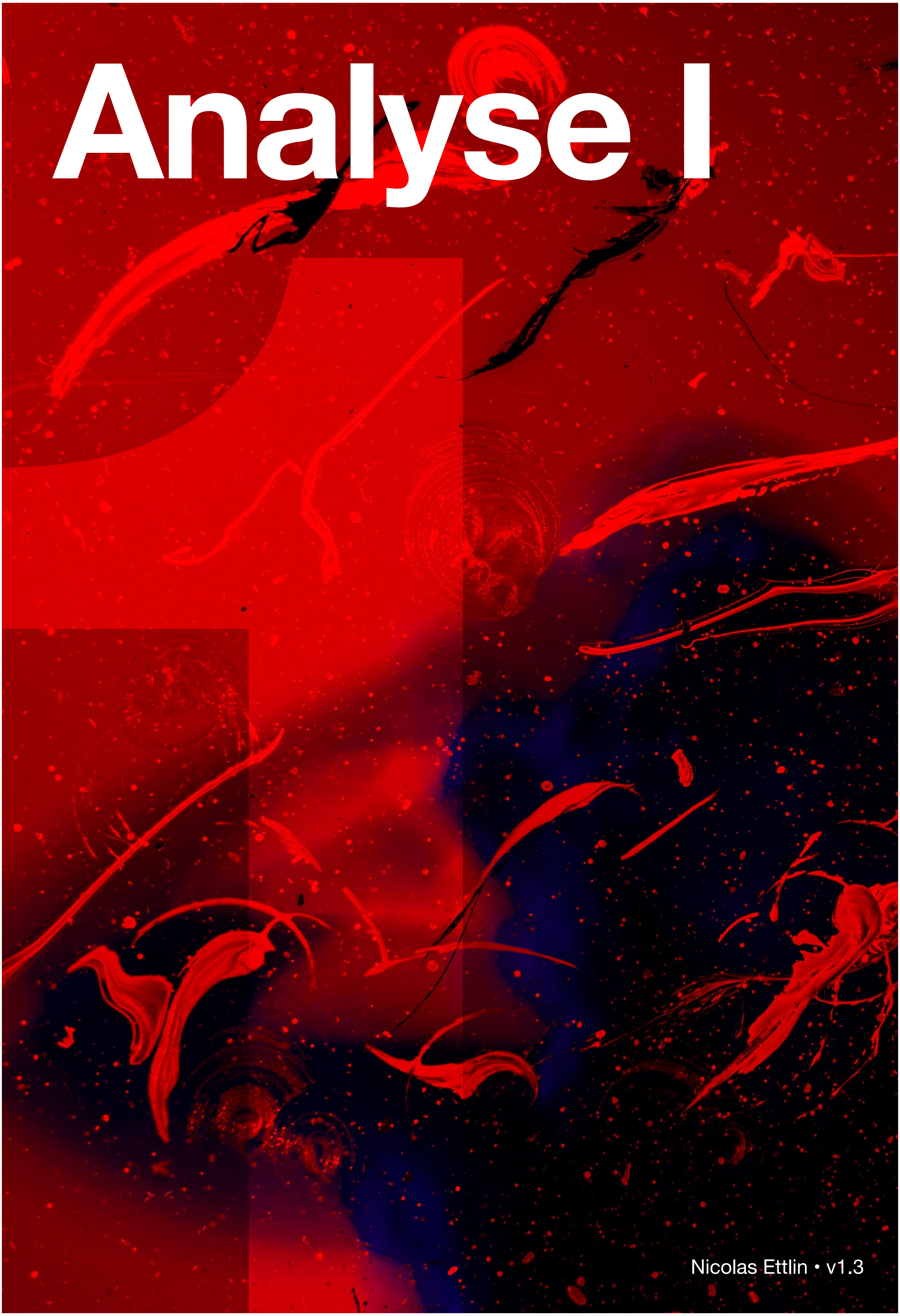
Analyse I



Nicolas Ettlin • v1.3

Introduction

Ce document est un résumé mis au propre des notes que j'ai prises pendant le semestre.

Attention, ce document :

- ❌ **ne remplace pas les cours** : il est écrit en partant du principe que tu vois déjà de quoi on parle, sans prendre le temps de bien introduire les sujets et présenter des exemples ;
- ❌ remplace encore moins les **séries d'exercices** et les **révisions** : t'entraîner sera essentiel pour bien comprendre les notions et te préparer à l'examen ;
- ❌ contient peut-être des **erreurs ou imprécisions**, malgré mes efforts de relecture (mais si tu en trouves, n'hésite pas à me les transmettre pour que je puisse les corriger !).

Par contre, ce document peut être :

- ✅ une autre manière de voir les nouvelles notions, si tu bloques avec la formulation du cours ;
- ✅ une aide pendant les révisions, pour vérifier que tu es à jour sur tous les sujets ;
- ✅ un moyen rapide pour retrouver une formule du cours pendant les exercices.
  (Mais n'oublie pas d'apprendre par cœur celles dont tu auras besoin pour l'examen !)

En espérant que ces notes puissent t'être utiles, je te souhaite un bon courage et beaucoup de succès pour la BA1 !

Historique des versions

Avant de commencer à lire le document, je te conseille de **vérifier sur le drive** que tu en as la **version la plus récente**, qui contiendra les derniers correctifs et ajouts.

Version	Date	Modifications
v1.0	septembre 2021	Version initiale
v1.1	14 novembre 2021	Correction d'une erreur dans la définition du critère de Leibnitz
v1.2	20 novembre 2021	Correction d'une erreur dans la définition d'une fonction impaire
v1.4	9 décembre 2021	Correction d'une erreur dans la formule du polynôme de Taylor

Si tu as des **questions ou suggestions**, n'hésite pas à me parler sur Discord : Nicolapps#3110.

Prérequis

Identités algébriques

IDENTITÉS POLYNOMIALES

$$\begin{cases} (x+y)^2 = y^2 + 2xy + y^2 \\ x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) \\ x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) \\ x^3 + y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2) \end{cases}$$

IDENTITÉS EXPONENTIELLES

Pour tous $a,\ b > 0, x,\ y \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}^*$:

$a^x a^y = a^{x+y}$ $\qquad (a^x)^y = a^{x\cdot y}$ $\qquad (ab)^x = a^x b^x$ $\qquad a^0 = 1$

$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\qquad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}},\quad n \in \mathbb{N}$ $\qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$ $\qquad a^1 = a$

IDENTITÉS LOGARITHMIQUES

Pour tous $x,\ y > 0$:

$\log(xy) = \log x + \log y$ $\qquad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$ $\qquad \begin{cases} \log(1) = 0 \\ \log(e) = 1 \end{cases}$ $\qquad \log(x^c) = c \cdot \log(x)$

$\log$ est le logarithme de base e (logarithme naturel).

En base quelconque $(a \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0,\ 1\})$:

$\log_a(1) = 0$ $\qquad \log_a(a) = 1$

Trigonométrie

DÉFINITIONS

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x},\quad \cos x \neq 0$ $\quad \cot(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x},\quad \sin x \neq 0$

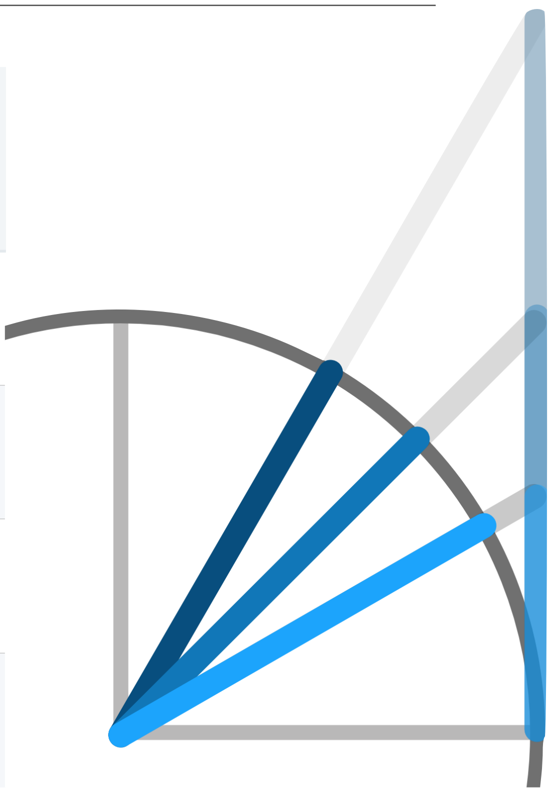
FORMULES D'ADDITION

$$\begin{cases} \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \end{cases}$$

On peut en dériver la plupart des formules de trigonométrie, dont $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

VALEURS REMARQUABLES

°	0	30	45	60	90
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
cot	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



AUTRES FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

ANGLE MOITIÉ

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}} \qquad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

⚠️ Il faut déterminer le signe avec le quadrant.

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}, \qquad \alpha \neq \pi + 2k\pi$$

Même signe que $\sin(\alpha)$.

FORMULE DE FACTORISATION

$$\begin{cases} \cos(\gamma) + \cos(\delta) = 2\cos\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\gamma-\delta}{2}\right) \\ \sin(\gamma) + \sin(\delta) = 2\sin\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\gamma-\delta}{2}\right) \end{cases}$$

Fonctions réelles d'une variable réelle

Soient $E,\ F \subset \mathbb{R}$.

La fonction réelle $f\ :\ E \to F$ est une règle qui associe une seule valeur $f(x)$ pour chaque $x \in D_f$.

DOMAINE DE DÉFINITION

D_f, aussi noté $D(f)$, est l'ensemble des $x \in E$ pour lesquels f est bien définie.

IMAGE

Ensemble des valeurs de l'ensemble d'arrivée qui sont "atteintes" par l'application.

$$\boxed{\mathrm{Im} f = \{f(x), x \in E\} = \{y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)\}}$$

FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

Fonctions polynomiales

Fonctions de la forme $f(x) = 3x^3 + 5x + 4$.

Une fonction affine est de la forme $f(x) = ax + b$, avec $a,\ b \in \mathbb{R}$.

Fonctions rationnelles

Une fonction rationnelle est de la forme $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes ($Q(x) \neq 0$).

Fonctions algébriques

Une fonction algébrique est obtenue par application des opérations $+$, $-$, $\cdot$, $\div$, et $\sqrt{\ }$.

Fonctions transcendantes

Toute fonction qui n'est pas algébrique. Par exemple : fonctions trigonométriques

FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES

Exponentielle : $f(x) = e^x$

Logarithme : $g(x) = \log x$, avec $x > 0$

$\log(x)$ et e^x sont des fonctions réciproques : $\log(e^x) = x\ \forall x \in \mathbb{R}$, et $e^{\log x} = x\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

INJECTIVITÉ, SURJECTIVITÉ, BIJECTION

INJECTION → UNIQUE ANTÉCÉDENT

Tous les membres de l'ensemble d'arrivée n'ont pas plus que 1 antécédent (ou 0).

Ensemble de départ ≤ Ensemble d'arrivée

SURJECTION

Tous les éléments de l'ensemble d'arrivée sont atteints ($\mathrm{Im} f = E$)

Ensemble de départ ≥ Ensemble d'arrivée

BIJECTION

La fonction est une injection et une surjection.

FONCTION RÉCIPROQUE

Si par définition $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, on dit que f et f^{-1} sont réciproques

(en précisant les valeurs admissibles pour x et y).

Leurs graphes sont symétriques autour de la droite $x = y$.

Quand une fonction n'est pas bijective, on peut réduire son domaine de définition à un intervalle où la fonction est bijective (par exemple $\cos$ sur $[0,\ \pi]$).

