Enseignement des mathématiques

Analyse

Recueil d'exercices et aide-mémoire vol. 1

Jacques Douchet

Troisième édition revue et augmentée

Presses polytechniques et universitaires romandes

Analyse

Enseignement des mathématiques

Analyse

Recueil d'exercices et aide-mémoire vol. 1

Troisième édition revue et augmentée

Jacques Douchet

Presses polytechniques et universitaires romandes

L'auteur et l'éditeur remercient l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne dont le soutien financier a rendu possible la publication de cet ouvrage.

La collection «enseignement des mathématiques» est publiée
sous la direction du professeur R. Dalang

Analyse
Receuil d'exercices et aide-mémoire vol. 2
Jacques Douchet

Calcul différentiel et intégral
Jacques Douchet et Bruno Zwahlen
Fonctions réelles d'une ou de plusieurs variables réelles

Introduction à l'analyse numérique
Jacques Rappaz et Marco Picasso

Algèbre linéaire
Aide-mémoire, exercices et applications
Robert C. Dalang et Amel Chaabouni

Analyse avancée pour ingénieurs
Bernard Dacorogna, Chiara Tanteri

Initiation aux probabilités
Sheldon M. Ross

Cours d'Analyse
Srishti D. Chatterji
1 Analyse vectorielle
2 Analyse complexe
3 Equations différentielles

Introduction à la statistique
Stephan Morgenthaler

Aide-mémoire d'analyse
Heinrich Matzinger

Les Presses polytechniques et universitaires romandes sont une fondation scientifique dont le but est principalement la diffusion des travaux de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne ainsi que d'autres universités et écolesd'ingénieurs francophones.
Le catalogue de leurs publications peut être obtenu par courrier aux Presses polytechniques et universitaires romandes,
EPFL – Rolex Learning Center, CH-1015 Lausanne, par E-Mail à ppur@epfl.ch,
par téléphone au (0)21 693 41 40, ou par fax au (0)21 693 40 27.

www.ppur.org

Troisième édition revue et augmentée
ISBN 978-2-88074-892-0

Introduction

Ce recueil de 1 571 exercices est destiné en premier lieu aux étudiants du premier cycle universitaire qui suivent pour la première fois un cours d'analyse (calcul différentiel et intégral) concernant les fonctions réelles d'une variable réelle. Il s'adresse aussi à tous ceux qui s'intéressent ou veulent approfondir l'un ou l'autre des sujets traités.

Le contenu de ce livre correspond au cours d'analyse que l'auteur enseigne, depuis plusieurs années, aux étudiants du premier semestre de différentes sections de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL). Le choix des exercices sert aussi bien à vérifier du degré d'acquisition par l'étudiant de la théorie que de son habilité à les résoudre. Il est bon de rappeler ici que le meilleur moyen de devenir familier avec l'analyse est de résoudre un maximum d'exercices. Et plus on en résout, plus on a de la chance de pouvoir les résoudre. On acquiert ainsi un savoir-faire dont l'intuition, élément indispensable en mathématique, ne devrait pas être absente.

D'un point de vue pratique, ce livre contient 9 chapitres qui sont divisés chacun en deux parties.

1) La première partie est un rappel non exhaustif de toutes les principales définitions et tous les principaux résultats qu'il faut connaître sur le sujet traité. Les propositions sont énoncées avec précision mais sans leur démonstration. Les exemples donnés doivent être connus, car ils reviennent en permanence dans les exercices.

2) La deuxième partie est un recueil d'exercices concernant le sujet traité. Pour les résoudre, une bonne connaissance des définitions, propositions et exemples donnés dans la première partie sont exigés de la part de l'étudiant. C'est pourquoi une bonne assimilation de la théorie est nécessaire, mais malheureusement pas forcément suffisante, pour arriver à résoudre tous les exercices. Pour certains d'entre eux, la connaissance des chapitres précédents est parfois nécessaire. Pour chaque exercice, un corrigé est donné à la fin du livre. Chaque corrigé est fait en fonction de la difficulté de l'exercice. Les exercices difficiles s'adressent plus particulièrement aux étudiants des sections mathématique et physique.

A la fin du livre, un formulaire est donné. Le contenu de ce formulaire devrait permettre de résoudre tous les exercices sans avoir recours à une aide extérieure. Néanmoins, il est vivement recommandé de se familiariser avec les différents logiciels mathématiques proposés sur le marché pour résoudre les exercices qui s'y prêtent, après, bien sûr, avoir essayé de les résoudre par soi-même.

Pour ceux qui s'intéressent aux démonstrations, je recommande comme livre de référence : Jacques Douchet et Bruno Zwahlen *Calcul différentiel et intégral*, Presses polytechniques et universitaires romandes (PPUR).

Enfin, n'étant pas propriétaire des exercices contenus dans ce livre, j'encourage tous mes collègues à les utiliser à bon escient et sans restriction, ainsi que d'en faire profiter pleinement leurs étudiants.

Finalement, je souhaite à tous les étudiants beaucoup de plaisir à faire les exercices proposés et rappelle que ce n'est qu'en persévérant que l'on arrive à ses fins.

Remerciements

Je tiens à remercier ici toutes les personnes qui m'ont aidé à la réalisation de ce livre. En particulier, Văn Duọc Lê qui a relu le manuscrit et qui s'est occupé de l'importante partie informatique. Mes remerciements vont aussi à Victoria Rezzonico pour les dessins, à Marie-France De Carmine pour son aide et ses remarques judicieuses ainsi qu'aux Presses polytechniques et universitaires romandes (PPUR) qui ont accepté de publier ce livre en faisant preuve d'un grand professionnalisme.

Jacques Douchet

Table des matières

Solutions des exercices

Chapitre 1

Nombres réels

1.1 Introduction

On désigne par $\emptyset$ l'***ensemble vide***, $\mathbb{N}$ l'ensemble des ***entiers naturels*** $\{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{Z}$ l'***anneau des entiers relatifs*** $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{Q}$ le corps des ***nombres rationnels*** $\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$ et $\mathbb{R}$ le corps des ***nombres réels***. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ étant l'ensemble des ***nombres irrationnels***. On a alors les inclusions suivantes :

$$\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}\,.$$

Par définition, on pose

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}\,, \quad \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}\,, \quad \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}\,, \quad \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

1.2 Propriétés

Proposition 1.1 *$\mathbb{R}$ est **archimédien**. Autrement dit, $\mathbb{R}$ satisfait l'**axiome d'Archimède**, à savoir : $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$, $\exists\ n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nx > y$.*

Proposition 1.2 *Entre deux nombres réels distincts, il existe une infinité d'irrationnels.*

Proposition 1.3 *Entre deux nombres réels distincts, il existe une infinité de rationnels.*

1.3 Intervalle

Définition 1.4 Un sous-ensemble $I \neq \emptyset$ de $\mathbb{R}$ est appelé un ***intervalle*** si pour tout couple $(a, b) \in I \times I$ vérifiant $a \leq b$, la relation $a \leq x \leq b$ implique $x \in I$.

1.3.1 Intervalles bornés

Intervalle ouvert

$$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Intervalle fermé

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Intervalle semi-ouvert à gauche

$$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

Intervalle semi-ouvert à droite

$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

1.3.2 Intervalles non bornés

Intervalles ouverts

$$\begin{aligned}]-\infty,a[&= \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \\ ]a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}. \end{aligned}$$

Intervalles fermés

$$\begin{aligned}]-\infty,a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \\ [a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}. \end{aligned}$$

Autres intervalles

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_- &=]-\infty,0] \\ \mathbb{R}_+ &= [0,+\infty[\\ \mathbb{R}_-^* &=]-\infty,0[\\ \mathbb{R}_+^* &=]0,+\infty[. \end{aligned}$$

1.4 Valeur absolue

Définition 1.5 A tout nombre réel x, on peut associer le nombre réel positif ou nul défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

$|x|$ est appelé la ***valeur absolue*** de x.

Propriétés

1) $$|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

2) $\forall\, a > 0$: $$|x| < a \Longleftrightarrow -a < x < a.$$

3) $\forall\, a > 0$: $$|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

4) $\forall\, a > 0$: $$|x| > a \Longleftrightarrow x < -a \text{ ou } x > a.$$

5) $\forall\, a > 0$: $$|x| \geq a \Longleftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a.$$

6) $$|xy| = |x|\,|y|\,.$$

7) Si $y \neq 0$, $$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}\,.$$

8) $$|x| \geq x \text{ et } |x| \geq -x.$$

9) ***Inégalité triangulaire***

$$|x + y| \leq |x| + |y|\,.$$

10) ***Inégalité triangulaire inverse***

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|\,.$$

Proposition 1.6 $\forall\, \varepsilon > 0 : |x| < \varepsilon \Rightarrow x = 0.$

1.5 Partie entière

Proposition 1.7 *A tout nombre réel x, on peut associer un unique entier relatif $[x]$ tel que*

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

$[x]$ est appelé la ***partie entière*** *de x. Autrement dit, $[x]$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.*

1.6 Minorant – Borne inférieure

Définition 1.8 On dit qu'un sous-ensemble $A \neq \emptyset$ de $\mathbb{R}$ est ***minoré*** s'il existe un élément $a \in \mathbb{R}$ tel que la relation $x \in A$ implique $x \geq a$. Le nombre réel a est appelé un ***minorant*** de A. Si A admet un minorant il en admet plusieurs. Parmi ceux-ci, il y en a un qui est le plus grand, que l'on appelle la ***borne inférieure*** de A et que l'on note $\inf A$. Caractérisation du minorant $\inf\, A$:

$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\ x_\varepsilon \in A \text{ tel que } x_\varepsilon < \inf A + \varepsilon.$$

Par convention : Si $A \neq \emptyset$ n'est pas minoré, on pose

$$\inf A = -\infty.$$

1.7 Majorant – Borne supérieure

Définition 1.9 On dit qu'un sous-ensemble $A \neq \emptyset$ de $\mathbb{R}$ est ***majoré*** s'il existe un élément $b \in \mathbb{R}$ tel que la relation $x \in A$ implique $x \leq b$. Le nombre réel b est appelé un ***majorant*** de A. Si A admet un majorant il en admet plusieurs. Parmi ceux-ci, il y en a un qui est le plus petit, que l'on appelle la ***borne supérieure*** de A et que l'on note $\sup A$. Caractérisation du majorant $\sup A$:

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists\ x_\varepsilon \in A \text{ tel que } \sup A - \varepsilon < x_\varepsilon\,.$$

Par convention : Si $A \neq \emptyset$ n'est pas majoré, on pose

$$\sup A = +\infty.$$

1.8 Sous-ensemble borné

Définition 1.10 Un sous-ensemble $A \neq \emptyset$ de $\mathbb{R}$ est dit ***borné***, s'il est à la fois minoré et majoré.

Proposition 1.11 *$A \neq \emptyset$ borné $\Longleftrightarrow \exists\ M > 0$ tel que $\forall\, x \in A : |x| < M$.*

1.9 Raisonnement par récurrence

Définition 1.12 Soit $P(n)$ une relation dépendant d'un entier $n \geq 0$, telle que $P(n_0)$ soit vraie et que pour tout entier $n \geq n_0$: $P(n)$ implique $P(n+1)$. Alors, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$. Dans la terminologie mathématique, le ***raisonnement par récurrence*** s'appelle aussi ***raisonnement par induction***.