FONCTIONS COMPOSÉES

Soit $f\,:\,D_f\to\mathbb{R}$, et $g\,:\,D_g\to\mathbb{R}$, telles que $\mathrm{Im}\,f\subset D_g$.

$g\circ f$ est une **fonction composée**. $(g\circ f)(x)$ équivaut à $g(f(x))$ (l'ordre est important !).

Transformations de graphiques

Certaines modifications de la définition d'une fonction ont des effets bien spécifiques sur son graphique.

TRANSLATIONS

$f(x)\longrightarrow f(x)+3$	Monte le graphique de 3 unités.
$f(x)\longrightarrow f(x)-3$	Descend le graphique de 3 unités.
$x\longrightarrow x-5$	Déplace le graphique de 5 unités **vers la droite**.
$x\longrightarrow x+5$	Déplace le graphique de 5 unités **vers la gauche**.

« EXTENSION » VERTICALE

$f(x)\longrightarrow 2\cdot f(x)$	Étend le graphique en direction verticale.
$f(x)\longrightarrow \dfrac{1}{4}\cdot f(x)$	Compresse le graphique en direction verticale.

« EXTENSION » HORIZONTALE

$x\longrightarrow 5x$	Compresse le graphique en direction horizontale
$x\to\dfrac{1}{3}x$	Étend le graphique en direction verticale.

Nombres réels

Théorie naïve des ensembles et notations

ENSEMBLE

« Un ensemble est une collection d'objets définis et distincts » — G. Cantor

NOTATIONS

$a \in Y$	$\Leftrightarrow$ a appartient à Y
$b \notin Y$	$\Leftrightarrow$ b n'appartient pas à Y
$\emptyset$	Ensemble vide : $\emptyset = \{\,\}$
$\forall$	pour tout
$\exists$	il existe

$Y \subset X$	$\Leftrightarrow$ Y est un sous-ensemble de X
	$\Leftrightarrow \forall c \in Y,\ c \in X$
$Y \not\subset X$	$\exists d \in Y,\ d \notin X$

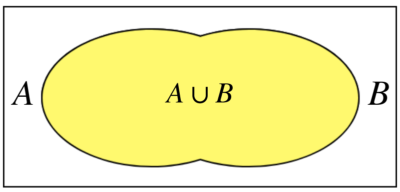
Note : $\emptyset \subset X,\ \forall X$, et $X \subset X,\ \forall X$

$Y = X$	$\Leftrightarrow$ $Y \subset X$ et $X \subset Y$
$Y \neq X$	$\Leftrightarrow$ $Y \not\subset X$ ou $X \not\subset Y$

OPÉRATIONS ENSEMBLISTES

RÉUNION

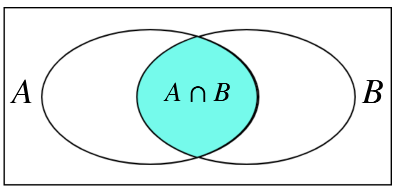
$A \cup B = \{x \in A \text{ ou } x \in B\}$



« A union B »

INTERSECTION

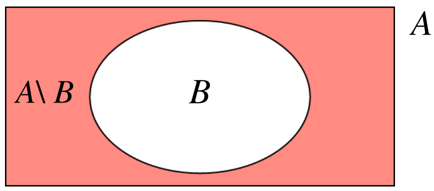
$A \cap B = \{x \in A \text{ et } x \in B\}$



« A inter B »

DIFFÉRENCE

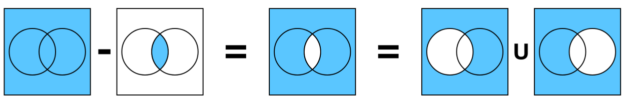
$A \setminus B = \{x \in A \text{ et } x \notin B\}$



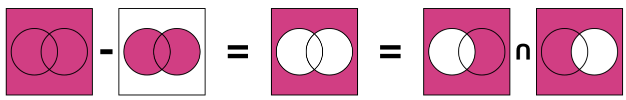
« A privé de B »

LOIS DE MORGAN ENSEMBLISTES

$$E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$$



$$E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$$



Nombres naturels, relatifs, rationnels et réels

NOMBRES NATURELS

$\mathbb{N}$ sont les **nombres naturels** ($\{0, 1, 2, \ldots\}$) avec les opérations $+$, $\cdot$ et la relation d'ordre ($a \leq b,\ \ a, b \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} : a + c = b$).

Les deux axiomes suivants de $\mathbb{N}$ sont équivalents :

PROPRIÉTÉ DE BON ORDRE

Tout sous-ensemble non vide $S \subset \mathbb{N}$ contient un **plus petit élément**.

PROPRIÉTÉ DE RÉCURRENCE

Soit $S \subset \mathbb{N}$ tel que $0 \in S$, et $n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$. Alors $S = \mathbb{N}$.

ENTIERS RELATIFS

$$\mathbb{Z} = \{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots\}$$

Tout $x \in \mathbb{Z}$ possède un élément réciproque par rapport à l'addition, nommé **opposé**, et noté $-x$.

NOMBRES RATIONNELS

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$$

COMPARAISON DE DEUX ÉLÉMENTS

$\frac{p}{q} = \frac{t}{s}$ si $p \cdot s = t \cdot q$

ÉLÉMENT RÉCIPROQUE POUR LA MULTIPLICATION

$\forall x \in \mathbb{Q}^*,\ \exists y \in \mathbb{Q}$ tel que $x \cdot y = 1$

Nombres réels et définition axiomatique

NOMBRES RÉELS (DÉFINITION AXIOMATIQUE)

On définit $\mathbb{R}$ par les axiomes suivants :

- $\mathbb{R}$ **est un corps** : c'est un ensemble où les opérations $+$ et $\cdot$ sont définies, et satisfont les règles suivantes $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$(x + y) + z = x + (y + z)$	Addition associative
$x + y = y + x$	Addition commutative
$\exists 0 \in \mathbb{R},\ x + 0 = 0$	Existence d'un élément neutre pour l'addition
$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$	Existence d'un inverse pour l'addition
$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	Associativité de la multiplication
$x \cdot y = y \cdot x$	Commutativité de la multiplication
$\exists 1 \in \mathbb{R},\ 1 \neq 0$ et $x \cdot 1 = x$	Existence d'un élément neutre pour la multiplication
$x \neq 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R},\ x \cdot y = 1$	Existence d'un inverse pour la multiplication

- $\mathbb{R}$ **est un corps ordonné** : il existe une relation d'ordre « $\leq$ » telle que pour tous $x,\ y \in \mathbb{R}$ $x \leq y$ ou $x \geq y$. De plus, pour tous $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$, on a :

$x \leq y$ et $y \leq z \ \Rightarrow\ x \leq z$	Transitivité
$x \leq y \ \Rightarrow\ x + z \leq y + z$	Addition des deux côtés
$x \geq 0$ et $y \geq 0 \ \Rightarrow\ x \cdot y \geq 0$	Signe de la multiplication

  De plus, si $x \leq y$ et $x \neq y$, on note $x < y$. Si $x \geq y$ et $x \neq y$, alors $x > y$.

- **Axiome de la borne inférieure** *(de « complétude »)* : pour tout $S \subset \mathbb{R}_+,\ S \neq \emptyset$, il existe un nombre $a \in \mathbb{R}^*$, appelé « **borne inférieure** » ou « **infimum** », tel que :

  $\forall x \in S,\ a \leq x$

  La borne inférieure est plus petite que tous les éléments de S.

  $\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists x_\epsilon \in S$ tel que $x_\epsilon - a \leq \varepsilon$

  On peut trouver un élément de S arbitrairement proche de la borne inférieure.

Cette définition fait de $\mathbb{R}$ un corps dit **commutatif**, **ordonné** et **complet.**

Borne inférieure ou supérieure

MINORANTS ET MAJORANTS

Soit S, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non nul.

- $a \in \mathbb{R}$ est un **minorant** de S $\Leftrightarrow$ $\forall x \in S,\ x \geq a$.
- $b \in \mathbb{R}$ est un **majorant** de S $\Leftrightarrow$ $\forall x \in S,\ x \leq b$.

Si S a un minorant, il est **minoré**, et s'il a un majorant, il est **majoré**.
S'il est minoré et majoré, on dit qu'il est **borné**.

BORNES INFÉRIEURE ET SUPÉRIEURE

$a \in \mathbb{R}$ est la **borne inférieure** de S

$\Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$ est l'**infimum** de S

$\Leftrightarrow a = \inf S$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in S,\ a \leq x \\ \text{et} \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in S \text{ tel que } x_\varepsilon - a \leq \varepsilon \end{cases}$$

S est minoré $\Leftrightarrow \inf S$ existe.

Si $\inf S \in S$, alors S a un **minimum** ($\min S$).

$a \in \mathbb{R}$ est la **borne supérieure** de S

$\Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$ est le **supremum** de S

$\Leftrightarrow a = \sup S$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in S,\ x \leq b \\ \text{et} \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in S \text{ tel que } b - x_\varepsilon \leq \varepsilon \end{cases}$$

S est majoré $\Leftrightarrow \sup S$ existe.

Si $\sup S \in S$, alors S a un **maximum** ($\max S$).

Lorsque S a une borne inférieure ou supérieure, elle est toujours **unique**.

INTERVALLES

Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On définit les intervalles suivants :

INTERVALLES BORNÉS

$[a,\ b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (intervalle **fermé** borné) $\begin{cases} a = \inf S = \min S \\ b = \sup S = \max S \end{cases}$

$]a,\ b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (intervalle **ouvert** borné) $a = \inf S,\ b = \sup S$

$[a,\ b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (intervalle **semi-ouvert** borné) $a = \inf S = \min S,\ \ b = \sup S$

$]a,\ b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (intervalle **semi-ouvert** borné) $a = \inf S,\ \ b = \sup S = \max S$

INTERVALLES NON-BORNÉS

$[a,\ +\infty[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

$]a,\ +\infty[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

$]-\infty,\ b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

$]-\infty,\ b[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

AUTRES NOTATIONS

$\mathbb{R}_+ = [0,\ +\infty[$

$\mathbb{R}_+^* =]0,\ +\infty[$

$\mathbb{R}_- =]-\infty,\ 0]$

$\mathbb{R}_-^* =]-\infty,\ 0[$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}$

DROITE RÉELLE ACHEVÉE

$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty,\ \infty\}$. (📝 $\forall x \in \mathbb{R},\ -\infty < x < x$)

PROPRIÉTÉ D'ARCHIMÈDE ET DENSITÉ

PROPRIÉTÉ D'ARCHIMÈDE

Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y \in \mathbb{R}_+$, il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \cdot x > y$.

DENSITÉ

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, $\exists r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$.

$\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, $\exists i \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ tel que $x < i < y$.

Nombres complexes

Définitions

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes (de la forme $a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$).

C'est un corps commutatif, complet, mais non ordonné. $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$.

$i \subset \mathbb{C}$, tel que $i^2 = -1$.

Chaque $z \in \mathbb{C}^*$ possède un inverse pour la multiplication, $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ ($\Rightarrow z\bar{z} = |z|^2$).

$|z|$ est le **module**, $\bar{z}$ le **conjugué**, $\operatorname{Re} z$ la **partie réelle**, et $\operatorname{Im} z$ la **partie imaginaire** de z.
$\arg z$ est un argument de z, qui est défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$).

FORME CARTÉSIENNE

$$z \in \mathbb{C} = a + ib \quad a, b \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} \operatorname{Re} z = a,\ \operatorname{Im} z = b,\ |z| = \sqrt{a^2 + b^2},\ \bar{z} = a - ib \\ \arg z \underset{k\in\mathbb{Z}}{=} 2k\pi + \begin{cases} \arctan \frac{b}{a} & \text{si } \operatorname{Re} z > 0 \\ \arctan \frac{b}{a} + \pi & \text{si } \operatorname{Re} z < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } \operatorname{Re} z = 0 \text{ et } \operatorname{Im} z > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } \operatorname{Re} z = 0 \text{ et } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases} \end{cases}$$

FORME POLAIRE TRIGONOMÉTRIQUE

$$z = \rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)), \quad \varphi \in \mathbb{R}, \rho \in \mathbb{R}_+^* \qquad \begin{cases} \operatorname{Re} z = \rho\cos(\varphi) \\ \operatorname{Im} z = \rho\sin(\varphi) \\ |z| = \rho,\ \arg z = \varphi + \underset{k\in\mathbb{Z}}{2k\pi} \\ \bar{z} = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi) \end{cases}$$

φ est défini à $2k\pi$ près, où $k \in \mathbb{Z}$.

FORME POLAIRE EXPONENTIELLE

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \rho \in \mathbb{R}_+^* \qquad \begin{cases} \operatorname{Re} z = \rho\cos(\varphi) \\ \operatorname{Im} z = \rho\sin(\varphi) \\ |z| = \rho,\ \arg z = \varphi + \underset{k\in\mathbb{Z}}{2k\pi} \\ \bar{z} = \rho e^{-i\varphi} \end{cases}$$

Opérations

ADDITION ET MULTIPLICATION EN FORME CARTÉSIENNE

On traite $+$ et $\cdot$ de la même façon qu'on le ferait si i était une variable :

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$

$$(a+ib)(c+id)=ac+bd+i(bc+ad)$$

MULTIPLICATION ET DIVISION EN FORME POLAIRE

$$\rho_1 e^{i\varphi_1}\cdot\rho_2 e^{i\varphi_2}=(\rho_1\rho_2)e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}}=\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

FORMULE DE MOIVRE (PUISSANCES ENTIÈRES)

$$z^n=(\rho e^{i\varphi})^n=\rho^n e^{i\varphi n}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$$

RACINES DE L'UNITÉ

$$\left\{z\in\mathbb{C}^*\text{ où }z^n=\rho e^{i\varphi}\right\}=\left\{\sqrt[n]{\rho}\cdot e^{i\left[\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right]}\,\middle|\,k=1,\ \dots,\ n-1\right\}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$$

En particulier, lorsque $n=2$, il y a deux racines telles que $z_1=-z_2$.

Factorisation

ÉQUATIONS QUADRATIQUES

La formule quadratique $ax^2+bx+c=0\ \Rightarrow\ x_{1,\,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ fonctionne dans $\mathbb{C}$.

On aura dans tous les cas deux solutions, la racine étant toujours définie.

THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE

Toute équation de la forme :

$$a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1 z^n+a_0 z^0,\quad n\geq 1,\quad a_i\in\mathbb{C}$$

a au moins une solution dans $\mathbb{C}$.

On peut donc la réécrire comme un produit de polynômes de degré 1 : $a_n(z-z_1)(z-z_2)\cdots$, avec n racines (qui peuvent être confondues).

Dans $\mathbb{R}$, ce n'est pas vrai : un polynôme peut avoir des polynômes de degré 2 dans sa décomposition en facteurs irréductibles.

Lorsqu'un polynôme n'a que des coefficients réels, si z_0 est une racine, $\overline{z_0}$ l'est aussi.

Suites de nombres réels

Définitions

Une suite de nombre réels est une fonction $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $\mathbb{N}$

(ou parfois, pour tout $n \geq n_0$ dans $\mathbb{N}$).

On note une suite (a_n), où $a_n = f(n)$.

On la note parfois aussi $(a_n)_{n\geq 0}$, ou comme un ensemble ou sous-ensemble *ordonné* :

$\{a_0, a_1, a_2, \ldots\} = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

BORNES ET MONOTONIE

La suite a_n est :

- **majorée** ⇔ il existe un **majorant** M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq M$.
- **minorée** ⇔ il existe un **minorant** m tel que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq M$.
- **bornée** ⇔ elle est majorée et minorée.
- **croissante** ⇔ $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq a_{n+1}$.
  strictement croissante ⇔ $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < a_{n+1}$.
- **décroissante** ⇔ $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq a_{n+1}$.
  strictement décroissante ⇔ $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > a_{n+1}$.
- **monotone** ⇔ elle est croissante ou décroissante.
  strictement monotone ⇔ elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Pour prouver qu'une proposition $P(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$, il suffit de prouver :

- que $P(n_0)$ est vraie (**initialisation**)
- que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (**hérédité** ou **pas de récurrence**)

Si la proposition nécessite de travailler avec plusieurs rangs à la fois, on peut prouver :

- dans l'**initialisation** : que $P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(n_0+k)$ sont vraies.
- dans le **pas de récurrence** : que $\begin{cases} P(n) \\ P(n+1) \\ \vdots \\ P(n+k) \end{cases}$ impliquent $P(n+k+1)$.

Limites

LIMITE D'UNE SUITE

Une suite (a_n) converge vers une limite $a \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \ (n_0 = n_0(\varepsilon))$$
$$\text{tel que } n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

« Pour tout ε (**coefficient de proximité**) positif, il existe un **seuil** n_0 à partir duquel la différence entre a_n et la **limite** a est plus petite que ε. »

→ La suite est **convergente** car on peut s'approcher d'une manière arbitrairement proche de a. $]a-\epsilon, a+\epsilon[$ est appelé le *epsilon-voisinage* de a. Dans le cas contraire, (a_n) est **divergente**.

(La limite n'est pas forcément un des termes de la suite !

SUITE CONVERGENTE ⇒ SUITE BORNÉE

Toute suite convergente est bornée.

INÉGALITÉ TRIANGULAIRE

Pour tous $x,\ y \in \mathbb{R}$, $|x+y| \leq |x| + |y|$.

OPÉRATIONS ALGÉBRIQUES

SOMME ET SOUSTRACTION

"La somme des limites est la limite des sommes"

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n) - \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$$

PRODUIT ET DIVISION

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty}(a_n)}{\lim_{n\to\infty}(b_n)} \text{ si } b_n \text{ et } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

Cela implique la linéarité de la limite : $\lim_{n\to\infty}(pa_n + qb_n) = pa + qb$.

LIMITE D'UNE DIVISION POLYNOMIALE

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n < m \end{cases}$$

$P_n(x)$ est un polynôme en x de degré n

$Q_m(x)$ est un polynôme en x de degré m.

VALEUR ABSOLUE

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \ell \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|a_n| = \ell$$

REMARQUES

⚠️ $(a_n + b_n)$ convergente n'implique pas que (a_n) et (b_n) sont convergentes !

Si $(a_n b_n)$ est convergente et que si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ existe, $\lim_{n\to\infty} b_n$ existe aussi.

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors on ne peut rien dire a priori.

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ et que $a_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}$ est divergente.

CRITÈRE DE D'ALEMBERT

Pour une suite (a_n) telle que $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \quad \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 & \text{si } \rho < 1 \\ \text{pas d'indication} & \text{si } \rho = 1 \\ (a_n) \text{ diverge} & \text{si } \rho > 1 \\ (a_n) \text{ diverge} & \text{si la limite diverge} \end{cases}$$

LIMITES À CONNAÎTRE

RACINE CARRÉE

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{P(n)} = 1$$

FACTORIELLE

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S^n}{n!} = 0 \quad \forall S \in \mathbb{R}$$

SUITE GÉOMÉTRIQUE

$$a_n = a_0 \cdot r^n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_0 r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |r| < 1 \\ a_0 & \text{si } r = 1 \\ \text{divergente} & \text{sinon} \end{cases}$$

$a_0 \in \mathbb{R}^*$

LIMITES SPÉCIALES

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^y - 1}{y} = 1 \qquad \lim_{y\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

NOMBRE D'EULER

Le nombre d'Euler, noté e, est le réel vers lequel tendent $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$.
Il vaut environ $e = 2.718281828459\ldots$

HIÉRARCHIE DE LA CROISSANCE DES FONCTIONS

$$n^n \succ n! \succ a^n \succ n^p \succ (\log_b n)^q \quad \text{avec } a > 1,\ p > 0$$

RELATIONS D'ORDRE

CONSERVATION DES RELATIONS D'ORDRE

Les relations d'ordres sont conservées par la limite.

Soient deux suites convergentes, (a_n) et (b_n).

Si à partir de $n_0 \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \geq b_n$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \geq \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

THÉORÈME DES DEUX GENDARMES

Soient trois suites : (a_n), (b_n) et (c_n).

Si à partir d'un n_0, $(a_n) \leq (b_n) \leq (c_n)$, et $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$.

Limites infinies

DÉFINITION

On dit que a_n **diverge** vers l'infini ($\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$), si

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ (n_0 = n_0(A)) \quad \text{tel que } n \geq n_0 \Rightarrow a_n > A$$

Elle **diverge** vers $-\infty$ si

$$\forall B < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ (n_0 = n_0(A)) \quad \text{tel que } n \geq n_0 \Rightarrow a_n < B$$

RÈGLES DE CALCUL

« 0 · BORNÉ = 0 »

(a_n) est bornée et $\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0.$

« ∞ + ∞ »

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty = \lim_{n\to\infty} b_n \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$

« ∞ + BORNÉ »

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, et (b_n) bornée $\quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$

« BORNÉ / ∞ »

(a_n) bornée et $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

« RÈGLE DU GENDARME »

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ et qu'à partir d'un seuil, $a_n < b_n \ \forall n \geq N$, alors $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ et qu'à partir d'un seuil, $a_n > b_n \ \forall n \geq N$, alors $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$

FORMES INDÉTERMINÉES

Dans les cas « ∞ – ∞ » et « 0 · ∞ », on ne peut rien dire a priori, et il faut lever l'indétermination.

Exemple : $\lim_{n\to\infty} \overbrace{(n+1)}^{\to\infty} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}} = 1 + 0 = 1$

CONVERGENCE DES SUITES MONOTONES

Toute suite **croissante** et **majorée**	**converge** vers son supremum
Toute suite **décroissante** et **minorée**	**converge** vers son infimum
Toute suite **croissante** et **non majorée**	**diverge** vers $+\infty$
Toute suite **décroissante** et **non minorée**	**diverge** vers $-\infty$

Sous-suites et suites de Cauchy

SOUS-SUITES

Une sous-suite de la suite (a_n) est la suite dont les indices sont donnés par la suite $k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ strictement croissante.

CONVERGENCE → CONVERGENCE DE LA SOUS-SUITE

Si (a_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors toutes ses sous-suites convergent aussi vers ℓ.

THÉORÈME DE BOLZANO-WEIERSTRASS

Toute suite bornée a une sous-suite convergente.

SUITES DE CAUCHY

Une suite (a_n) est une **suite de Cauchy** si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{Z}\ (n_0 = n_0(\varepsilon)) \text{ tel que } \forall \underset{\in \mathbb{N}}{n, m} \geq n_0,\ |a_n - a_m| \leq \varepsilon}$$

Cette propriété est équivalente à dire que (a_n) converge.

Si $\lim_{n\to\infty} \left(a_{n+k} - a_n\right) = 0$ pour un $k \in \mathbb{N}$ fixé, cela *n'implique pas* que a est une suite de Cauchy (exemple : $a_n = \sqrt{n}$).

Séries numériques

DÉFINITION

Une **série numérique**, de **terme général** a_n,

et possédant comme **suite de somme partielles** $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$,

est convergente si et seulement si S_n est convergente.