1.10 Exercices

Résoudre

1.1 $\left(x^2-9\right)\left(x^4-8x\right)=0\,.$

1.2 $\sqrt{(x+3)^2-2x-5}-x^2=0\,.$

1.3 $\dfrac{x}{x-2} \geq \dfrac{x-1}{x+1}-1\,.$

1.4 Résoudre graphiquement :
$x-y \geq 0\,,\ 1x+y \leq 2$ et $y > 0$.

1.5 Résoudre graphiquement :
$x^2+y^2+2y \leq 3\,,\ x-y \geq 0$ et $x \leq 1$.

1.6 Trouver les entiers a, b et c de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(x-a)(x-10)+1=(x+b)(x+c)\,.$$

1.7 Vérifier que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \geq 1$:

$$x^n-y^n=(x-y)\left(x^{n-1}+x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2}+y^{n-1}\right).$$

En déduire la somme d'une ***progression géométrique***, à savoir pour tout réel $a \neq 1$ et tout entier $n \geq 1$:

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}\,.$$

1.8 Montrer que $2\,000^{2\,000} - 1$ est divisible par $1\,999$.

1.9 Calculer la somme

$$S = 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 100 \cdot 2^{100}\,.$$

1.10 1) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ (***binôme de Newton***) :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

2) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{N}^*$:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

et

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}\,.$$

3) Montrer que pour tout entier $n > 1$, l'équation $a^n + b^n = c^n$ n'admet aucune solution pour $a, b, c \in \mathbb{N}$ avec $0 < a$, $b < n$.

1.11 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

1.12 Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'expression $n^5 - n$ est divisible par 5.

1.13 1) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}\,.$$

2) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3\,.$$

1.14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et posons pour tout entier $p \geq 0$:

$$S_p = \sum_{k=0}^{n} k^p\,.$$

1) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$(n + 1)^p = \sum_{m=1}^{p} \binom{p}{m} S_{p-m}\,.$$

2) En déduire l'égalité

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

3) Calculer

$$\sum_{k=0}^{100} (k + 1)(3k + 2)\,.$$

1.15 Calculer

1) $\dfrac{1}{2 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 6} + \cdots + \dfrac{1}{48 \cdot 50}$.

2) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{49 \cdot 51}$.

1.16 Vérifier que pour $x \neq 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin \dfrac{nx}{2} \cos \dfrac{(n+1)\,x}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}}\,.$$

1.17 Vérifier que pour $x \neq 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin \dfrac{nx}{2} \sin \dfrac{(n+1)\,x}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}}\,.$$

1.18 Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ et $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Montrer l'***inégalité de Cauchy-Schwarz***, à savoir

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2\,.$$

En déduire que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2\,.$$

1.19 Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$. Trouver la valeur minimale de

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2$$

sachant que $x_1 + \cdots + x_n = 1$.

1.20 Soit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ dont le produit vaut 1. Montrer que

$$n \leq \sum_{k=1}^{n} x_k \,.$$

1.21 Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que leur ***moyenne harmonique*** est inférieure à leur ***moyenne géométrique*** qui est elle-même inférieure à leur ***moyenne arithmétique***. Autrement dit,

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \,.$$

1.22 Soit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \,.$$

1.23 Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $4\left(a^3 + b^3\right) \geq (a+b)^3$.

1.24 Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $9\left(a^3 + b^3 + c^3\right) \geq (a+b+c)^3$.

1.25 Trouver les valeurs extrêmes du produit xyz sous les conditions $x, y, z > 0$ et $xy + xz + yz = 3$.

1.26 Trouver les valeurs extrêmes de la somme $x + y + z$ sous les conditions $x, y, z > 0$ et $xy + xz + yz = 3$.

1.27 1) Pour $0 \leq x < y \leq 1$, trouver la valeur maximale de $xy^2 - x^2 y$.
2) Pour $0 \leq x < y < z \leq 1$, en déduire la valeur maximale de $xy^2 + x^2 z + yz^2 - xz^2 - x^2 y - y^2 z$.

1.28 1) Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2) Pour $x, y \in \mathbb{Q}$, résoudre

$$x + y\sqrt{2} = 6 \,.$$

1.29 Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$ vérifiant $x^5 + y^5 = 2x^2y^2$, le nombre $1 - xy$ est le carré d'un rationnel.

1.30 Montrer qu'entre deux irrationnels distincts, il y a une infinité de rationnels.

1.31 Montrer qu'entre deux rationnels distincts, il y a une infinité d'irrationnels.

1.32 Montrer l'existence et l'unicité de $[x]$.

1.33 Trouver $\sup\{0{,}1;\ 0{,}11;\ 0{,}111;\ \ldots\}$ et $\inf\{-0{,}1;\ -0{,}101;\ -0{,}10101;\ \ldots\}$.

1.34 Soit E un sous-ensemble non vide et borné de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup E = -\inf(-E) \,.$$

1.35 Montrer que

$$\sup\left\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\right\} = \sqrt{2} \,.$$

1.36 ***Théorème de Dedekind***. Soient E et F deux sous-ensembles disjoints non vides de $\mathbb{R}$ pour lesquels $E \cup F = \mathbb{R}$. De plus, on suppose que pour tout $x \in E$ et $y \in F$, on a $x < y$. Montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}$ tel que $x \in E$ et $y \in F$ impliquent $x \leq a \leq y$.

1.37 Soient I un intervalle, n un entier strictement supérieur à 1, $x_1, \ldots, x_n$ n éléments de I et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n éléments de $[0,1]$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in I \,.$$

1.38 Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Montrer qu'il n'existe aucune surjection entre E et $\mathcal{P}(E)$.

1.39 Soit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$. Trouver une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ pour laquelle la relation $n \notin f(m)$ implique $m \in f(n)$.

Chapitre 2

Suites numériques

2.1 Introduction

Une ***suite numérique*** est une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, qui, à tout entier naturel n, fait correspondre le nombre réel $f(n)$. On pose $x_n = f(n)$ et on désigne la suite (numérique) par (x_n).

2.2 Suites bornées

Définition 2.1 Une suite (x_n) est dite ***minorée***, s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $n \in \mathbb{N}$ implique $a \leq x_n$.

Définition 2.2 Une suite (x_n) est dite ***majorée***, s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $n \in \mathbb{N}$ implique $x_n \leq b$.

Définition 2.3 Une suite (x_n) minorée et majorée est dite ***bornée***.

Proposition 2.4 *(x_n) bornée $\Longleftrightarrow \exists\, c > 0$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq c$.*

2.3 Limite d'une suite

Définition 2.5 Une suite (x_n) est dite ***convergente*** et admet pour ***limite*** $x \in \mathbb{R}$ ou tout simplement que (x_n) converge vers x , si à tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on peut associer $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_\varepsilon$ implique $|x_n - x| \leq \varepsilon$. On écrit alors,

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x.$$

Lorsque la limite d'une suite existe, elle est unique.

Définition 2.6 Une suite qui ne converge pas est dite ***divergente***.

Exemple 2.7 $\forall\, a > 0$:
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Exemple 2.8 $\forall\, a > 0$, la suite $(x_n = a^n)$ converge vers 0 si $|a| < 1$ et diverge si $|a| > 1$.

Propriétés

On suppose que
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = y.$$

Alors,

1) Linéarité. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
$$\lim_{n\to+\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha x + \beta y.$$

2)
$$\lim_{n\to+\infty} x_n\, y_n = xy.$$

3) Si $y \neq 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N} : y_n \neq 0$,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}\,.$$

4)
$$\lim_{n\to+\infty} |x_n| = |x|\,.$$

Proposition 2.9 *Toute suite convergente est bornée.*

Proposition 2.10 *Supposons que les deux suites (x_n) et (y_n) convergent respectivement vers x et y et qu'il existe un entier $n_0 \geq 0$ pour lequel $n \geq n_0$ implique $x_n \leq y_n$. Alors, $x \leq y$.*

Proposition 2.11 *Soit (x_n) une suite bornée et (y_n) une suite qui converge vers 0. Alors, la suite $(x_n y_n)$ converge vers 0.*

Proposition 2.12 (Théorème des deux gendarmes) *Soit (x_n), (u_n) et (v_n) trois suites satisfaisant les deux propriétés suivantes :*

1) les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ ;
2) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq n_0 : u_n \leq x_n \leq v_n$.

Alors, la suite (x_n) converge vers ℓ.

Proposition 2.13 (Critère de d'Alembert) *Soit (x_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^*$ pour laquelle la limite*
$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right|$$
existe. Alors, si $\rho < 1$ la suite (x_n) converge vers 0 tandis que si $\rho > 1$ elle diverge.

Proposition 2.14 (Critère de Cauchy) *Soit* (x_n) *une suite pour laquelle la limite*

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|}$$

existe. Alors, si $\rho < 1$ *la suite* (x_n) *converge vers* 0 *tandis que si* $\rho > 1$ *elle diverge.*

2.4 Limites infinies

Parmi toutes les suites qui divergent, nous distinguerons celles dont la limite est infinie.

Définition 2.15 On dit que la suite (x_n) ***tend vers*** $-\infty$, si à tout $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$, on peut associer $n_\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_\alpha$ implique $x_n \leq \alpha$. On écrit alors,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty.$$

Définition 2.16 On dit que la suite (x_n) ***tend vers*** $+\infty$, si à tout $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, on peut associer $n_\beta \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_\beta$ implique $x_n \geq \beta$. On écrit alors,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty.$$

Exemple 2.17 Soit $x_n = a_0 + a_1 n + \cdots + a_p n^p$ et $y_n = b_0 + b_1 n + \cdots + b_q n^q$ avec $a_p, b_q \neq 0$. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \begin{cases} 0 & \text{si } p < q \\ \dfrac{a_p}{b_q} & \text{si } p = q \\ \sigma\infty & \text{si } p > q\,,\ \sigma \text{ signe de } \dfrac{a_p}{b_q}\,. \end{cases}$$

2.4.1 Propriétés

1) $$\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty \\ (y_n) \text{ bornée} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (x_n + y_n) = +\infty.$$

2) $$\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty \\ (y_n) \text{ bornée} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (x_n + y_n) = -\infty.$$

3) $$\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty \\ \exists\, k \geq 0 \text{ t.q } \forall n \geq k : y_n \geq x_n \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty.$$

4) $$\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty \\ \exists\, k \geq 0 \text{ t.q } \forall n \geq k : y_n \leq x_n \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} y_n = -\infty.$$

5) $$\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty \\ \exists\, \gamma \in \mathbb{R}_+^* \text{et } n_\gamma \in \mathbb{N} \text{ t.q } \forall\ n \geq n_\gamma :\ y_n \geq \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n\, y_n = +\infty.$$

6) $$\left.\begin{array}{c}\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty \\ \exists\ \gamma \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } n_\gamma \in \mathbb{N} \text{ t.q } \forall\ n \geq n_\gamma :\ y_n \geq \gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n y_n = -\infty.$$

7) $$\left.\begin{array}{c}(x_n)\ \text{ bornée} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0\,.$$

8) $$\left.\begin{array}{c}\exists\ \xi \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } n_\xi \in \mathbb{N} \text{ t.q } \forall\ n \geq n_\xi :\ x_n \geq \xi \\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : y_n > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty\,.$$

9) $$\left.\begin{array}{c}\exists\ \xi \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } n_\xi \in \mathbb{N} \text{ t.q } \forall\ n \geq n_\xi :\ x_n \geq \xi \\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : y_n < 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty\,.$$

Proposition 2.18 *Soit (x_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^*$ telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = +\infty\,.$$

Alors, la suite (x_n) diverge.

2.4.2 Suites monotones

Définition 2.19 Une suite (x_n) est dite ***croissante*** si $n \in \mathbb{N}$ implique $x_n \leq x_{n+1}$.

Définition 2.20 Une suite (x_n) est dite ***strictement croissante*** si $n \in \mathbb{N}$ implique $x_n < x_{n+1}$.

Définition 2.21 Une suite (x_n) est dite ***décroissante*** si $n \in \mathbb{N}$ implique $x_n \geq x_{n+1}$.

Définition 2.22 Une suite (x_n) est dite ***strictement décroissante*** si $n \in \mathbb{N}$ implique $x_n > x_{n+1}$.

Définition 2.23 Une suite (x_n) est dite ***constante*** si $n \in \mathbb{N}$ implique $x_n = x_{n+1}$.

Proposition 2.24 *Toute suite croissante et majorée converge.*

Proposition 2.25 *Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.*

Proposition 2.26 *Toute suite décroissante et minorée converge.*

Proposition 2.27 *Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.*

Proposition 2.28 (Théorème des suites adjacentes) *Soit (x_n) une suite croissante et (y_n) une suite décroissante telles que*

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n - y_n) = 0\,.$$

Alors,

1) $\forall\, n \in \mathbb{N} : x_0 \leq x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n \leq y_0$.

2) (x_n) *et* (y_n) *convergent vers la même limite.*

Proposition 2.29 (Théorème de Stolz) *Soit* (x_n) *et* (y_n) *deux suites qui vérifient les propriétés suivantes :*

1) (y_n) *est strictement croissante et* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$ *;*

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \ell$ *avec* $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \ell$.

Exemple 2.30 La suite $\left(x_n = (1 + \frac{1}{n})^n\right)$ est strictement croissante et majorée par 3. Par définition,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

Exemple 2.31 La suite $\left(x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$ est strictement croissante et elle converge aussi vers e.

Exemple 2.32 La suite $(x_n = \sqrt[n]{n})$ est strictement décroissante pour $n \geq 3$ et minorée par 1. De plus,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,.$$

2.5 Suites de Cauchy

Définition 2.33 Une suite est dite ***de Cauchy*** si à tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on peut associer $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n, m \geq n_\varepsilon$ impliquent $|x_m - x_n| \leq \varepsilon$.

Proposition 2.34 *Une suite* (x_n) *est de Cauchy si et seulement si elle converge.*

2.6 Sous-suites

Définition 2.35 Si (n_k) est une suite strictement croissante d'entiers naturels, on dit que (x_{n_k}) est une ***sous-suite*** ou encore ***suite extraite*** de la suite (x_n).

Proposition 2.36 (Théorème de Bolzano-Weierstrass) *De toute suite bornée* (x_n)*, on peut extraire une sous-suite* (x_{n_k}) *qui converge.*

Proposition 2.37 *Si une suite* (x_n) *converge vers* x*, toutes ses sous-suites convergent vers* x*.*

2.7 Limite supérieure

Définition 2.38 Soit (x_n) une suite majorée. A partir de cette suite, on peut définir une nouvelle suite (y_n) en posant

$$y_n = \sup\{x_k : \ k \geq n\} \ .$$

La suite (y_n) est décroissante. Par définition, sa limite est appelée la ***limite supérieure*** de la suite (x_n) et on la note par $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Lorsque (x_n) n'est pas majorée, on pose $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Proposition 2.39 *De toute suite (x_n), on peut extraire une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$.*

Proposition 2.40 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell \Rightarrow \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$.

Proposition 2.41 *Soit*

$$\rho = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|}.$$

Alors, si $\rho < 1$ la suite (x_n) converge vers 0.

Propriétés

1) $\forall\, \lambda > 0$:
$$\limsup_{n\to+\infty} \lambda x_n = \lambda \limsup_{n\to+\infty} x_n \, .$$

2)
$$\limsup_{n\to+\infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} x_n + \limsup_{n\to+\infty} y_n \, .$$

3) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ avec $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\limsup_{n\to+\infty} (x_n + y_n) = x + \limsup_{n\to+\infty} y_n.$$

4) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ avec $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall\, n \in \mathbb{N} : y_n \geq 0$, on a :

$$\limsup_{n\to+\infty} (x_n y_n) = x \limsup_{n\to+\infty} y_n.$$

2.8 Exercices

Calculer

2.1 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+2}$.

2.2 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+1}{4n^2+5}$.

2.3 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+2}}{2n}$.

2.4 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos\sqrt{n}}{n}$.

2.5 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\dfrac{1}{n^2}$.

2.6 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\cos\dfrac{1}{n^4}\sin\dfrac{1}{n^3}$.

2.7

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n+1)-\sin(n-1)}{\cos(n+1)+\cos(n-1)}.$$

2.8

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n+1)+\sin(n-1)}{\sin n}.$$

2.9 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin\sqrt{n^3+n^2+1}}{n^3+n^2+1}$.

2.10 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin n$.

2.11 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+4}}{2}$.

2.12

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{(n+3)(n+6)}\right).$$

2.13 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{n^4+4n+5}-n^2\right)$.

2.14

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3+1}\right).$$

2.15 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3}{7^n}\cos\sqrt{n}$.

2.16 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{n!}$.

2.17 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{a^n}$.

2.18 $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n e^{-3n}$.

2.19 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$.

2.20 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$.

2.21 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

2.22 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+n^2\right)}{\ln\sqrt{n}}$.

2.23 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}\right)$.

2.24 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(1+n)}{\ln n}\right)^n$.

2.25 $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\sqrt{n}}\ln(1+n+e^n)$.

2.26 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\ln n^2}{\sqrt{n}}+\cos^n\dfrac{1}{n}\right)$.

2.27 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\sqrt{n})}{\ln(1+n^2)}$.

2.28 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+e^n)}{e^n}$.

2.29 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(2^n+3^n)}{4^n}$.

2.30 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n!}{5^n}$.

2.31 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n!}{n^2}$.

2.32 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^2-1}$.

2.33 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k^2+3k+2}$.

2.34 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k+1}{k^3+4k^2+5k+2}$.

2.35

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2+3k+2}{k^4+7k^3+17\,k^2+17\,k+6}.$$

2.36 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\right)$.

2.37 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n!}\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\right)$.

2.38 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^4}\sum\limits_{k=1}^{n}k^3\right)$.

2.39 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}2^{\frac{k}{n}}\right)$.

2.40 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right)$.

2.41 Soit $m\in\mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\sqrt[n]{m}\right)^m=1\,.$$

Calculer

2.42 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\right)$.

2.43 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

2.44 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n!}\sum\limits_{k=1}^{n}k!\right)$.

2.45 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{n\sin\frac{2}{n}}{\log_k\sqrt[3]{n!}}\right)$.

2.46 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n^2}\ln\dfrac{1}{2^{k\sin\frac{2}{n}}}$.

2.47 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

2.48 $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\sqrt{2+4n^2\pi^2}$.

2.49

1) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}n!\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)=0\,.$$

2) En déduire que **e est irrationnel**.

2.50 Soit (x_n) une suite qui converge vers $\ell\in\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)=\ell\,.$$

2.51 Soit (x_n) une suite qui converge vers $\ell\in\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n\,(n+1)}\sum_{k=1}^{n}kx_k\right)=\ell\,.$$

2.52 Vérifier que pour tout entier $n\geq 1$:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\leq\frac{1}{2\sqrt{n}}\,.$$

En déduire que la suite (x_n) définie par

$$x_n=-2\sqrt{n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

est convergente.

2.53 Soit $a\in\mathbb{R}$. Montrer que la suite $(x_n=a^n)$ converge vers 0 si $|a|<1$ et diverge si $|a|>1$.

2.54 Montrer que la suite

$$\left(x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

est strictement croissante et majorée par 3.

2.55 Montrer que la suite $(x_n=\sqrt[n]{n})$ est strictement décroissante pour $n\geq 3$ et qu'elle converge vers 1.

2.56 Soient $0<|a|<1$ et

$$\left(x_n=(1+a)\left(1+a^2\right)\cdots\left(1+a^{2^n}\right)\right)\,.$$

Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$(1-a)\,x_n=1-a^{2^{n+1}}\,.$$

En déduire la limite de la suite (x_n).

2.57 Soient $a\in\mathbb{R}^*$ et

$$\left(x_n=\cos\frac{a}{2}\cdots\cos\frac{a}{2^n}\right)\,.$$

Montrer que pour tout entier $n\geq 1$:

$$\sin a=2^n x_n\sin\frac{a}{2^n}\,.$$

En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\frac{\sin a}{a}\,.$$

2.58 Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_1+\cdots+x_n=n^2x_n\ \text{et}\ x_1=a\neq 0\,.$$

2.59 Calculer la limite de la suite (x_n) définie par $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + x_{n-1}\right) .$$

2.60 Calculer la limite de la suite (x_n) définie par $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}\left(5x_n - x_{n-1}\right) .$$

2.61 Montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = 5x_n - 4x_{n-1}\ ,\ x_0 = 0 \text{ et } x_1 = 1$$

est divergente.

2.62 Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{3x_n - x_n^2 + 4}{3} \text{ et } x_0 = 0\,.$$

2.63 Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{3x_n + 1}{4} \text{ et } x_0 = 0\,.$$

2.64 Etudier la convergence de la suite $\big(x_n\big)$ définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(x_n^2 + x_n + 1\right) \text{ et } x_0 = \sqrt{2}\,.$$

2.65 Calculer la limite de la suite $\big(x_n\big)$ définie par

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + 5}{6} \text{ et } x_0 = \frac{1}{2}\,.$$

2.66 Calculer la limite de chacune des deux suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et

$$\begin{cases} 4x_{n+1} = 3x_n + y_n \\ 4y_{n+1} = 3y_n + x_n. \end{cases}$$

2.67 Montrer que les deux suites (x_n) et (y_n) définies par

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \\ y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \end{cases} \quad \text{et } 0 < x_0 < y_0$$

convergent vers la même limite.

2.68 Montrer que les deux suites (x_n) et (y_n) définies par

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \\ y_{n+1} = \dfrac{2x_n y_n}{x_n + y_n} \end{cases} \quad \text{et } 0 < y_0 < x_0$$

convergent vers la même limite. Calculer cette limite commune.

2.69 Soit a l'unique solution de l'équation $x - \cos x = 0$. Montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \cos x_n \text{ et } x_0 = 0$$

converge vers a.

2.70 Montrer que la suite (x_n) défine par

$$x_{n+1} = \sin x_n \text{ et } x_0 = \frac{1}{2}$$

est convergente. Calculer sa limite.

2.71 Montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n} \text{ et } x_0 = 2$$

est convergente. Calculer sa limite.

2.72 Discuter, en fonction de la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence de la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{3} \text{ et } x_0 = \alpha\,.$$

Lorsqu'elle converge, calculer sa limite.

2.73 Montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{4} + x_n^2 \text{ et } x_0 = \frac{1}{4}$$

est convergente. Calculer sa limite.

2.74 Montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2\sqrt{2}} \text{ et } x_0 = 0$$

est convergente. Calculer sa limite.

2.75 Montrer que la suite $\big(x_n\big)$ définie par

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 70}{39} \text{ et } x_0 = 4$$

converge. Calculer sa limite.

2.76 Montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 4}{4} \text{ et } x_0 = 0$$

est convergente. Calculer sa limite.

2.77 Calculer la limite de la suite $\big(x_n\big)$ définie par

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 3}{2} \text{ et } x_0 = 1\,.$$

2.78 Montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \text{ et } x_0 > 0$$

est convergente. Calculer sa limite.

2.79 Montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{3x_n + 1} \text{ et } x_0 = 1$$

est convergente. Calculer sa limite.