SOMME

La **somme** de la série est $\lim_{n\to\infty} S_n$, que l'on note $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell \in \mathbb{R}$ (la série converge vers ℓ).

DIVERGENCE VERS L'INFINI

Si $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, on écrit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \pm\infty$.

QUELQUES SÉRIES

SÉRIE GÉOMÉTRIQUE

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}, \quad \text{pour } |r| < 1$$

SÉRIE HARMONIQUE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

FONCTION ZÊTA DE RIEMANN

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \overset{\text{not.}}{=} \zeta(2) \text{ converge}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge pour tout $p > 1$.

Critères de convergence

CONVERGENCE ABSOLUE

Une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est **absolument convergente** si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge.

Si une série est absolument convergente, alors elle est convergente.

CONDITION NÉCESSAIRE : CONVERGENCE DU TERME GÉNÉRAL

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. ⚠️ La réciproque est fausse.

CRITÈRE DE LEIBNITZ (SÉRIES ALTERNÉES)

Série alternée	$\forall n \geq p,\ a_{n+1} \cdot a_n \leq 0$	
Décroissante en valeur absolue	$\forall n \geq p, \lvert a_{n+1} \rvert \leq \lvert a_n \rvert$	$\Rightarrow \sum_{a=0}^{\infty} a_n$ est convergente
Converge vers 0	$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$	

CRITÈRE DE COMPARAISON (SOMMES À TERMES NON NÉGATIFS)

Soit deux suites (a_n) et (b_n) telles qu'à partir d'un certain $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a_n \leq b_n$.

Alors si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge également.

Dans l'autre sens, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, alors $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge également.

CRITÈRE DE D'ALEMBERT

Soit (a_n) une suite telle que $a_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. On cherche à calculer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \rho < 1 & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge absolument} \\ \rho > 1 & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge} \end{cases}$$

CRITÈRE DE CAUCHY (RACINE)

Soit (a_n) une suite. On cherche à calculer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. ✨ Utile pour les cas avec les exponentielles

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \rho \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \rho < 1 & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge absolument} \\ \rho > 1 & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge} \end{cases}$$

📝 Si les ρ du critère de d'Alembert et de Cauchy existent les deux, alors ils sont identiques.

(Parfois, la limite du critère de Cauchy existe mais pas celle du critère de d'Alembert).

FONCTIONS D'INTERPOLATION

✨ Permet d'utiliser les limites des fonctions pour connaître les limites des suites.

- **Limites vers l'infini** Si $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$, alors $\lim_{n \to \infty} f(n) = \ell$.
- **Limites vers zéro** Si $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ell$, alors $\lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \ell$.

⚠️ Si la $\lim f(x)$ n'existe pas, cela ne veut pas forcément dire que $\lim a_n$n'existe pas.

APPLICATION AUX CONVERGENCES DE SÉRIES

Pour calculer la convergence de $f(x)$, on pose $\dfrac{f(x)}{x^\alpha}$ et on calcule α pour que ça converge vers $\ell \neq 0$. Les séries des $f(x)$ et des $\frac{1}{n^\alpha}$ auront la même convergence.

Fonctions réelles

Définitions

DÉFINITION D'UNE FONCTION

FONCTION (RÉELLE)

Soient E et F, deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Une **fonction** $f : E \to F$, est une règle qui associe à chaque $x \in E$ un unique élément $f(x) \in F$.

DOMAINE DE DÉFINITION

$D(f)$ est le **domaine de définition** de f. Si E est explicité ($f : E \to F$), alors $D(f) = E$.

Trouver le domaine de définition = trouver le plus grand $E \subset \mathbb{R}$ pour lequel f est bien défini.

ENSEMBLE IMAGE

L'**ensemble image** $f(D) \subset F$ est l'ensemble des $\{f(x) \,|\, x \in E\}$.

GRAPHIQUE

Le **graphique** de F est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ de la forme $\big(x,\ f(x)\big)$.

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES RÉCIPROQUES

Pour définir les fonctions trigonométriques réciproques, on réduit l'ensemble de départ pour avoir une fonction bijective, par convention sur :

$$\sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow [-1,\ 1]$$
$$\arcsin x : [-1,\ 1] \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos x : [0,\ \pi] \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow [-1,\ 1]$$
$$\arccos x : [-1,\ 1] \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow [0,\ \pi]$$

$$\tan x : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}$$
$$\arctan x : \mathbb{R} \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\cot x :]0,\ \pi[\hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}$$
$$\operatorname{arccot} x : \mathbb{R} \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow]0,\ \pi[$$

(Ici, la notation $\hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow$ indique que ces fonctions sont bijectives)

COMPOSITION

Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$.

$g \circ f : X \to Z$ est la fonction définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

PROPRIÉTÉS

CROISSANCE ET BORNES

- f est **croissante** ($f \uparrow$) $\Leftrightarrow \forall x_1,\ x_2 \in D(f),\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

  f est **strictement croissante** $\Leftrightarrow \forall x_1,\ x_2 \in E,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

- f est **décroissante** ($f \downarrow$) $\Leftrightarrow \forall x_1,\ x_2 \in D(f),\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

  f est **strictement décroissante** $\Leftrightarrow \forall x_1,\ x_2 \in E,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

- f **est monotone** $\Leftrightarrow$ elle est croissante ou décroissante.

  f est **strictement monotone** $\Leftrightarrow$ elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

- f est **majorée** sur $A \subset D(f)$ $\Leftrightarrow f(A)$ est majoré. $\sup_{x \in A} f(x) = \sup\{f(x),\ x \in A\}$
- f est **minorée** sur $A \subset D(f)$ $\Leftrightarrow f(A)$ est minoré. $\inf_{x \in A} f(x) = \inf\{f(x),\ x \in A\}$
- f est **bornée** sur $A \subset D(f)$ $\Leftrightarrow f$ est majorée et minorée sur E.

EXTREMUMS (MAXIMUMS ET MINIMUMS)

- f a un **maximum local** en x_0 $\Leftrightarrow$ il existe $\delta > 0$ tel que tout x dans le δ-voisinage de x_0

  $(\forall x \in D(f) \cap [x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]), f(x) \leq f(x_0)$.

- f a un **minimum local** en x_0 $\Leftrightarrow$ il existe $\delta > 0$ tel que tout x dans le δ-voisinage de x_0

  $(\forall x \in D(f) \cap [x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]), f(x) \geq f(x_0)$.

- f a un **maximum global** en x_0 $\Leftrightarrow \forall x \in D(f),\ f(x) \leq f(x_0)$ Alors $x_0 = \sup_{x \in D(f)} f(x)$
- f a un **minimum global** en x_0 $\Leftrightarrow \forall x \in D(f),\ f(x) \geq f(x_0)$ Alors $x_0 = \inf_{x \in D(f)} f(x)$

PARITÉ ET PÉRIODICITÉ

- f est **paire** $\Leftrightarrow D(f)$ est symétrique $(x \in D(f) \Leftrightarrow -x \in D(f))$

  et $\forall x \in D(f),\quad f(-x) = f(x)$

- f est **impaire** $\Leftrightarrow D(f)$ est symétrique $(x \in D(f) \Leftrightarrow -x \in D(f))$

  et $\forall x \in D(f),\quad f(-x) = -f(x)$

- f est **périodique** $\Leftrightarrow$ il existe une **période** $P \in \mathbb{R}^*$ telle que $\forall x \in D(f)$,

  $x + P \in D(f)$ et $f(x + P) = f(x)$.

  La plus petite période (> 0) n'existe pas toujours.

INJECTIVITÉ, SURJECTIVITÉ, BIJECTIVITÉ

- $f : E \to F$ est **injective** $\Leftrightarrow$ chaque $y \in F$ a **au plus** une préimage par f

  $\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2\ (x_1, x_2 \in X)$.

- $f : E \to F$ est **surjective** $\Leftrightarrow$ chaque $y \in F$ a **au moins** une préimage par f
- $f : E \to F$ est **bijective** $\Leftrightarrow$ elle est injective et surjective.

  $\Leftrightarrow \exists f^{-1} : F \to E$ telle que $y \underset{x \in E}{=} f(x) \Leftrightarrow x \underset{y \in F}{=} f^{-1}(y)$.

Limites d'une fonction

LIMITE EN UN POINT

Soit $f : E \to F$ définie dans un voisinage pointé de $x_0 \in \mathbb{R}$

($\Leftrightarrow$ il existe $\delta > 0$ tel que $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < |x - x_0| < \delta\} \subset E$).

La fonction $f : E \to F$ **admet pour limite** $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers x_0 :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \;\Leftrightarrow\; \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que} \\ 0 < |x - x_0| \leq \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \end{array}$$

Lorsqu'elle existe, cette limite est **unique**.

CARACTÉRISATION DE LA LIMITE PAR LES SUITES

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \;\Leftrightarrow$ pour toute suite $(a_n) \subset E \backslash \{x_0\}$ convergente vers x_0, on a $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = \ell$.

Contraposée : La contraposée est utile pour prouver la non-existence de la limite.

Corollaire : La suite de terme général $f(a_n)$ convergera vers ℓ.

CRITÈRE DE CAUCHY POUR LES FONCTIONS

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que} \\ \forall x_1,\ x_2 \in \{x \in E : 0 < |x - x_0| \leq \delta\} \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \delta \end{array}$$

OPÉRATIONS ALGÉBRIQUES SUR LES LIMITES

Les propriétés d'addition, multiplication scalaire, multiplication et division des limites pour les suites sont toujours valables sur les fonctions.

THÉORÈME DES DEUX GENDARMES

Soient trois fonctions $f, g, h : E \to F$ telles que :

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$
- Il existe un δ-voisinage (pointé) de x_0 ($\{x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta\}$ avec $\delta > 0$)

  dans lequel pour tout x dans le voisinage, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$.

Alors $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$.

Par exemple, on obtient que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ avec borne entre 1 et $\dfrac{1}{\cos x}$.

LIMITE DE LA COMPOSÉE ENTRE DEUX FONCTIONS

Soient $f : E \to F$ et $g : G \to H$ (avec $f(E) \subset G$)

où $f(x) \neq y_0$ dans un voisinage pointé de x_0 ($\exists \alpha > 0$ tel que $0 |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \neq y_0$).

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ et $\lim_{y \to y_0} g(y_0) = \ell$, alors $\lim_{x \to x_0} g\big(f(x)\big) = \ell$.

✨ C'est utile par exemple pour prouver des limites compliquées, en réduisant sous des formes connues (conjugué, sin *x* / *x*, …).

LIMITES LORSQUE X → ±∞

FONCTION DÉFINIE AU VOISINAGE DE L'INFINI

$f : E \to F$ est **définie au voisinage de** $\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$ s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{matrix}]\alpha ; +\infty[\\ ]-\infty ; \ \alpha[\end{matrix} \subset E$.

LIMITE RÉELLE À L'INFINI

Soit *f* définie au voisinage de $\pm\infty$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \begin{matrix} \geq \alpha \\ \leq \alpha \end{matrix}, \ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

f admet alors une asymptote horizontale $y = \ell$ lorsque $x \to \pm\infty$.