2.80 Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n} \text{ et } x_0 = 0\,.$$

2.81 Montrer que la suite $\big(x_n\big)$ définie par

$$x_{n+1} = \frac{3x_n}{1 + 3x_n} \text{ et } x_0 = 2$$

converge. Calculer sa limite.

2.82 Montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n} \text{ et } x_0 = 1$$

est convergente. Calculer sa limite.

2.83 Montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \sqrt{5 + \sqrt{x_n}} \text{ et } x_0 = 9$$

est convergente.

2.84 Soit (x_n) la suite définie par

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \text{ et } x_0 = 0\,.$$

1) Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : x_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\,.$$

2) En déduire la limite de la suite (x_n).

2.85 Soit (x_n) la suite définie par

$$x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n} \text{ et } x_0 = \frac{2}{3}\,.$$

1) Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{\sqrt{2}} < x_n < \sqrt{2}\,.$$

2) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

2.86 Discuter, en fonction de la valeur $\alpha > 0$, la convergence de la suite définie par

$$x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} \text{ et } x_0 = \alpha\,.$$

Lorsqu'elle converge, calculer sa limite.

2.87 Montrer que la suite $\big(x_n\big)$ définie par

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1} + 3 \text{ et } x_0 = 3$$

converge. Calculer sa limite.

2.88 Discuter, en fonction de la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence de la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(4 - x_n^2\right) \text{ et } x_0 = \alpha\,.$$

Lorsqu'elle converge, calculer sa limite.

2.89 Montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \sqrt{3 + \frac{x_n^2}{2}} \text{ et } x_0 = 2$$

converge. Calculer sa limite.

2.90 Montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \sqrt[4]{2 + x_n^2} \text{ et } x_0 = 2$$

converge. Calculer sa limite.

2.91 Montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \sqrt[6]{1 + x_n^3} \text{ et } x_0 = 3$$

converge. Calculer sa limite.

2.92 Montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n} - \frac{1}{4} \text{ et } x_0 = 1$$

converge. Calculer sa limite.

2.93 Montrer que la suite $\big(x_n\big)$ définie par

$$x_{n+1} = x_n - \ln\big(1 + x_n^2\big) \text{ et } x_0 = \frac{1}{2}$$

converge. Calculer sa limite.

2.94 Montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \ln(\operatorname{ch} x_n) \text{ et } x_0 = 1$$

converge. Calculer sa limite.

2.95 Montrer que la suite (x_n) définie par $x_0 = 1$ et

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \sin x_n \cos x_n)$$

converge. Calculer sa limite.

2.96 Calculer la limite de chacune des deux suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = y_0 = 1$ et

$$\begin{cases} x_{n+1} = \operatorname{ch} x_n y_n - \operatorname{sh} x_n y_n \\ y_{n+1} = \operatorname{ch} x_n y_n + \operatorname{sh} x_n y_n \,. \end{cases}$$

2.97 Montrer que les deux suites (x_n) et (y_n) définies par

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n y_n \\ y_{n+1} = \sin x_n y_n \end{cases} \text{ et } x_0 = y_0 = 1$$

convergent. Calculer leur limite.

2.98 Montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_n = \frac{1}{n^2 - 1} \sum_{p=1}^{n-1} x_p \text{ et } x_1 = 5$$

converge. Calculer sa limite.

2.99 Montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{x_n \sqrt{\sin x_{n-1}}}{2} \text{ et } x_0 = x_1 = 1$$

converge. Calculer sa limite.

2.100 Montrer que la suite (x_n) définie par $x_0 = 3$, $x_1 = 2$ et

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n + x_{n-1}}$$

converge. Calculer sa limite.

2.101 Montrer que la suite (x_n) définie par $x_0 = 4$, $x_1 = 3$ et

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n x_{n-1} + 4}$$

converge. Calculer sa limite.

2.102 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$. Calculer, en fonction de a et b, la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - a^n}{1 + b^n} \,.$$

2.103 Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} n\left(\sqrt[n]{e} - 1\right) = 1 \,.$$

2.104 Soient $a > 0$ et (x_n) la suite définie par

$$x_n = n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) \text{ et } x_0 = a \,.$$

1) Montrer que si $a > 1$, la suite (x_n) converge.

2) En déduire qu'elle converge pour tout $a > 0$.

3) En posant

$$\ell(a) = \lim_{n \to +\infty} x_n \,,$$

montrer que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\ell(\alpha\beta) = \ell(\alpha) + \ell(\beta) \,.$$

2.105 Soit $a > 0$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(2\sqrt[n]{a} - 1\right)^n = a^2 \,.$$

2.106 Discuter, en fonction de la valeur de $\alpha > 0$, la convergence de la suite (x_n) définie par

$$x_n = \sqrt[n]{2^n + \alpha^n} \,.$$

Lorsqu'elle converge, calculer sa limite.

2.107 Soient $a < b < c$. Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \,.$$

2.108 Soit (x_n) une suite bornée d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{1+x_n} = \ell \neq 1\,.$$

Montrer que la suite (x_n) converge en calculant sa limite .

2.109 Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\ell \in \mathbb{R}$ et (x_n) une suite d'éléments de $\{t \in \mathbb{R} : t \neq -\alpha\}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n-\alpha}{x_n+\alpha} = \ell\,.$$

Discuter, en fonction de la valeur de ℓ, la convergence de la suite (x_n). Lorsqu'elle converge, calculer sa limite.

2.110 Etudier, en fonction de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la convergence de la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = -\alpha x_n + \alpha \text{ et } x_0 = \beta\,.$$

2.111 Soients $a, b \in \mathbb{R}$. Discuter, en fonction des valeurs de a et b, la convergence de la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n+b} \text{ et } x_0 = a\,.$$

Lorsqu'elle converge, calculer sa limite.

2.112 Soient $0 < \alpha < \beta$ et $(x_n)\,,(y_n)$ les deux suites définies par

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{\beta x_n + \alpha y_n}{\alpha+\beta} \\ y_{n+1} = \dfrac{\alpha x_n + \beta y_n}{\alpha+\beta} \end{cases} \quad \text{et } x_0 < y_0\,.$$

1) Montrer que la suite (x_n) est croissante et que la suite (y_n) est décroissante.

2) En déduire qu'elles convergent vers la même limite ℓ.

3) Calculer ℓ.

2.113 Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ et $\big(x_n\big)$, $\big(y_n\big)$ les deux suites définies respectivement par

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \alpha y_n}{1+\alpha} \text{ et } y_{n+1} = \frac{x_n + \beta y_n}{1+\beta}$$

avec x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$. Posons

$$\sigma = \frac{\beta-\alpha}{(1+\alpha)(1+\beta)}\,.$$

1) Vérifier que $|\sigma| < 1$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{\alpha}{1+\alpha}\,\sigma^{n-1}(x_0-y_0)\,.$$

3) En déduire que les deux suites $\big(x_n\big)$ et $\big(y_n\big)$ convergent vers la même limite. Calculer cette limite.

2.114 Soient $a < x < b$.

1) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\exists!\, k_n \in \mathbb{N}$ tel que

$$a + k_n \frac{b-a}{2^n} \leq x < a + \big(k_n+1\big)\frac{b-a}{2^n}\,.$$

2) En déduire que la suite (x_n) définie par

$$x_n = a + k_n \frac{b-a}{2^n}$$

converge vers x.

2.115 Vérifier que pour entier $n > 0$:

$$\ln n! > \frac{n}{2} \ln \frac{n}{2}\,.$$

En déduire que

1) Pour $\alpha \leq 1$, la suite $\big(x_n = \frac{\ln n!}{n^\alpha}\big)$ est strictement croissante et non majorée.

2) Pour $\alpha > 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n!}{n^\alpha} = 0\,.$$

2.116 Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite de rationnels et une suite d'irrationnels qui convergent vers x.

2.117 Montrer que si les deux sous-suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ, la suite (x_n) converge vers ℓ.

2.118 Montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \text{ et } x_0 = 1$$

converge. Calculer sa limite.

2.119 Montrer que de toute suite on peut extraire une sous-suite monotone.

2.120 Soit (x_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell\,.$$

1) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell\,.$$

2) La réciproque est-elle vraie ?

3) Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\,.$$

2.121 Soit (x_n) une suite bornée.

1) Montrer que

$$\rho = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} \leq 1\,.$$

2) Si $\rho < 1$, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0\,.$$

3) Que peut-on dire si $\rho = 1$?

2.122 Soit (x_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^*$ telle que

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1\,.$$

Peut-on en déduire l'existence de

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \text{ ?}$$

2.123 Montrer que de toute suite (x_n), on peut extraire une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$.

2.124 Soit $\big(a_n\big)$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^*$ telle que la suite $\big(x_n = a_n \cdot \ldots \cdot a_0\big)$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}^*$ et posons $\ell_m = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{x_m}$. Montrer que $\lim\limits_{m\to+\infty} \ell_m = 1$.

2.125 On dit que $x \in \mathbb{R}$ est un ***point adhérent*** à la suite $\big(x_n\big)$ si de celle-ci on peut extraire une sous-suite qui converge vers x.
Soit $\big(x_n\big)$ une suite bornée et désignons par E l'ensemble de ses points adhérents. Montrer que

$$\sup E = \lim_{n\to+\infty} \sup x_n\,.$$

2.126 ***Principe des intervalles fermés emboîtés.***
Soit $(I_n = [a_n, b_n])$ une suite d'intervalles fermés telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} \subset I_n\,.$$

1) Montrer que

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} I_n \neq \emptyset\,.$$

2) Que devient ce résultat si les I_n sont des intervalles ouverts ?

2.127 $\mathbb{R}$ ***est non dénombrable.***

1) Montrer qu'il n'existe aucune suite (a_n) d'éléments de $[0,1]$ pour laquelle on puisse écrire

$$[0,1] = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}\,.$$

2) Trouver une bijection de $[0,1]$ dans $]0,1[$.

Chapitre 3

Nombres complexes

3.1 introduction

On désigne par $\mathbb{C}$ le corps des ***nombres complexes*** dont les éléments sont toute expression de la forme $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$. $\mathbb{C}$ est muni des 2 lois de composition interne, l'addition et la mutiplication

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)\,.$$

Le nombre réel x est appelé la ***partie réelle*** de z et on le note $x = \operatorname{Re} z$, tandis que le nombre réel y est appelé la ***partie imaginaire*** de z et on le note $y = \operatorname{Im} z$. Lorsque $x = 0$ et $y \neq 0$, on dit que le nombre complexe $z = iy$ est ***imaginaire pur***.

Les deux nombres complexes $z = x + iy$ et $\overline{z} = x - iy$ sont dits ***complexes conjugués***.

Le nombre réel noté $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est appelé le ***module*** du nombre complexe $z = x + iy$.

Définition 3.1 Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $\{\mathrm{O}\,; e_1, e_2\}$, le nombre complexe $z = x + iy$ est appelé l'***affixe*** du point $\mathrm{P} = (x, y)$. D'après Pythagore, $|z|$ n'est rien d'autre que la longueur du segment OP.

Propriétés

1) $$\overline{\overline{z}} = z\,.$$

2) $$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\,.$$

3) $$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}\,.$$

4) Si $z_2 \neq 0$, $$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\,.$$

5) $$|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = 0\,.$$

6) $$|\overline{z}| = |z|\,.$$

7) $$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|\,.$$

8) Si $z_2 \neq 0$, $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,.$$

9) $$z\,\overline{z} = |z|^2\,.$$

10) Si $z \neq 0$, $$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}\,.$$

3.2 Forme polaire

Soit $z = x + iy \neq 0$. En utilisant la ***représentation polaire*** dans le plan $\mathbb{R}^2$, on sait qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x = |z|\cos\theta \\ y = |z|\sin\theta. \end{cases}$$

θ est appelé l'***argument*** de z et on le note par $\theta = \arg z$. Il découle immédiatement de cette définition que l'argument d'un nombre complexe z est défini à $2k\pi$ près (avec $k \in \mathbb{Z}$).