LIMITES INFINIES

LIMITES À L'INFINI EN UN POINT

Soit *f* définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \begin{matrix} \forall A > 0 \\ \forall B < 0 \end{matrix}, \exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < |x - x_0| \leq \delta \text{ implique que } \begin{matrix} f(x) > A \\ f(x) < B \end{matrix}.$$

LIMITES À L'INFINI AU VOISINAGE DE L'INFINI

Soit *f* définie au voisinage de $\pm\infty$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \begin{matrix} \forall A > 0 \\ \forall B < 0 \end{matrix}, \begin{matrix} \exists \alpha > 0 \\ \exists \alpha < 0 \end{matrix} \text{ tel que } \begin{matrix} x \geq \alpha \\ x \leq \alpha \end{matrix} \text{ implique que } \begin{matrix} f(x) > A \\ f(x) < B \end{matrix}.$$

PROPRIÉTÉS

- **Somme** $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$
- **Infini + borné** $(\pm\infty) + [\text{borné}] = \pm\infty$
- **Infini × réel** $(\pm\infty) \cdot \ell = (\pm\infty) \cdot \operatorname{sgn}(\ell)$
- **Division par l'infini** $1 \div (\pm\infty) = 0$
- **Division par 0** : si $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, alors $\lim_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } f(x) > 0 \text{ dans un vois. de } x_0 \\ -\infty & \text{si } f(x) < 0 \text{ dans un vois. de } x_0 \\ \text{-} & \text{n'existe pas sinon} \end{cases}$
- **Gendarmes** : si $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ et $\begin{matrix} g(x) \geq f(x) \\ g(x) \leq f(x) \end{matrix}$ au voisinage de x_0, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$.

FORMES INDÉTERMINÉES

Les formes indéterminées sont les expressions des formes suivantes :

$$\text{« } \infty - \infty \text{ », « } \frac{\infty}{\infty} \text{ », « } \frac{0}{0} \text{ », « } 0 \cdot \infty \text{ », « } 0^0 \text{ », « } 0^\infty \text{ » et « } 1^\infty \text{ »}$$

Dans ces cas, il faut réécrire l'expression d'une autre manière pour connaître la limite.

LIMITE À GAUCHE ET LIMITE À DROITE

FONCTION DÉFINIE À DROITE/GAUCHE

$f : E \to F$ est **définie à droite** / **définie à gauche** de $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0,\ x_0+\alpha[\ \subset E$ / $]x_0-\alpha,\ x_0[\ \subset E$.

LIMITE À GAUCHE/DROITE

Soit f définie à droite/gauche de x_0.

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$ / $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tel que $x \in\ ]x_0,\ x_0+\delta[$ / $x \in\ ]x_0-\delta,\ x_0[$ implique $|f(x)-\ell| \leq \varepsilon$.

Fonctions exponentielles et logarithmiques

FONCTION EXPONENTIELLE

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

PROPRIÉTÉS

- **Somme** $e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- **Inverse** $e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- e^x est strictement croissante et une bijection $\mathbb{R} \hookrightarrow\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{R}_+^*$.
- **Limite remarquable** : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

FONCTION LOGARITHME

$\log(x) : \mathbb{R}_+^* \hookrightarrow\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction réciproque de e^x.

PROPRIÉTÉS

- $e^{\log x} = x \ \forall x > 0$ et $\log(e^x) = x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.
- $\log x + \log y = \log(x \cdot y) \quad \forall x,\ y > 0$
- $\log x - \log y = \log \frac{x}{y} \quad \forall x, y > 0$
- $\log x^r = r \cdot \log x \quad \forall x > 0,\ r \in \mathbb{N}$
- $\log(1) = 0,\ \log(e) = 1$.

Fonctions continues

DÉFINITIONS

Une fonction $f : E \to F$ est **continue en** $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0)$.

(La limite existe, la fonction est définie en x_0 et les deux sont identiques.)

EXEMPLES DE FONCTIONS CONTINUES

x^p $(p \in \mathbb{N})$, polynômes, fonctions rationnelles sur $D(f)$, racines $\sqrt[p]{x},\ p \in \mathbb{N}$, $\sin$ et $\cos$

CONTINUITÉ À GAUCHE/DROITE

$f(x)$ est continue : à gauche $\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = x_0$ à droite $\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = x_0$.

Si $f(x)$ est continue à droite et à gauche, alors elle est continue.

CONTINUITÉ SUR UN INTERVALLE

$f(x)$ est continue : sur un intervalle **ouvert** $\Leftrightarrow$ continue sur tout x dans l'intervalle.

…**fermé** $\Leftrightarrow$ continue sur tout x dans l'intervalle, et à droite/gauche du côté de la borne.

CRITÈRE DE CAUCHY POUR LES FONCTIONS CONTINUES

Soit $f : E \to F$ définie au voisinage de x_0 et en x_0.

f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in E \cup [x_0 - \delta,\ x_0 + \delta],\ |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$.

À partir d'une certaine distance, toutes les valeurs de $f(x)$ sont aussi proches que l'on veut.

OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES

Si f et g sont continues en $x = x_0$, alors :

- **Combinaisons linéaires** — $\alpha f(x) + \beta g(x)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ est continue en $x = x_0$
- **Produits** — $f(x) \cdot g(x)$ est continue en $x = x_0$
- **Quotients** — $\frac{f(x)}{g(x)}$ avec $g(x_0) \neq 0$ est continue en $x = x_0$
- **Composée** — Si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{dom} g$, et f est continue en x_0, alors g est continue en $f(x_0)$. ⚠️ La réciproque est fausse.

PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ

Si une fonction n'est pas définie en un point, on peut « boucher le trou » en la définissant explicitement en ce point à sa limite.

Soit f définie sur un voisinage pointé de x_0, mais $x_0 \notin D_f$.

Si $\lim_{x \to x_0} = l$ $(l \in \mathbb{R})$, alors on peut définir une fonction « $\tilde{f}$ » (“*f tilde*”), qui sera elle continue en l :

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

THÉORÈME DE LA VALEUR INTERMÉDIAIRE

Soit $\underset{a<b}{f : [a, b]} \to F$ une fonction continue sur $[a, b]$.

$\inf\limits_{[a,b]} f = \min\limits_{[a,b]} f$ et $\sup\limits_{[a,b]} f = \max\limits_{[a,b]} f$, et toute valeur entre les deux sont atteintes par f dans $[a, b]$.

⚠️ On parle bien ici d'un intervalle **fermé** borné $[a, b]$, sans quoi on ne pourrait pas l'affirmer.

COROLLAIRE : EXISTENCE D'UN ZÉRO

Si $f(a) \cdot f(b) < 0$ (signe différent), alors il existe (au moins) un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

COROLLAIRE : IMAGE OUVERTE

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **strictement monotone** telle que I est un **intervalle ouvert**.

Alors $f(I)$ est aussi un intervalle ouvert.

COROLLAIRE : INJECTIVITÉ + MONOTONIE

Si une fonction f est **continue et injective**, alors elle est strictement monotone.

COROLLAIRE : INVERSE DES BIJECTIONS CONTINUES

Si une fonction f est **bijective et continue**,

alors f^{-1} est aussi **bijective**, **continue** et **strictement monotone**.

Calcul différentiel

Fonctions dérivables

Soit f définie sur un voisinage de x_0.

DÉRIVABILITÉ

Une fonction est dite **dérivable en** x_0 ssi la limite (*réelle*) $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe.

Dans ce cas là, cette limite est appelé la **dérivée** de f en x_0, notée « $f'(x_0)$ ».

📝 f n'est pas continue en $x_0 \Rightarrow f$ ne sera pas dérivable en x_0.

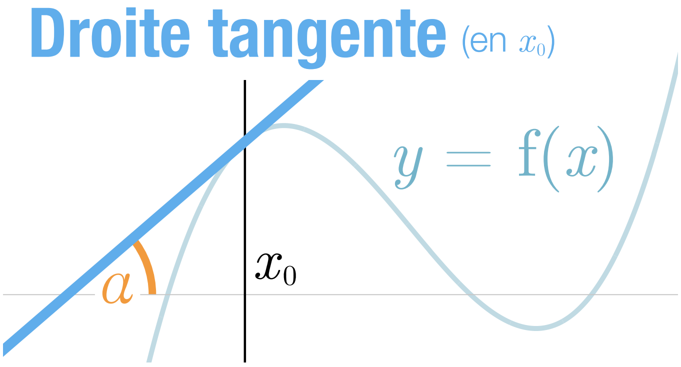
La réciproque est fausse : $f(x) = |x|$ est continue sur tout $\mathbb{R}$, mais pas dérivable en $x_0 = 0$.

DROITE TANGENTE À f EN x_0

La valeur de $f'(x_0)$ est la *pente* de la droite *tangente* à f au point $\left(x_0,\ f(x)\right)$.

L'équation de cette droite est :

$$y - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{pente}}(x - x_0)$$



Rappel : la droite de pente m passant par le point $(x_0,\ y_0)$ a pour l'équation $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Si on ne connaît pas x_0 mais les coordonnées d'un autre point, on les substitue à x et y.

DIFFÉRENTIABILITÉ

Pour une fonction à une variable : f dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f$ **différentiable** en x_0.

On peut réécrire donc f de la manière suivante :

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{c^{\text{ste}}}_{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + r(x) \quad \text{où } \lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$$

DÉRIVÉES GAUCHE-DROITE

f est dérivable à gauche en $x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ existe. Elle est notée $f'_g(x_0)$.

f est dérivable à droite en $x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ existe. Elle est notée $f'_d(x_0)$.

Exemple : $f(x) = |x|,\ x_0 = 0$. $f'(x_0)$ n'existe pas, mais $f'_g(x_0) = -1$ et $f'_d(x_0) = +1$.

Donc f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow$ dérivable à gauche et à droite en x_0, et les deux sont identiques.

FONCTION DÉRIVÉE

Soit f dérivable en tout point d'un intervalle I. f est donc dite **dérivable sur** I.

On définit la **fonction dérivée** de f sur I :
$$\begin{aligned} f' : I &\to \mathbb{R} \\ x_0 &\mapsto \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \end{aligned}$$

📝 Pour les intervalles ouverts/fermés, cela fonctionne de même manière que la continuité.

Si f' est continue sur I, alors f est dite **continûment dérivable sur** I. Notation : $f \in C^1_I$

DÉRIVÉE INFINIE

Si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en x_0,

mais le graphe de f admet une **tangente verticale** en $x = x_0$.

DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR

$f : E \to F$ est n **fois dérivable** si elle admet une dérivée d'ordre n.

$f : E \to F$ est n **fois continûment dérivable** ($f \in C^n(E, F)$) si cette dérivée est continue.

Règles de calcul

OPÉRATIONS ALGÉBRIQUES

Soient f et g deux fonctions dérivables en $x = x_0$.

- **Somme** $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- **Produit** $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x) \cdot g'(x_0)$
- **Quotient** $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ si $g(x) \neq 0$ dans un voisinage de x_0

COMPOSITION

Soient $f : E \to F$ dérivable en $x_0 \in E$, et $g : G \to H$, $f(E) \subset G$ dérivable en $f(x_0)$.

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0)$$

FONCTION RÉCIPROQUE

Soit $f : I \to F$ une fonction bijective, continue sur I et dérivable en x_0 telle que $f'(x_0) \neq 0$.

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

DÉRIVÉE LOGARITHMIQUE

$$\left(a(x)^{b(x)}\right)' = a(x)^{b(x)} \cdot \left(\log a(x)^{b(x)}\right)'$$

Fonctions hyperboliques

DÉFINITIONS

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

PROPRIÉTÉS

- $\sinh'(x) = \cosh(x)$ et $\cosh'(x) = \sinh(x)$.
- $\sinh(x) : \mathbb{R} \hookrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante, et $\cosh(x) : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty[$ est surjective
- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

FONCTIONS RÉCIPROQUES

$\operatorname{arccosh}(x)$ et $\operatorname{arcsinh}(x)$ sont les fonctions réciproques de $\cosh(x)$ et $\sinh(x)$.

$$\operatorname{arcsinh}(\mathrm{x}) := \sinh^{-1}(x)$$

$$\operatorname{arccosh}(\mathrm{x}) := \cosh^{-1}(x)$$

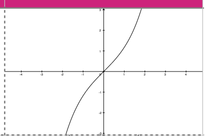
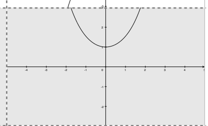
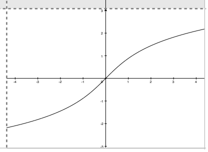
où $\cosh(x)$ est restreint sur $\mathbb{R}_+$ afin d'avoir une bijection

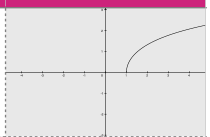
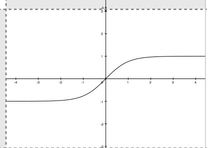
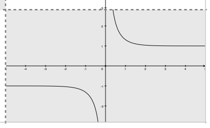
TANGENTE ET COTANGENTE HYPERBOLIQUES

$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

$$\coth(x) := \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}, x \neq 0$$

GRAPHES

	Ensembles de départ/arrivée	Graphe
$\sinh(x)$	$\mathbb{R} \hookrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{R}$ croissante	
$\cosh(x)$	$\mathbb{R} \rightarrow [1; \infty[$	
$\operatorname{arcsinh}(x)$	$\mathbb{R} \hookrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{R}$ croissante	

	Ensembles de départ/arrivée	Graphe
$\operatorname{arccosh}(x)$	$[1; \infty[\hookrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{R}_+$ croissante	
$\tanh(x)$	$\mathbb{R} \hookrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow \underbrace{]-1; 1[}_{\lvert x\rvert < 1}$	
$\coth(x)$	$\mathbb{R}^* \hookrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow \underbrace{]-\infty; -1[\cup]1; \infty[}_{\lvert x\rvert > 1}$	

Théorème des accroissements finis et théorème de Rolle

THÉORÈME DE ROLLE

✨ Cas le plus simple du TAF : « corde suspendue entre deux clous à la même hauteur »

PROPOSITION : DÉRIVÉE AUX EXTREMA

Soit $f : E \to F$ *dérivable* en $x_0 \in E$. Si x_0 est un **extremum local** de f, alors $f'(x_0) = 0$.

THÉORÈME DE ROLLE

Soit $f : [a, b] \to F$ **continue** et **dérivable** sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$.

Alors il existe (au moins) un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

AVEC DES LIMITES INFINIES

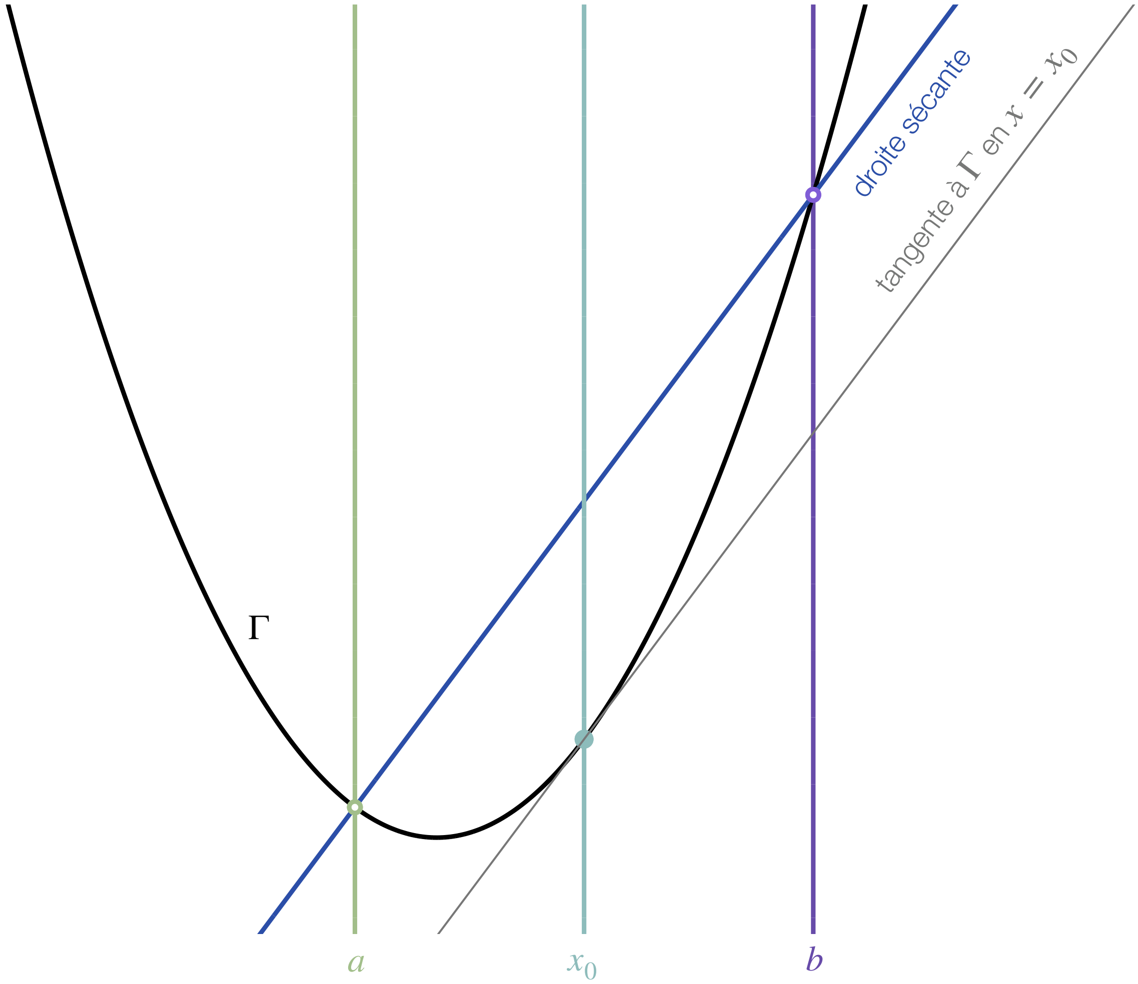
Le théorème est aussi valable pour $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = \pm \infty$.

THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS

f est une fonction **continue** sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et **dérivable** sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Soit m_s la pente de la sécante entre $\big(a, f(a)\big)$ et $\big(b, f(b)\big)$ ($m_s = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$).

Il existe (au moins) un point $x_0 \in]a, b[$ où la droite tangente au graphe de f en $\big(x_0, f(x_0)\big)$ a la même pente que m_s ($f'(x_0) = m_s$).



COROLLAIRE : FONCTION CONSTANTE

Toute fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f'(x) = 0 \ \forall x$ est **constante.**

COROLLAIRE : FONCTIONS À DÉRIVÉE IDENTIQUE

Si $\begin{array}{c} f, g : [a, b] \to \mathbb{R} \\ \text{dérivables sur }]a, b[\end{array}$ sont telles que $f'(x) = g'(x) \ \forall x \in]a, b[$, alors $f(x) = g(x) + \underset{\in \mathbb{R}}{\alpha}$.

COROLLAIRE : MONOTONIE

$\forall x \in]a, b[: \begin{array}{c} f'(x) \geq 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{array} \Leftrightarrow f$ est $\begin{array}{l} \textbf{croissante} \\ \textbf{décroissante} \end{array}$.

$\forall x \in]a, b[: \begin{array}{c} f'(x) > 0 \\ f'(x) < 0 \end{array} \Rightarrow f$ est $\begin{array}{l} \textbf{strictement croissante} \\ \textbf{strictement décroissante} \end{array}$.

T.A.F. GÉNÉRALISÉ

Pour $\begin{array}{c} f, g : [a, b] \to \mathbb{R} \\ \text{dérivables sur }]a, b[\end{array}$, on a un $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

RÈGLE DE BERNOULLI-L'HÔPITAL

FORME POUR LES DÉMONSTRATIONS

Soient $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ dérivables partout.

- Voisinage non nul pour le dénominateur
  $g(x)$ et $g'(x) \neq 0$ sur $]a, b[$,
- En haut et en bas $\to 0$ ou ∞
  $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) \in \{\pm\infty, 0\}$
- $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ est réel ou infini

  (⚠️ Le rapport peut ne pas exister pour une limite qui existe)

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Le même théorème existe pour les limites lorsque $x \to b^-$ ou $x \to \pm\infty$.

RÈGLE DE CALCUL (PLUS PRATIQUE)

Soit f et g définies et dérivables sur un voisinage pointé de x_0, telles que :

- $g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$
  sur le voisinage pointé
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \begin{cases} 0 \\ \pm\infty \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ est réel ou infini

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Développements limités et formule de Taylor

DÉVELOPPEMENT LIMITÉ

$f : E \to F$ définie au voisinage de x_0 admet un

développement limité d'ordre n autour de $x = x_0$

s'il existe $a_0, \ \dots, \ a_n \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon(x), \ \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ tels que :

$$\forall x \in E, \ f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n}_{\text{partie principale } P_n(f)} + \underbrace{\varepsilon(x) \cdot (x - x_0)^n}_{\text{reste } R_n(f)}$$

Lorsqu'un développement limité existe, il est **unique.**

FORMULE DE TAYLOR

Cette formule permet d'avoir le D.L. de $f \in C^n(I)$.

Pour tout x, il existe un u entre x_0 et x tel que :

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{\text{polynôme de Taylor } P_n(f)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{\text{reste } R_n(f)}$$

Si $x_0 = 0$, cette formule s'appelle **formule de MacLaurin.**

EXTREMUMS

Soit $f : I \to F$ une fonction dérivable $2k$ fois,

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) = 0 \\ \vdots \\ f^{(2k-1)}(x_0) = 0 \\ f^{(2k)}(x_0) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^{(2k)}(x_0) > 0 : \text{minimum local en } x = x_0 \\ f^{(2k)}(x_0) < 0 : \text{maximum local en } x = x_0 \end{cases}.$$

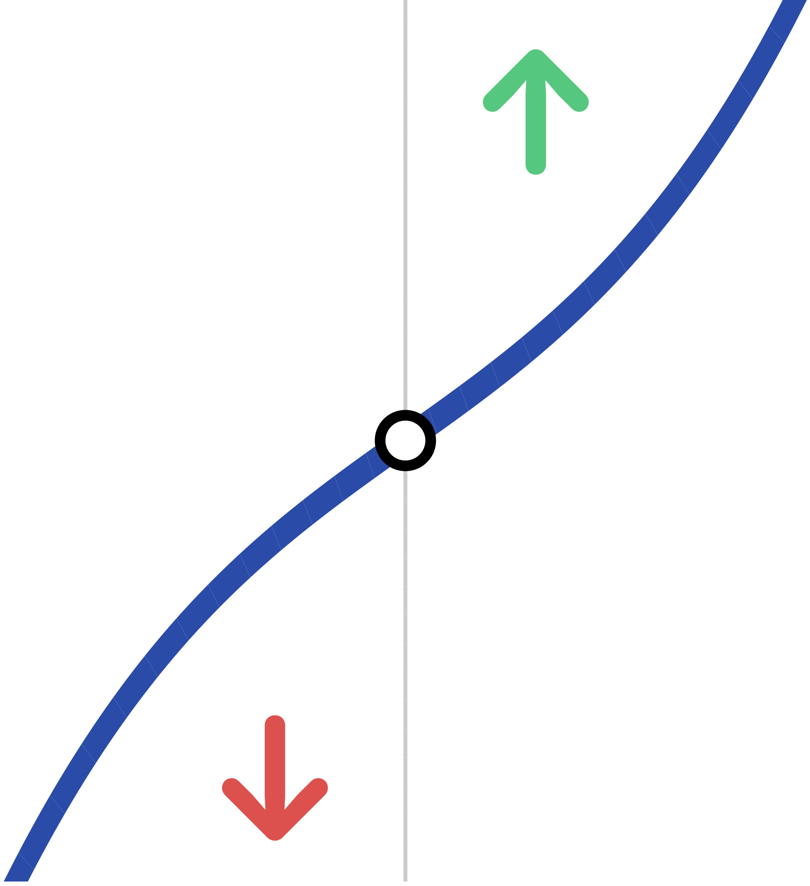
POINTS D’INFLEXION

Soit f deux fois dérivable sur I.