Définition 3.2 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Par définition, l'égalité

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

est appelée la ***formule d'Euler***.

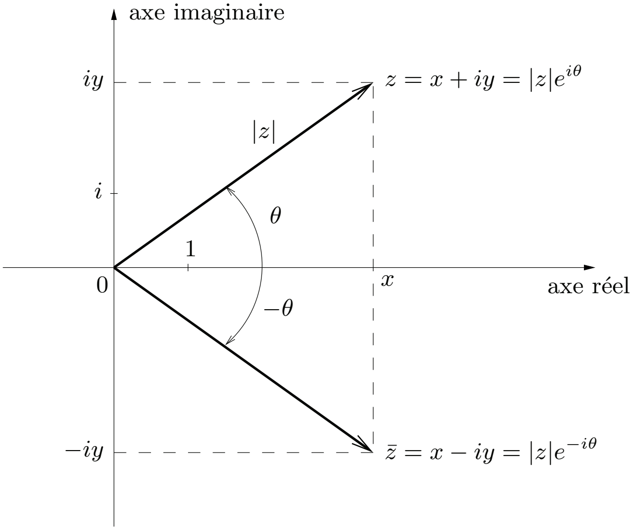


Fig. 3.1

En utilisant la formule d'Euler, tout nombre complexe $z \neq 0$ peut s'écrire sous la forme trigonométrique

$$z = |z|\, e^{i\theta} = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

où $\theta = \arg z$.

3.2.1 Propriétés

1) $$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}\,.$$

2) $$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

3) Si $z_2 \neq 0$, $$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

4) Si $z \neq 0$, $$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\, e^{-i\theta}\,.$$

5) $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$: $$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \ \text{ et } \ \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\,.$$

3.2.2 Interprétation géométrique

Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Multiplier un nombre complexe $z \neq 0$ par $r\, e^{i\theta}$ revient à faire subir à z une homothétie de centre l'origine et de rapport $r > 0$ suivie d'une rotation de centre l'origine et d'angle θ.

3.3 Formule de Moivre

Proposition 3.3 (Formule de Moivre) *$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$:*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \ \textit{ ou encore } \ \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}.$$

3.4 Racines d'un nombre complexe

Proposition 3.4 *Soient $z = |z|\ e^{i\theta}$ et un entier $n > 1$. Alors, si $\alpha > 0$,*

$$z^n = \alpha\, e^{i\beta} \Longleftrightarrow |z| = \sqrt[n]{\alpha} \ \textit{ et } \ \theta = \frac{\beta + 2k\pi}{n}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Exemple 3.5 Les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité, autrement dit les racines de l'équation $z^n = 1$, sont les sommets du polygone régulier à n côtés situés sur le cercle centré à l'origine et de rayon 1.

3.5 Décomposition d'un polynôme

Proposition 3.6 *Tout polynôme* $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ *à coefficients dans* $\mathbb{C}$ *de degré* $n \geq 1$ *admet au moins une racine dans* $\mathbb{C}$.

Proposition 3.7 *Soient* $z_1, \ldots, z_p \in \mathbb{C}$ *les* p *racines distinctes du polynôme* $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$. *Alors,*

$$P(z) = a_n (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_p)^{m_p}$$

avec $m_1 + \cdots + m_p = n$.

Proposition 3.8 *Soient* $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *et* $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$. *Alors,* $P(z) = 0$ *implique* $P(\overline{z}) = 0$.

Proposition 3.9 *Soient* $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *et* $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$. *On désigne par* $b_1, \ldots, b_q$ *les* q *racines réelles distinctes de* $P(z)$ *et par* $c_1, \ldots, c_p$ *ses* p *racines complexes distinctes telles que pour tout couple* $1 \leq r,\ s \leq p$: $c_r \neq \overline{c}_s$. *Alors,*

$$\begin{aligned} P(z) = a_n (z - b_1)^{m_1} \cdots (z - b_q)^{m_q} & \\ & \left(z^2 - 2z \operatorname{Re} c_1 + |c_1|^2\right)^{k_1} \cdots \left(z^2 - 2z \operatorname{Re} c_p + |c_p|^2\right)^{k_p} \end{aligned}$$

avec $m_1 + \cdots + m_q + 2k_1 + \cdots + 2k_p = n$.

3.6 Exercices

3.1 Pour le nombre complexe $z = 1 - i$, calculer $\overline{z}$, $|z|$, $\arg z$ et z^{-1}.

3.2 Soit $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Trouver le module et l'argument du nombre complexe $z = -\sin 2a + 2i \cos^2 a$.

3.3 Calculer $(2+i)^8 (3+i)^8$.

3.4 Calculer $\left(\sqrt{3} - i\right)^{28} + \left(\sqrt{3} + i\right)^{28}$.

3.5 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 1$ et $z^3 = -1$. Calculer $\left(z(z-1)\right)^{-2}$.

Résoudre

3.6 $|z| - 9i = 3x - z$.

3.7 $|z - 1| = \sqrt{2}\,|z - 2|$.

3.8 $2i - z = 2 + iz$.

3.9 $z^2 + z + 1 = 0$.

3.10 $z^2 + 2z + 5 = 0$.

3.11 $4z^2 + 2z + 1 = 0$.

3.12 $z^2 + 2z + i = 0$.

3.13 $z^3 - z - 6 = 0$.

3.14 $z^3 - 4z^2 + 6z - 4 = 0$.

3.15 $2z^3 + 14\,z^2 + 41\,z + 68 = 0$.

3.16 $z^4 = 2 + i$.

3.17 $z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 2z + 5 = 0$.

3.18 $z^6 + i = 0$.

3.19 Décomposer le polynôme

$$P(x) = x^7 + x^5 + x^3 + x$$

en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$.

3.20 Résoudre

$$z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0\,.$$

3.21 Vérifier que $2 + i$ est solution de l'équation

$$z^4 - 2z^3 - z^2 + 2z + 10 = 0\,.$$

Trouver ses trois autres racines.

3.22 Résoudre l'équation

$$z^3 + \left(\sqrt{3} - i\right) z^2 + \left(1 - i\sqrt{3}\right) z - i = 0$$

sachant qu'elle admet une racine qui est imaginaire pur.

3.23 Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation

$$z^2 + 2a\,z + a(2-b) + \ln a = 0$$

admet deux racines réelles distinctes si et seulement si

$$\ln a + 2a - a^2 - ab < 0$$

3.24 Pour quelle valeur de α, l'une des racines du polynôme

$$P(z) = z^3 - 12\,z^2 + \alpha z - 150$$

est égale à la somme des deux autres. Pour ce α particuler, donner les trois racines du polynôme $P(z)$.

Résoudre

3.25 $\dfrac{z-2}{z-1} = z\,.$

3.26 $\dfrac{z+i}{z+1} = z + 2i\,.$

3.27 $\left(\dfrac{z^2+2z+5}{z-1}\right)^2 = 1\,.$

3.28 $(1-z)^6 = (1+z)^6.$

3.29 Décomposer le polynôme $x^4 + 1$ en un produit de deux polynômes du second degré irréductibles dans $\mathbb{R}$.

3.30 Décomposer le polynôme $x^6 + 1$ en un produit de trois polynômes du second degré irréductibles dans $\mathbb{R}$.

Résoudre le système

3.31 $\begin{cases} z^3 + (3-i)\,z^2 + (2-3i)\,z - 2i = 0 \\ z^3 + (1+i)\,z^2 + (2+i)\,z + 2 = 0. \end{cases}$

3.32 $\begin{cases} (1-i)\,z_1 + (1-2i)\,z_2 = 6 + 2i \\ (1-2i)\,z_1 + (3-i)\,z_2 = 5. \end{cases}$

3.33 $\begin{cases} a + b = 2 \\ a^2b^2 = -1\,. \end{cases}$

3.34 Soit $z = x + iy \neq i$. Ecrire, en fonction de x et y,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z^2}{i-z}\right).$$

3.35 1) Montrer que si $z_1 \neq z_2$:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right) = \frac{|z_1|^2 - |z_2|^2}{|z_1-z_2|^2}\,.$$

2) En posant $z_1 = r_1\,e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2\,e^{i\theta_2}$, montrer que

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right) = \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}\,.$$

3.36 Soit $z = r\,e^{i\theta} \neq 0$. Ecrire, en fonction de r et θ,

$$\mathrm{Re}\left(z - \frac{1}{z}\right) \text{ et } \mathrm{Im}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

3.37 Soit $z = e^{i\theta}$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta$$

et

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta\,.$$

3.38 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la partie réelle de toute solution de l'équation

$$\left(\frac{z}{z-2}\right)^n = i$$

vaut 1.

3.39 Soient $a = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)+\frac{i}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$ et $b = 6+6i$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} |a^n b| = 0\,.$$

3.40 Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$.

1) Montrer que l'***inégalité triangulaire***

$$\left|z_1+z_2\right| \leq \left|z_1\right| + \left|z_2\right|.$$

2) En déduire l'***inégalité triangulaire inverse***

$$\Big|\left|z_1\right| - \left|z_2\right|\Big| \leq \left|z_1 - z_2\right|.$$

3) Montrer que

$$\left|z_1+z_2\right| = \left|z_1\right| + \left|z_2\right| \Leftrightarrow \exists\ \lambda > 0 \text{ t.q } z_2 = \lambda z_1\,.$$

Dans le plan complexe, représenter graphiquement

3.41 $E = \left\{z \in \mathbb{C} : |z-1+i| = 2\right\}$.

3.42 $E = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\dfrac{z-i}{z+4}\right| = 1\right\}$.

3.43

$$E = \left\{z \in \mathbb{C} : \arg\left(\frac{z-1-i}{z+4}\right) = \frac{\pi}{2}\right\}.$$

3.44

$$E = \left\{z \in \mathbb{C} : \arg\left(\frac{z-2}{z+i}\right) = -\frac{\pi}{2}\right\}.$$

3.45 $E = \left\{z \in \mathbb{C} : \arg\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right) = \dfrac{\pi}{6}\right\}$.

3.46 $E = \left\{z \in \mathbb{C} : \arg\left(\dfrac{2-z}{z+i}\right) = \dfrac{\pi}{3}\right\}$.

3.47 Soit $A = (4,3)$. Trouver le point $\mathrm{B} = (x,y)$ de sorte que le triangle OAB soit équilatéral.

3.48 Soient A $= (1,-1)$ et C $= (2,1)$. Trouver les coordonnées des deux points B et D de sorte que AC soit une des deux diagonales du carré ABCD.

3.49 Soient A $= (1,1)$ et B $= (2,3)$. Trouver les coordonnées (x,y) du point C de sorte que le triangle ABC soit isocèle et rectangle en B.

3.50 Soient A $= (3,-1)$ et B $= (2,1)$. Trouver les coordonnées (x,y) du point C de sorte que le triangle ABC soit isocèle et rectangle en C.