- Si $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in I$,
  f est ↑ **convexe** sur I
- Si $f''(x) \leq 0 \ \forall x \in I$,
  f est ↓ **concave** sur I.

Les points du graphe de f où la concavité change (où f'' change de signe) sont appelés **O points d’inflexion.**

📝 Un point d’inflexion peut aussi exister si $f''(x)$ n’existe que dans un voisinage *pointé* de x_0 (mais la fonction doit dans tous les cas être continue).



CONDITION SUFFISANTE

$$\begin{cases} f''(x_0) = 0 \\ \vdots \\ f^{(2k)}(x_0) = 0 \\ f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{le point } (x_0,\ f(x_0)) \text{ est un point d'inflexion de } f.$$

OPÉRATIONS ALGÉBRIQUES SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

COMBINAISONS LINÉAIRES

$$\boxed{P^n_{\alpha f(x)+\beta g(x)} = \alpha P^n_{f(x)} + \beta P^n_{g(x)}}$$

PRODUITS

$$\boxed{P^n_{f(x)\cdot g(x)} = P^n_{f(x)} \cdot P^n_{g(x)}}$$

On ne garde que les termes de degré $\leq n$.

DIVISIONS

Si $g(x) \neq 0$ sur E et $b_0 \neq 0$ (polynôme non nul au voisinage de zéro), alors

$$\boxed{P^n_{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{P^n_{f(x)}}{P^n_{g(x)}}}$$

On peut utiliser la division par puissance croissante pour diviser les deux polynômes.

COMPOSITION

Soient $\begin{array}{l} f(x) = a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x),\ f(0) = 0 \\ g(x) = g(0) + b_1 y + \ldots + b_n y^n + y^n \varepsilon_2(y) \text{ (autour de } 0) \end{array}.$

Développement limité de $g \circ f$ à l’ordre n autour de $x = x_0$: (on ne garde que les termes $\leq n$)

$$\boxed{P^n_{g\circ f}(x) = g(0) + b_1\left(P^n_f(x-a)\right) + b_2\left(P^n_f(x-a)\right)^2 + \ldots + +b_2\left(P^n_f(x-a)\right)^n}$$

Séries entières

DÉFINITIONS

Une **série entière** est une série de la forme :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k, \quad \text{avec } a_k \in \mathbb{R}\ \forall k \in \mathbb{N}$$

DOMAINE DE CONVERGENCE

Le domaine de convergence est l'intervalle dans lequel la série entière converge (et converge absolument). À l'extérieur de ses bornes, la série diverge.

$$D \overset{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \text{ converge (absolument)} \right\}$$

Une série entière est **continûment dérivable** sur D (si D n'est pas un point).

RAYON DE CONVERGENCE

D est un intervalle du type $]x_0 - r,\ x_0 + r[$, où $r \in [0,\ +\infty]$ est le **rayon de convergence**.

La convergence aux bornes est étudiée séparément.

Pour déterminer r, on peut utiliser le critère de d'Alembert ou de Cauchy (où a_k est le facteur) :

THÉORÈME DE D'ALEMBERT

$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|} \in [0,\ +\infty]$$

THÉORÈME DE CAUCHY

$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|a_k|^{\frac{1}{k}}} \in [0,\ +\infty]$$

SÉRIE DE TAYLOR ET MACLAURIN

Soit $F : I \to \mathbb{R}\ \in C^{\infty}(I,\ \mathbb{R})$ (indéfiniment dérivable), et $x_0 \in I$.

SÉRIE DE TAYLOR

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

SÉRIE DE MACLAURIN

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

ENSEMBLE E

$$E = \{x \mid \text{la série converge en } x \text{ vers la fonction}\}$$

Pour calculer E, on calcule lorsque la limite du reste (en u) vaut zéro.

DÉRIVÉES ET PRIMITIVES

PRIMITIVE

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

$F : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une **primitive** de f sur $[a, b]$ si $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$.

Deux primitives de f ont une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ de différence.

PRIMITIVE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

La primitive de $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$ telle que $f(0) = 0$ est $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1}$.

Sa dérivée est $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot k(x - x_0)^{k-1}$.

Une série entière et sa primitive (ou dérivée) ont le **même rayon de convergence**.

SÉRIES ENTIÈRES À CONNAÎTRE

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots +$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \quad \forall x \in]0, 2]$$

$$\frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k \quad \forall x \in]0, 2[$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - n + 1)}{n!} x^n$$

Calcul intégral

Intégrale définie

SOMMES DE DARBOUX

Soit f continue sur $\underset{a<b}{[a,\, b]}$. On aimerait déterminer l'aire sous $f(x)$ entre $x = a$ et $x = b$.

Cette aire serait analytique, ce qui veut dire que si $f(x) < 0$, alors l'aire est négative.

Pour ce faire, on fait une subdivision σ de $[a,\, b]$ en n intervalles $\left[x_{k-1},\, x_k\right]$ $(1 \leq k \leq n)$.

Cela nous permet de découper le domaine en n rectangles.

- Chaque intervalle a une **longueur** $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, qui est la **largeur** du rectangle.
- Pour chaque intervalle, on choisit de manière arbitraire une abscisse t_k dans l'intervalle, et $f(t_k)$ est la **hauteur** du rectangle.

Alors une approximation de l'aire est données par les sommes de Darboux :

SOMME DE DARBOUX INFÉRIEURE

$$\overline{S}_\sigma(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k$$

où m_k est le f le plus petit sur l'intervalle

SOMME DE DARBOUX SUPÉRIEURE

$$\underline{S}_\sigma(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k$$

où M_k est le f le plus grand sur l'intervalle

Ces sommes dépendent toujours de la partition choisie.

INÉGALITÉ : PRÉCISION DE LA SUBDIVISION

Avec une subdivision σ_2 avec plus de points que σ_1 $(\sigma_1 \subset \sigma_2)$, on a :

$$m(b-a) \leq \underline{S}_{\sigma_1}(f) \leq \underline{S}_{\sigma_2}(f) \leq \overline{S}_{\sigma_2}(f) \leq \overline{S}_{\sigma_1}(f) \leq M(b-a)$$

où m est le minimum de f sur $[a,\, b]$ et M le maximum.

INTÉGRALE DE RIEMANN

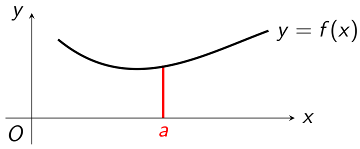
$$\int_a^b f(x)\,dx \begin{aligned} &= \inf\{\overline{S}(f)\,|\,\sigma \text{ de } [a,\, b]\} \\ &= \sup\{\underline{S}(f)\,|\,\sigma \text{ de } [a,\, b]\} \\ &= \underline{S}_\sigma(f) = \overline{S}_\sigma(f), \text{ avec } \mathscr{P}(\sigma) \to \infty \end{aligned} \qquad \text{si } f \text{ est continue sur } [a,\, b].$$

C'est l'intégrale de Riemann de f sur $[a,\, b]$ (bornes), avec la variable d'intégration x..
Elle vaut alors l'aire analytique recherchée.

PROPRIÉTÉS

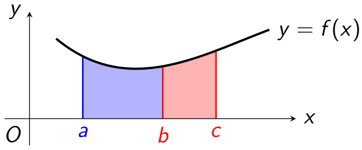
Abscisses identiques

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$



“Escale”

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$



Opposé

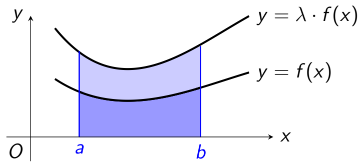
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Somme

$$\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Amplification scalaire

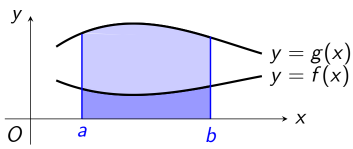
$$\int_a^b \left[\lambda \cdot f(x)\right]\,dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$



Comparaison

Si $a < b$ et $\forall x \in [a, b],\quad f(x) \leq g(x)$,

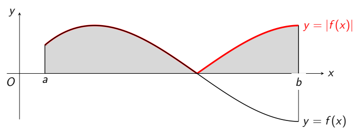
alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; \int_a^b g(x)\,dx$



⚠️ **La réciproque est fausse !**

Valeur absolue

Si $a < b$, $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \;\leq\; \int_a^b |f(x)|\,dx$



Fonction paire

Si f est paire sur $[-a,\ a]$, $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)\,dx$

Fonction impaire

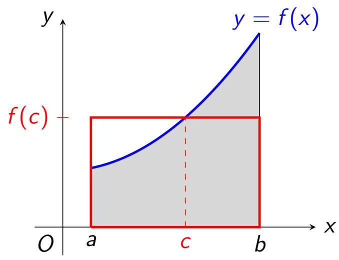
Si f est impaire sur $[-a,\ a]$, $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$

Théorème fondamental du calcul intégral

THÉORÈME DE LA MOYENNE DU CALCUL INTÉGRAL

Soit f continue sur $[a, b]$, $a < b$.

$$\exists c \in [a, b] \text{ tel que } \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(c)$$



FONCTION-AIRE

Soit f continue sur $[a, b]$.

La **fonction-aire** A **associée à** f est :

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in [a, b]$$

$A(x)$ est l'aire sous le graphe de f entre a et x.

DÉRIVÉE DE LA FONCTION-AIRE (THÉORÈME FONDAMENTAL DU CALCUL INTÉGRAL)

A est dérivable sur $[a,\ b]$, et sa fonction dérivée est $f(x)$.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

PRIMITIVES

Soit f définie sur I. On appelle **primitive de** f **sur** I une fonction F telle que $f(x) = F'(x)$, $\forall x \in I$.

THÉORÈME DU LIEN ENTRE LES PRIMITIVES

Toutes les primitives d'une fonction f ne sont différentes que d'une constante réelle.

Elles sont donc de la forme $F(x) + C$, où F est une primitive de f et C une constante.

CALCUL D'INTÉGRALES DÉFINIES PAR LES PRIMITIVES

Soit f, et F une primitive de f sur $[a,\ b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

DÉRIVÉE D'UNE INTÉGRALE QUELCONQUE

On peut ainsi obtenir la dérivée d'une intégrale quelconque.

Par exemple : $f(x) = \int_a^b g(t)\,dx$. On pose : « *$G(x)$ est une primitive quelconque de $g(x)$* »,

donc $f(x) = G(b) - G(a)$ et $f'(x) = G'(b) - G'(a) = g(b) - g(a)$.

Intégrale indéfinie

DÉFINITION

L'intégrale indéfinie de f, notée $\int f(x)\,dx$, est l'ensemble de toutes les primitives de f sur D_f.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$ où $F(x)$ est une primitive particulière et C une constante arbitraire

PROPRIÉTÉS

Intégrale d'une dérivée $\quad \int F'(x)\,dx = F(x) + C$

Dérivée d'une intégrale $\quad \left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x)$

Somme $\quad \int \left[f(x) + g(x)\right]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

Amplification scalaire $\quad \int \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int f(x)\,dx$

RÈGLES D'INTÉGRATION

PUISSANCES

$$\int x^k \, dx = \begin{cases} \frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1} + C & \text{si } k \in \mathbb{R} \backslash \{-1\} \\ \ln|x| + C & \text{si } k = -1 \end{cases}$$

📝 $k < 0$: la fonction sera discontinue en $x = 0$.