3.51 Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\sin 5\theta = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta$$

et

$$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta\,.$$

3.52 Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\sin^5\theta = \frac{1}{16}\sin 5\theta - \frac{5}{16}\sin 3\theta + \frac{5}{8}\sin\theta$$

et

$$\cos^5\theta = \frac{1}{16}\cos 5\theta + \frac{5}{16}\cos 3\theta + \frac{5}{8}\cos\theta\,.$$

3.53 Soit $\theta \neq 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$. Pour tout entier $n > 0$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\,.$$

En déduire les deux sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\cos k\theta\,.$$

3.54 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que pour tout $0 < t < \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\sin(2n+1)\,t}{\sin^{2n+1}t} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\operatorname{cotg}^{2(n-k)}t\,.$$

2) Trouver les n racines du polynôme

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}x^{n-k}\,.$$

3) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotg}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

4) Vérifier que pour tout $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$:

$$\operatorname{cotg}^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \operatorname{cotg}^2\theta.$$

5) En conclure que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

3.55 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\sin(2n+1)t = P_n\left(\sin^2 t\right)\sin t$$

où

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} x^k (1-x)^{n-k}.$$

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x = (2n+1)\left(\sin\frac{x}{2n+1}\right) \cdot \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}\right).$$

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

CHAPITRE 4

Fonctions d'une variable

4.1 Introduction

Soient E et F deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$. La correspondance, qui, à tout élément x de E associe un élément y de F est appelée une ***fonction*** ou encore une ***application*** de E dans F et on la note par $f : E \to F$. Pour montrer que $f(x)$ est l'élément de F associé à x, on utilise la notation $x \mapsto f(x)$.

E est appelé le ***domaine de définition*** de la fonction f et F son ***ensemble d'arrivée***. Le sous-ensemble $\{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in E \text{ tel que } f(x) = y\}$ est appelé l'***image*** de E par f et on le note par $\operatorname{Im} f$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\{\mathrm{O}; e_1, e_2\}$, la fonction $f : E \to F$ est représentée par sa ***courbe*** $C = \big\{\big(x, y = f(x)\big) : x \in E\big\}$.

On désigne par $\mathbf{F}(E, F)$ l'ensemble des fonctions $f : E \to F$.

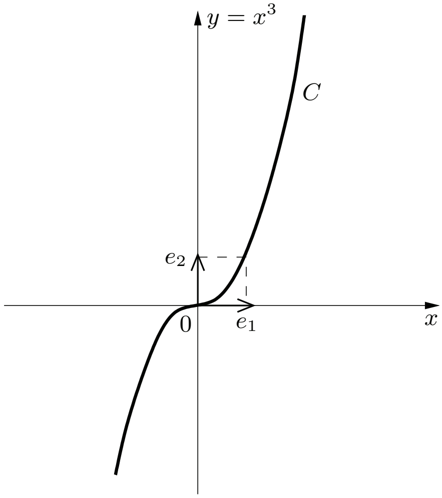


Fig. 4.1

Définition 4.1 Soit $f : E \to F$. La fonction $f^+ : E \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$f^+(x) = \max\bigl\{f(x), 0\bigr\} = \frac{1}{2}\bigl(f(x) + \bigl|f(x)\bigr|\bigr)$$

est appelée la ***partie positive*** de la fonction f.

Définition 4.2 Soit $f : E \to F$. La fonction $f^- : E \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$f^-(x) = -\min\bigl\{f(x), 0\bigr\} = -\frac{1}{2}\bigl(f(x) - \bigl|f(x)\bigr|\bigr)$$

est appelée la ***partie négative*** de la fonction f.

Proposition 4.3 *Soit $f : E \to F$. Alors, pour tout $x \in E$:*

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \text{ et } \bigl|f(x)\bigr| = f^+(x) + f^-(x).$$

Définition 4.4 Une fonction $f : E \to F$ est dite ***surjective*** si tout élément y de F est l'image par f d'au moins un élément x de E.

$$f : E \to F \text{ surjective} \Longleftrightarrow (\forall\, y \in F,\ \exists\, x \in E \text{ tel que } y = f(x)) \Longleftrightarrow F = \operatorname{Im} f\,.$$

Définition 4.5 Une fonction $f : E \to F$ est dite ***injective*** si tout élément y de F est l'image par f d'au plus un élément x de E.

$$f : E \to F \text{ injective} \Longleftrightarrow (x_1,\, x_2 \in E \text{ et } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)\,.$$

Définition 4.6 Une fonction $f : E \to F$ est dite ***bijective*** si elle est à la fois surjective et injective ou encore si tout élément y de F est l'image par f d'un et un seul élément x de E.

$$f : E \to F \text{ bijective} \Longleftrightarrow (\forall\, y \in F,\ \exists!\, x \in E \text{ tel que } y = f(x))\,.$$

Lorsque la fonction $f : E \to F$ est bijective, l'application, qui, à tout élément y de F, fait correspondre l'élément x de E solution unique de l'équation $y = f(x)$, est appelée la ***fonction réciproque*** de f et est notée f^{-1}. La courbe de f et celle de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ aussi appelée ***première bissectrice***.

Définition 4.7 Soient $f : E \to F$ et $g : A \to B$ deux fonctions telles que $\operatorname{Im} f \subset A$. Alors, la fonction $g \circ f : E \to B$, qui, à tout élément x de E, fait correspondre l'élément $g\bigl(f(x)\bigr)$ de B, est appelée la ***fonction composée*** de g et f. En particulier $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Proposition 4.8 *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux fonctions telles que les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

1) $\forall\, x \in E : g \circ f(x) = x$;

2) $\forall\, y \in F : f \circ g(y) = y$.

Alors, la fonction f est bijective et $g = f^{-1}$.

Définition 4.9 Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Une fonction $f : E \to F$ est dite ***lipschitzienne*** dans le rapport k si pour tout couple d'éléments x, y de E :

$$\left|f(x) - f(y)\right| \leq k\,|x - y|\,.$$

Lorsque $0 < k < 1$, on dit que f est k***-contractante***.

Proposition 4.10 (Théorème du point fixe de Banach) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction k-contractante. Alors,*

1) L'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution dans $\mathbb{R}$.

2) La suite (x_n) définie par $x_{n+1} = f\,(x_n)$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ converge vers cet unique point fixe.

Remarque : Toute solution de l'équation $f(x) = x$ est appelée un ***point fixe*** de f.

4.2 Fonction monotone

Définition 4.11 Une fonction $f : E \to F$ est dite ***croissante*** si $a, b \in E$ et $a < b$ impliquent $f(a) \leq f(b)$.

Définition 4.12 Une fonction $f : E \to F$ est dite ***strictement croissante*** si $a, b \in E$ et $a < b$ impliquent $f(a) < f(b)$.

Définition 4.13 Une fonction $f : E \to F$ est dite ***décroissante*** si $a, b \in E$ et $a < b$ impliquent $f(a) \geq f(b)$.

Définition 4.14 Une fonction $f : E \to F$ est dite ***strictement décroissante*** si $a, b \in E$ et $a < b$ impliquent $f(a) > f(b)$.

Définition 4.15 Une fonction $f : E \to F$ est dite ***constante*** si pour tout couple $a, b \in E : f(a) = f(b)$.

4.3 Fonction paire – Fonction impaire

Définition 4.16 Une fonction $f : E \to F$ est dite ***paire*** si $x \in E$ implique $-x \in E$ et $f(-x) = f(x)$. La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe Oy.

Définition 4.17 Une fonction $f : E \to F$ est dite ***impaire*** si $x \in E$ implique $-x \in E$ et $f(-x) = -f(x)$. La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Proposition 4.18 *Soit une fonction $f : E \to F$ bijective et impaire. Alors, sa fonction réciproque $f^{-1} : F \to E$ est aussi impaire.*

4.4 Fonction périodique

Définition 4.19 Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite ***périodique*** de ***période*** $T \neq 0$ si pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x+T) = f(x)$.

Une fonction peut avoir plusieurs périodes multiples ou non les unes des autres.

Proposition 4.20 *Soit $T \neq 0$ une période de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, kT est aussi une période de f.*

Proposition 4.21 *Supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit une fonction périodique, non constante et continue. Alors, il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que les périodes de f sont les multiples entiers non nuls de T. Par définition, T est appelé la **période** de la fonction f.*

4.5 Fonction bornée

Définition 4.22 Une fonction $f : E \to F$ est dite ***minorée*** si $\operatorname{Im} f$ est un sous-ensemble minoré.

Proposition 4.23 *$f : E \to F$ est minoré $\Longleftrightarrow$*

$$\exists\, \sigma \in \mathbb{R} \textit{ tel que } \forall\, x \in E : \sigma \leq f(x)\,.$$

Définition 4.24 Une fonction $f : E \to F$ est dite ***majorée*** si $\operatorname{Im} f$ est un sous-ensemble majoré.

Proposition 4.25 *$f : E \to F$ est majorée $\Longleftrightarrow$*

$$\exists\, \beta \in \mathbb{R} \textit{ tel que } \forall\, x \in E : f(x) \leq \beta\,.$$

Définition 4.26 Une fonction $f : E \to F$ est dite ***bornée***, si elle est à la fois minorée et majorée.

Proposition 4.27 *$f : E \to F$ est bornée $\Longleftrightarrow$*

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+ \textit{ tel que } \forall\, x \in E : \big|f(x)\big| \leq \alpha\,.$$

4.6 Supremum et infimum d'une fonction

Définition 4.28 Soit $f : E \to F$. Alors, $\inf\big\{f(x) : x \in E\big\}$ est appelé l'***infimum*** de la fonction f et on le note $\inf\limits_{x\in E} f(x)$.

Définition 4.29 Soit $f : E \to F$. Alors, $\sup\big\{f(x) : x \in E\big\}$ est appelé le ***supremum*** de la fonction f et on le note $\sup\limits_{x\in E} f(x)$.

4.7 Maximun et minimum d'une fonction

Définition 4.30 On dit que la fonction $f : E \to F$ admet un ***minimum local*** en $a \in E$, s'il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x \in E \cap]a-\delta\,,\, a+\delta[$ implique $f(a) \leq f(x)$.

Définition 4.31 On dit que la fonction $f : E \to F$ admet un ***maximum local*** en $a \in E$, s'il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x \in E \cap]a-\delta\,,\, a+\delta[$ implique $f(a) \geq f(x)$.

Définition 4.32 On dit que la $f : E \to F$ atteint son ***minimum*** en $a \in E$, si $f(a) = \inf_{x\in E} f(x)$. On écrit alors, $f(a) = \min_{x\in E} f(x)$.

Définition 4.33 On dit que la $f : E \to F$ atteint son ***maximum*** en $a \in E$, si $f(a) = \sup_{x\in E} f(x)$. On écrit alors, $f(a) = \max_{x\in E} f(x)$.

4.8 Limite d'une fonction

Définition 4.34 Une fonction $f : E \to F$ est dite ***définie au voisinage*** du point a, s'il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$]a-\gamma\,,\, a+\gamma[\subset E \cup \{a\}\,.$$

Définition 4.35 On dit qu'une fonction $f : E \to F$ définie au voisinage du point a admet pour ***limite*** $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a si à tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on peut associer $\delta_{a,\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x \in E$ et $0 < |x-a| \leq \delta_{a,\varepsilon}$ impliquent $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. On écrit alors, $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

Proposition 4.36 *Lorsque la limite d'une fonction existe, elle est unique.*

Proposition 4.37 *Soit $f : E \to F$ une fonction définie au voisinage du point a. Alors,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff$$
$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists\ \delta_{a,\varepsilon} > 0 \text{ tel que } x \in E \text{ et } 0 < |x-a| \leq \delta_{a,\varepsilon} \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon\,.$$

Proposition 4.38 *Une fonction $f : E \to F$ définie au voisinage du point a admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de $E\setminus\{a\}$ qui converge vers a, la suite des images $(f(x_n))$ converge vers ℓ.*

Proposition 4.39 *Soit une fonction $f : E \to F$ définie au voisinage du point a et supposons que pour toute suite (x_n) d'éléments de $E \setminus \{a\}$ qui converge vers a, la suite des images $(f(x_n))$ converge. Alors, la fonction f admet une limite lorsque x tend vers a.*

Exemple 4.40

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Exemple 4.41

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1\,.$$

4.8.1 Propriétés

On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell_1$ et $\lim_{x \to a} g(x) = \ell_2$.