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$\forall a \in \mathbb{R}$ $$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = \sqrt{x} + C$$

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

$$\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx = \int \left[1 + \tan^2(x)\right] \, dx = \tan(x) + C \quad (x \in D_{\tan})$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} \, dx = -\cot(x) + C \quad (x \in D_{\cot})$$

$$\int \frac{1}{1 + x^2} \, dx = \arctan(x) + C$$

FONCTIONS HYPERBOLIQUES

$$\int \cosh(x) \, dx = \sinh(x) + C$$

$$\int \sinh(x) \, dx = \cosh(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2(x)} \, dx = \int \left[1 - \tanh^2(x)\right] \, dx = \tanh(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2(x)} \, dx = -\coth(x) + C$$

$(x \in \mathbb{R}^*)$

$$\int \frac{1}{1 - x^2} \, dx = \operatorname{arctanh}(x) + C$$

$(x \in \left]-1, 1\right[)$

INTÉGRATION PAR PARTIES

$$\int \underset{\uparrow}{f(x)} \cdot \underset{\downarrow}{g(x)}\, dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\, dx$$

$$\int \underset{\downarrow}{f(x)} \cdot \underset{\uparrow}{g(x)}\, dx = f(x) \cdot G(x) - \int f'(x) \cdot G(x)\, dx$$

INTÉGRATION PAR CHANGEMENT DE VARIABLE

Le but est de poser $x = \varphi(t)$, où φ est une fonction bijective et de classe C^1, pour transformer l'intégrant en fonction de x en un intégrant en fonction de t plus facile à intégrer.

FORMULE GÉNÉRALE

$$\int f(x)\, dx = \int f\underbrace{\left(\varphi(t)\right)}_{x} \cdot \underbrace{\varphi'(t)\, dt}_{dx}$$

On doit poser :

- t en fonction de x (on choisit $t = \ldots(x)$) ;
- les intervalles de x et t ;
- x en fonction de t (se baser sur la première ligne) ;
- $dx = \left[\dfrac{d}{dt}x\right] dt$ (se baser sur la ligne du dessus).

Ensuite :

- On remplace ce qui est en fonction de x par ce qui est en fonction de t
- On intègre en fonction de t.
- À la fin, on remplace t par son expression en fonction de x.

CHANGEMENTS DE VARIABLE USUELS

De la forme $\sqrt{1-x^2}$

on se base sur $\cos^2(t)+\sin^2(t)=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\sin(t),\ x\in[-1,\ 1] \\ t=\arcsin(x),\ t\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right] \\ dx=\cos(t)\,dt \\ \sqrt{1-x^2}=\cos(t) \end{cases} \quad \textit{ou} \quad \begin{cases} x=\cos(t),\ x\in[-1,\ 1] \\ t=\arccos(x),\ t\in[0,\ \pi] \\ dx=-\sin(t)\,dt \\ \sqrt{1-x^2}=\sin(t) \end{cases}$$

De la forme $\sqrt{x^2+1}$

on se base sur $\cosh^2(t)-\sinh^2(t)=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\sinh(t),\ x\in\mathbb{R} \\ t=\operatorname{arcsinh}(x),\ t\in\mathbb{R} \\ dx=\cosh(t)\,dt \\ \sqrt{1+x^2}=\cosh(t) \end{cases}$$

De la forme $\sqrt{x^2-1}$

on se base sur $\cosh^2(t)-\sinh^2(t)=1$

$\Rightarrow$ Pour $x\geq 1$
$$\begin{cases} x=\cosh(t),\ x\geq 1 \\ t\geq 0 \\ dx=\sinh(t)\,dt \\ \sqrt{x^2-1}=\sinh(t) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Pour $x\leq -1$
$$\begin{cases} x=-\cosh(t),\ x\leq -1 \\ t\geq 0 \\ dx=-\sinh(t)\,dt \\ \sqrt{x^2-1}=\sinh(t) \end{cases}$$

RACINES DE POLYNÔMES DU DEUXIÈME DEGRÉ

Si on a une expression du type $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{P_2(x)},\ a\neq 0$, on peut l'intégrer en la ramenant à l'un des trois cas usuels, en fonction de $\operatorname{sgn}(a)$ et du discriminant Δ de P_2.

INTÉGRATION DES FONCTIONS RATIONNELLES

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = ?$$

- Division euclidienne (avec reste) pour que $\deg(P) < \deg(Q)$
- Décomposition de Q en facteurs irréductibles Q doit être normalisé.
- **Facteurs irréductibles du dénominateur → éléments simples dans l'intégrant**
  - Chaque facteur du **premier degré** de la forme $(x-a)^n$ est remplacé dans l'intégrant par un **élément simple de première espèce** :
    $$\frac{a}{x-\alpha} + \ldots + \frac{z}{(x-\alpha)^n} \qquad a,\ \ldots,\ z \in \mathbb{R}$$
  - Chaque facteur du **deuxième degré** de la forme $(x^2+2a+\beta)^n$ est remplacé dans l'intégrant par un **élément simple de deuxième espèce** :
    $$\frac{bx+c}{x^2+2\alpha x+\beta} + \ldots + \frac{yx+z}{(x^2+2\alpha x+\beta)^n} \qquad b,\ c,\ \ldots,\ y,\ z \in \mathbb{R}$$
- **Détermination des facteurs a, b, c…**
  - **Méthode par identification**
    - Mettre tous les termes sous une seule barre de fraction, et mettre en évidence les puissances de x.
    - Ensuite, comparer les coefficients devant les puissances de x et ceux devant la forme originale, et résoudre le système d'équation qui s'en suit.
  - **Méthode par évaluation**
    - Multiplier les deux formes *(originale et éléments simples)* par un polynôme, puis évaluer en une certaine valeur de x de façon à isoler un facteur.
- **Intégration des éléments simples**
  - **Éléments simples de première espèce**
    $$\int \frac{a}{(x-\alpha)^n}\,dx = \begin{cases} a\cdot\ln|x-\alpha| & +C \quad \text{si } n=1 \\ -\dfrac{a}{x-\alpha} & +C \quad \text{si } n=2 \\ -\dfrac{a}{n-1}\cdot\dfrac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} & +C \quad \text{si } n\geq 2 \end{cases} \qquad (x\neq\alpha)$$
  - **Éléments simples de deuxième espèce**
    $$\int \frac{px+q}{x^2+2ax+b}\,dx = ?$$
    - Faire apparaître la dérivée d'un logarithme…
      $$= \frac{p}{2}\cdot\underbrace{\int \frac{u'}{u}\,dx}_{\ln(u)} + \ldots$$
    - …puis le reste sera sous la forme dérivée de arc tangente.
      $$\ldots = \lambda\cdot\int\frac{1}{u^2+1}\,dx = \lambda\cdot\arctan(u) + C$$

Intégrales généralisées

DISCONTINUITÉS SUR UN INTERVALLE BORNÉ

Soit $\underset{a<b}{f : [a, b[} \to \mathbb{R}$ continue.

$$\int_a^{b^-} f(t)\,dt \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,dt$$

On définit d'une manière équivalente la **discontinuité à la borne inférieure** « $\int_{a^+}^{b}$ ».

On a aussi « $\int_{a^+}^{c^-} = \int_{a^+}^{b} + \int_{b}^{c^-}$ », qui converge ssi les deux intégrales généralisées convergent.

CRITÈRE DE COMPARAISON (INTERVALLES BORNÉS)

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ continues telles qu'à partir d'un $c \in]a, b[$, $0 \le f(x) \le g(x)$. Alors :

- Si $\int_a^{b^-} g(x)\,dx$ (grande) converge, alors $\int_a^{b^-} f(x)\,dx$ (petite) converge également.
- Si $\int_a^{b^-} f(x)\,dx$ (petite) diverge, alors $\int_a^{b^-} g(x)\,dx$ (grande) diverge également.

Un critère similaire existe pour $f, g :]a, b]$ continues.

CRITÈRE DE CONVERGENCE

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$.

(Critère similaire avec $]a, b]$ et $\cdot\,(x-a)^\alpha$ pour $\int_{a^+}^{b}$)

$$\lim_{x\to b^-} f(x)\cdot (x-b)^\alpha = \ell \in \mathbb{R}^* \quad\Rightarrow\quad \int_a^{b^-} f(x)\,dx \begin{cases} \text{converge} & \text{si } \alpha < 1 \\ \text{diverge} & \text{si } \alpha \ge 1 \end{cases}$$

INTÉGRALES SUR UN INTERVALLE NON-BORNÉ

DÉFINITION

Soit $f : [a, +\infty[$ continue.

$$\int_a^{\infty} f(t)\,dt \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(x)\,dx$$

Soit $f :]-\infty, a]$ continue.

$$\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(x)\,dx$$

Ces intégrales **convergent** si et seulement si la limite existe.

CRITÈRE DE COMPARAISON (→ +∞)

Soient $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continues telles qu'à partir d'un $c > A$, $0 \le f(x) \le g(x)$. Alors :

- Si $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ (grande) converge, alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ (petite) converge également.
- Si $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ (petite) diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ (grande) diverge également.

CRITÈRE DE CONVERGENCE (→ ±∞)

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$.

(Critère similaire avec $]a, b]$ et $\cdot\,(x-a)^\alpha$ pour $\int_{a^+}^{b}$)

$$\lim_{x\to b^-} f(x)\cdot x^\beta = \ell \in \mathbb{R}^* \quad\Rightarrow\quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \begin{cases} \text{converge} & \text{si } \beta > 1 \\ \text{diverge} & \text{si } \beta \le 1 \end{cases}$$

CONVERGENCE FONCTIONS INVERSES

Par le critère de convergence, on obtient :

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\beta} = \begin{cases} \frac{1}{\beta - 1} & \text{si } \beta > 1 \\ \text{divergente} & \text{si } \beta \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_{0^+}^{1} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1 - \alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ \text{divergente} & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

APPLICATION À LA CONVERGENCE DES SÉRIES

Soit $f \geq 0$ une fonction **continue** et **strictement décroissante** à partir de $x_0 \geq 1$. Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \text{ et } \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ convergent/divergent en même temps.}$$

Rappel : classes de régularité des fonctions

Analytique — $f(x) =$ sa série de Taylor sur I ouvert

$\Rightarrow$ **Infiniment dérivable** — $f \in C^{\infty}(I, \mathbb{R})$

$\Rightarrow$ **n fois continûment dérivable** — $f \in C^{n}(I, \mathbb{R})$

$\Rightarrow$ **n fois dérivable** — $f^{(n)}(x)$ existe sur I

$\Rightarrow$ **Dérivable** — $f'(x)$ existe sur I

✦ **TAF** : $\exists c \in \underbrace{]a, b[}_{\subset I}$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$

$\Rightarrow$ **Continue** — $\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \forall a \in I$

✦ **TVI** : $f\big(\underbrace{[a, b]}_{\subset I}\big) = \left[\min_{[a,b]} f(x),\ \max_{[a,b]} f(x)\right]$

✦ **Th. moyenne** : $\exists c \in \underbrace{[a, b]}_{\subset I}$ tel que $f(c) \cdot (b - a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

$\Rightarrow$ **Intégrable sur I** — $\int_I f(x)\,dx$ existe

(y. c. intégrales généralisées)