1) Linéarité. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to a} (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \ell_1 + \beta \ell_2\,.$$

2)
$$\lim_{x \to a} (fg)(x) = \ell_1 \ell_2\,.$$

3) Si $\ell_2 \neq 0$ et $\forall\, x \in E \setminus \{a\} : g(x) \neq 0$,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}\,.$$

4)
$$\lim_{x \to a} |f(x)| = |\ell_1|\,.$$

Proposition 4.42 *On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x \to a} g(x) = \ell_2$ et que pour tout $x \in E \setminus \{a\} : f(x) \leq g(x)$. Alors, $\ell_1 \leq \ell_2$.*

Proposition 4.43 *On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ et que la fonction $g : E \to F$ est bornée. Alors, $\lim_{x \to a} (fg)(x) = 0$.*

Proposition 4.44 (Théorème des deux gendarmes) *Soient $f, g, h : E \to F$ trois fonctions satisfaisant les deux propriétés suivantes :*

1) $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell$;

2) $\forall\, x \in E \setminus \{a\} : g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

Alors, $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

Proposition 4.45 *Soient $f : E \to F$ une fonction telle que $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et $g : A \to B$ une fonction telle que $\lim_{y \to b} g(y) = \ell$. De plus, on suppose*

1) $\operatorname{Im} f \subset A$;

2) $\exists\, \alpha > 0$ tel que $x \in E$ et $0 < |x - a| \leq \alpha$ impliquent $f(x) \neq b$.

Alors, $\lim_{x \to a} g \circ f(x) = \ell$.

4.9 Limites infinies

Définition 4.46 Soit $f : E \to F$ une fonction définie au voisinage du point a. Alors, par définition

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \iff$$
$$\forall\, \eta > 0,\ \exists\ \delta_{a,\eta} > 0 \text{ tel que } x \in E \text{ et } 0 < |x-a| \le \delta_{a,\eta} \Rightarrow f(x) \ge \eta\,.$$

Définition 4.47 Soit $f : E \to F$ une fonction définie au voisinage du point a. Alors, par définition

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \iff$$
$$\forall\, \zeta < 0,\ \exists\ \delta_{a,\zeta} > 0 \text{ tel que } x \in E \text{ et } 0 < |x-a| \le \delta_{a,\zeta} \Rightarrow f(x) \le \zeta\,.$$

4.9.1 Propriétés

Soient $f, g : E \to F$ deux fonctions définies au voisinage du point a.

1) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell$ ou $+\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} (f+g)(x) = +\infty\,.$

2) $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell$ ou $-\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} (f+g)(x) = -\infty\,.$

3) $$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \text{ et } g \text{ bornée } \Rightarrow \lim_{x\to a} (f+g)(x) = +\infty\,.$$

4) $$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \text{ et } g \text{ bornée } \Rightarrow \lim_{x\to a} (f+g)(x) = -\infty\,.$$

5) $$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = \ell \neq 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to a} (fg)(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ell > 0 \\ -\infty & \text{si } \ell < 0. \end{cases}$$

6) $$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = \ell \neq 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to a} (fg)(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \ell > 0 \\ +\infty & \text{si } \ell < 0. \end{cases}$$

7) $$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \text{ et } g \text{ bornée} \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0\,.$$

8) $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\forall\, x \in E \setminus \{a\} : f(x) < 0$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell \neq 0$

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ell < 0 \\ -\infty & \text{si } \ell > 0. \end{cases}$$

9) $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\forall\, x \in E \setminus \{a\} : f(x) > 0$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell \neq 0$

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{si } \ell < 0 \\ +\infty & \text{si } \ell > 0. \end{cases}$$

4.9.2 Formes indéterminées

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$. Alors, $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = ?$

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$. Alors, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = ?$

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Alors, $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x) = ?$

4) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Alors, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = ?$

Remarque : Pour résoudre les formes indéterminées ci-dessus, la règle de Bernoulli-l'Hospital ainsi que le dévellopement limité peuvent être d'un grand secours.

4.10 Limites à l'infini

Définition 4.48 Une fonction $f : E \to F$ est dite ***définie au voisinage*** de $+\infty$, s'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $[c, +\infty[\subset E$.

Définition 4.49 Une fonction $f : E \to F$ est dite ***définie au voisinage*** de $-\infty$, s'il existe $d \in \mathbb{R}_-^*$ tel que $]-\infty, d] \subset E$.

Définition 4.50 Soit $f : E \to F$ une fonction définie au voisinage de $+\infty$. Alors, par définition

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \iff$$
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\ \alpha_\varepsilon > 0 \text{ tel que } x \in E \text{ et } x \geq \alpha_\varepsilon \Rightarrow \left|f(x) - \ell\right| \leq \varepsilon\,.$$

Définition 4.51 Soit $f : E \to F$ une fonction définie au voisinage de $+\infty$. Alors, par définition

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff$$
$$\forall\, \eta > 0,\ \exists\ \alpha_\eta > 0 \text{ tel que } x \in E \text{ et } x \geq \alpha_\eta \Rightarrow f(x) \geq \eta\,.$$

Définition 4.52 Soit $f : E \to F$ une fonction définie au voisinage de $+\infty$. Alors, par définition

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff$$
$$\forall\, \zeta < 0,\ \exists\ \alpha_\zeta > 0 \text{ tel que } x \in E \text{ et } x \geq \alpha_\zeta \Rightarrow f(x) \leq \zeta\,.$$

Définition 4.53 Soit $f : E \to F$ une fonction définie au voisinage de $-\infty$. Alors, par définition

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \iff$$
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\ \beta_\varepsilon < 0 \text{ tel que } x \in E \text{ et } x \leq \beta_\varepsilon \Rightarrow \left|f(x) - \ell\right| \leq \varepsilon\,.$$

Définition 4.54 Soit $f : E \to F$ une fonction définie au voisinage de $-\infty$. Alors, par définition

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow$$
$$\forall \eta > 0,\ \exists\, \beta_\eta < 0 \text{ tel que } x \in E \text{ et } x \leq \beta_\eta \Rightarrow f(x) \geq \eta\,.$$

Définition 4.55 Soit $f : E \to F$ une fonction définie au voisinage de $-\infty$. Alors, par définition

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow$$
$$\forall \zeta < 0,\ \exists\, \beta_\zeta < 0 \text{ tel que } x \in E \text{ et } x \leq \beta_\zeta \Rightarrow f(x) \leq \zeta\,.$$

Proposition 4.56 *Soit $f : E \to F$ une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et croissante. Alors,*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup_{x \in E} f(x)\,.$$

Proposition 4.57 *Soit $f : E \to F$ une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et décroissante. Alors,*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \inf_{x \in E} f(x)\,.$$

Proposition 4.58 *Soit $f : E \to F$ une fonction définie au voisinage de $-\infty$ et croissante. Alors,*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \inf_{x \in E} f(x)\,.$$

Proposition 4.59 *Soit $f : E \to F$ une fonction définie au voisinage de $-\infty$ et décroissante . Alors,*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \sup_{x \in E} f(x).$$

4.11 Limite à droite

Définition 4.60 Une fonction $f : E \to F$ est dite ***définie à droite*** du point a, s'il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$]a\,,\, a+\gamma[\ \subset E\,.$$

Définition 4.61 Soit $f : E \to F$ une fonction définie à droite du point a. Alors, par définition

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \ell \Longleftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta_{a,\varepsilon} > 0 \text{ tel que } x \in E \text{ et } 0 < x - a \leq \delta_{a,\varepsilon} \Rightarrow \big|f(x) - \ell\big| \leq \varepsilon\,.$$

Définition 4.62 Soit $f : E \to F$ une fonction définie à droite du point a. Alors, par définition

$$\lim_{x \to a+} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow$$
$$\forall\, \eta > 0,\ \exists\ \delta_{a,\eta} > 0 \text{ tel que } x \in E \text{ et } 0 < x - a \leq \delta_{a,\eta} \Rightarrow f(x) \geq \eta\,.$$

Définition 4.63 Soit $f : E \to F$ une fonction définie à droite du point a. Alors, par définition

$$\lim_{x \to a+} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow$$
$$\forall\, \zeta < 0,\ \exists\ \delta_{a,\zeta} > 0 \text{ tel que } x \in E \text{ et } 0 < x - a \leq \delta_{a,\zeta} \Rightarrow f(x) \leq \zeta\,.$$

Pour ces trois limites, on parle de ***limite à droite***. Les propriétés des limites quand x tend vers a restent valables.

Proposition 4.64 *Soit $f : \,]a, b] \to F$ une fonction croissante. Alors,*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \inf_{x \in \,]a,b]} f(x).$$

Proposition 4.65 *Soit $f : \,]a, b] \to F$ une fonction décroissante. Alors,*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \sup_{x \in \,]a,b]} f(x)\,.$$

4.12 Limite à gauche

Définition 4.66 Une fonction $f : E \to F$ est dite ***définie à gauche*** du point a, s'il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$]a - \gamma\,,\, a[\ \subset E\,.$$

Définition 4.67 Soit $f : E \to F$ une fonction définie à gauche du point a. Alors, par définition

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \ell \Longleftrightarrow$$
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta_{a,\varepsilon} > 0 \text{ tel que } x \in E \text{ et } 0 < a - x \leq \delta_{a,\varepsilon} \Rightarrow \big|f(x) - \ell\big| \leq \varepsilon\,.$$

Définition 4.68 Soit $f : E \to F$ une fonction définie à gauche du point a. Alors, par définition

$$\lim_{x \to a-} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow$$
$$\forall\, \eta > 0,\ \exists\ \delta_{a,\eta} > 0 \text{ tel que } x \in E \text{ et } 0 < a - x \leq \delta_{a,\eta} \Rightarrow f(x) \geq \eta$$

Définition 4.69 Soit $f : E \to F$ une fonction définie à gauche du point a. Alors, par définition

$$\lim_{x \to a-} f(x) = -\infty \iff$$
$$\forall \zeta < 0,\ \exists\ \delta_{a,\zeta} > 0 \text{ tel que } x \in E \text{ et } 0 < a - x \leq \delta_{a,\zeta} \Rightarrow f(x) \leq \zeta\,.$$

Pour ces trois limites, on parle de ***limite à gauche***. Les propriétés des limites quand x tend vers a restent valables.

Proposition 4.70 *Soit $f : [a, b[\ \to F$ une fonction croissante. Alors,*

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \sup_{x \in [a,b[} f(x)\,.$$

Proposition 4.71 *Soit $f : [a, b[\ \to F$ une fonction décroissante. Alors,*

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \inf_{x \in [a,b[} f(x)\,.$$

Proposition 4.72 *Soit $f : E \to F$ une fonction définie au voisinage du point a. Alors,*

1) $$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = \ell\,.$$

2) $$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = +\infty\,.$$

3) $$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \iff \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = -\infty\,.$$

4.13 Fonctions continues

Définition 4.73 Une fonction $f : E \to F$ est dite ***continue*** en $a \in E$ si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\,.$$

Proposition 4.74 *Soit $f : E \to F$ une fonction définie au voisinage du point $a \in E$. Alors,*

$$f \text{ continue en } a \iff$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta_{a,\varepsilon} > 0 \text{ tel que } x \in E \text{ et } \big|x - a\big| \leq \delta_{a,\varepsilon} \Rightarrow \big|f(x) - f(a)\big| \leq \varepsilon$$

Proposition 4.75 *Une fonction $f : E \to F$ définie au voisinage du point $a \in E$ est continue en a si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de E qui converge vers a, la suite des images $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.*

4.13.1 Propriétés

Soient f, $g : E \to F$ deux fonctions continues en a. Alors,

1) Linéarité. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: la fonction $(\alpha f + \beta g)$ est continue en a.
2) Les fonctions fg, f/g, $|f|$, f^+ et f^- sont continues en a.
3) Les deux fonctions h_1, $h_2 : E \to F$ définies respectivement par

$$h_1(x) = \max\bigl\{f(x), g(x)\bigr\} = \frac{1}{2}\,\bigl(f(x) + g(x) + \bigl|f(x) - g(x)\bigr|\bigr)$$

et

$$h_2(x) = \min\bigl\{f(x), g(x)\bigr\} = \frac{1}{2}\,\bigl(f(x) + g(x) - \bigl|f(x) - g(x)\bigr|\bigr)$$

sont continues en a.

Proposition 4.76 *Soient $f : E \to F$ une fonction continue en a et $g : A \to B$ une fonction continue en $f(a)$. De plus, on suppose que* $\operatorname{Im} f \subset A$. *Alors, la fonction composée $g \circ f : E \to F$ est continue en a.*

Définition 4.77 Soient $a \notin E$ et $f : E \to F$ une fonction telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, la fonction $\widehat{f} : E \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

est appelée le ***prolongement par continuité*** de la fonction f en a.

4.14 Continuité unilatérale

Définition 4.78 Une fonction $f : E \to F$ est dite ***continue à droite*** en $a \in E$ si

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)\,.$$

Les propriétés données pour la continuité en un point restent valables.

Définition 4.79 Une fonction $f : E \to F$ est dite ***continue à gauche*** en $a \in E$ si

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)\,.$$

Les propriétés données pour la continuité en un point restent valables.

Proposition 4.80 *Une fonction $f : E \to F$ est continue en $a \in E$ si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en a.*

4.15 Continuité sur un sous-ensemble

Définition 4.81 Une fonction $f : E \to F$ est dite ***continue*** si elle est continue en chaque point de E.

Définition 4.82 On désigne par $\mathbf{C}(E, F)$ l'ensemble des fonctions continues $f : E \to F$.

Définition 4.83 Soit $a < b$. La fonction $f : [a, b] \to F$ est dite ***continue*** si elle est continue en chaque point de l'intervalle ouvert $]a, b[$, continue à droite en a et à gauche en b.

Définition 4.84 Soit $a < b \leq +\infty$. La fonction $f : [a, b[\ \to F$ est dite ***continue*** si elle est continue en chaque point de l'intervalle ouvert $]a, b[$ et continue à droite en a.

Définition 4.85 Soit $-\infty \leq a < b$. La fonction $f : \ ]a, b] \to F$ est dite ***continue*** si elle est continue en chaque point de l'intervalle ouvert $]a, b[$ et continue à gauche en b.

Proposition 4.86 (Théorème de la valeur intermédiaire) *Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to F$ une fonction continue. Alors, f atteint son minimum, son maximum et toute valeur comprise entre ces deux valeurs. Autrement dit,*

$$\operatorname{Im} f = \left[\min_{a \leq x \leq b} f(x) \, , \, \max_{a \leq x \leq b} f(x) \right].$$

Le théorème de la valeur intermédiaire implique, entre autres, que la fonction f prend toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

Proposition 4.87 *Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to F$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) \leq 0$. Alors, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle fermé $[a, b]$.*

Proposition 4.88 *Soit $f : [a, b] \to F$ une fonction continue et injective. Alors,*

1) Si $f(a) < f(b)$, la fonction f est strictement croissante.

2) Si $f(a) > f(b)$, la fonction f est strictement décroissante.

Proposition 4.89 *Soient I un intervalle et $f : I \to F$ une fonction continue. Alors,* $\operatorname{Im} f$ *est un intervalle.*

Proposition 4.90 *Soient I un intervalle et $f : I \to F$ une fonction continue et injective. Alors, f est strictement monotone. De plus,* *1) Si $I =]a, b[$:*

$$\operatorname{Im} f = \begin{cases} \left] \lim_{x \to a+} f(x)\,,\ \lim_{x \to b-} f(x) \right[& \textit{si } f \textit{ est croissante} \\ \left] \lim_{x \to b-} f(x)\,,\ \lim_{x \to a+} f(x) \right[& \textit{si } f \textit{ est décroissante.} \end{cases}$$

2) Si $I = [a, b[$:

$$\operatorname{Im} f = \begin{cases} \left[f(a)\,,\ \lim_{x \to b-} f(x) \right[& \textit{si } f \textit{ est croissante} \\ \left] \lim_{x \to b-} f(x)\,,\ f(a) \right] & \textit{si } f \textit{ est décroissante.} \end{cases}$$

3) Si $I =]a, b]$:

$$\operatorname{Im} f = \begin{cases} \left] \lim_{x \to a+} f(x)\,,\ f(b) \right] & \textit{si } f \textit{ est croissante} \\ \left[f(b)\,,\ \lim_{x \to a+} f(x) \right[& \textit{si } f \textit{ est décroissante.} \end{cases}$$

4) Si $I = [a, b]$:

$$\operatorname{Im} f = \begin{cases} \left[f(a)\,,\ f(b) \right] & \textit{si } f \textit{ est croissante} \\ \left[f(b)\,,\ f(a) \right] & \textit{si } f \textit{ est décroissante.} \end{cases}$$

Proposition 4.91 *Soient I un intervalle et $f : I \to F$ une fonction continue et bijective. Alors, sa fonction réciproque $f^{-1} : F \to I$ est continue et strictement monotone.*

4.16 Continuité uniforme

Définition 4.92 Soit I un intervalle. Une fonction $f : I \to F$ est dite ***uniformément continue*** si à tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on peut associer $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que x, $y \in I$ et $|x - y| \leq \delta_\varepsilon$ impliquent $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Proposition 4.93 *Soit I un intervalle. Une fonction $f : I \to F$ uniformément continue est continue.*

Proposition 4.94 *Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to F$ une fonction continue. Alors, f est uniformément continue.*

4.17 Convergence simple

Définition 4.95 On dit qu'une suite (f_n) d'éléments de $\mathbf{F}(E,F)$ ***converge simplement*** vers la fonction $f : E \to F$ si pour tout $x \in E$:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \, .$$

Une telle fonction f étant unique, on dit que f est la ***limite simple*** de la suite (f_n).

4.18 Convergence uniforme

Définition 4.96 On dit qu'une suite (f_n) d'éléments de $\mathbf{F}(E,F)$ ***converge uniformément*** vers la fonction $f : E \to F$ si à tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on peut associer un entier $n_\varepsilon > 0$ tel que $n \geq n_\varepsilon$ implique

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \, .$$

Une telle fonction f étant unique, on dit que f est la ***limite uniforme*** de la suite (f_n).

Proposition 4.97 Si *une suite (f_n) d'éléments de $\mathbf{F}(E,F)$ converge uniformément vers la fonction $f : E \to F$, elle converge aussi simplement vers cette fonction.*

Proposition 4.98 (Linéarité) *Soient (f_n) et (g_n) deux suites d'éléments de $\mathbf{F}(E,F)$ qui respectivement convergent uniformément vers les fonctions f et g. Alors, pour tout couple α et β de $\mathbb{R}$, la suite $(\alpha f_n + \beta g_n)$ converge uniformément vers $\alpha f + \beta g$.*

Proposition 4.99 *Soit (f_n)une suite d'éléments de $\mathbf{F}(E,F)$ qui converge uniformément vers la fonction $f : E \to F$. De plus, on suppose que toutes les fonctions f_n sont continues en a. Alors, la fonction f est aussi continue en a.*

Proposition 4.100 *Soit (f_n)une suite d'éléments de $\mathbf{C}(E,F)$ qui converge uniformément vers la fonction $f : E \to F$. Alors, $f \in \mathbf{C}(E,F)$.*

Proposition 4.101 (Théorème de Dini) *Soit $a < b$. Toute suite monotone (f_n) d'éléments de $\mathbf{C}([a,b],F)$ qui converge simplement vers une fonction continue $f : [a,b] \to F$, converge uniformément vers f.*

Proposition 4.102 *Soient $a < b$ et (f_n) une suite d'éléments de $\mathbf{F}([a,b],F)$ qui converge simplement vers la fonction continue $f : [a,b] \to F$. De plus, on suppose que toutes les fonctions f_n sont croissantes (resp. décroissantes). Alors, la convergence est uniforme.*

Proposition 4.103 (Permutation des limites) *Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathbf{F}(E,F)$ qui converge uniformément vers la fonction $f : E \to F$. De plus, on suppose que pour tout entier $n \geq 0$: $\lim_{x\to a} f_n(x) = \ell_n \in \mathbb{R}$. Alors, les deux limites*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) \text{ et } \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$$

existent et sont égales.

Ce résultat reste valable si l'on remplace a par $-\infty$ ou $+\infty$.

4.19 Fonctions trigonométriques

4.19.1 Fonction arc sinus

Définition 4.104 La fonction $\sin : \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ étant bijective, elle admet une fonction réciproque appelée ***arc sinus*** et notée Arcsin. Cette fonction $\operatorname{Arcsin} : [-1,1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est continue, strictement croissante et impaire.

$$y = \operatorname{Arcsin} x \Longleftrightarrow x = \sin y \text{ et } y \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

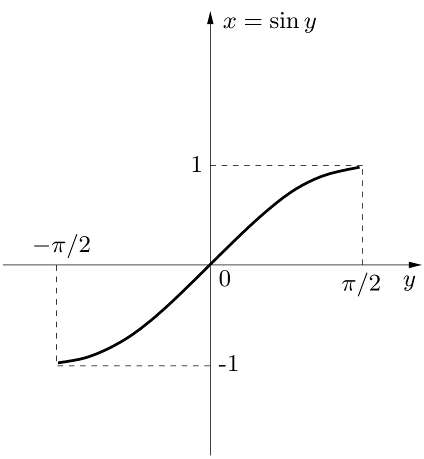


Fig. 4.2

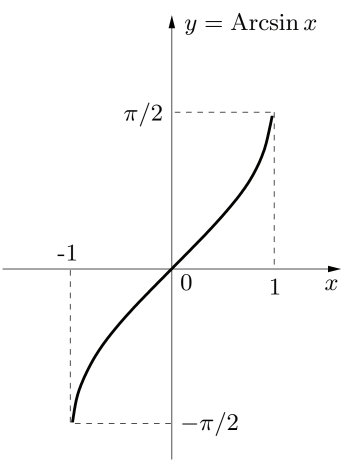


Fig. 4.3

4.19.2 Fonction arc cosinus

Définition 4.105 La fonction $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ étant bijective, elle admet une fonction réciproque appelée ***arc cosinus*** et notée Arccos. Cette fonction $\operatorname{Arccos} : [-1,1] \to [0,\pi]$ est continue et strictement décroissante.

$$y = \operatorname{Arccos} x \Longleftrightarrow x = \cos y \text{ et } y \in [0,\pi].$$

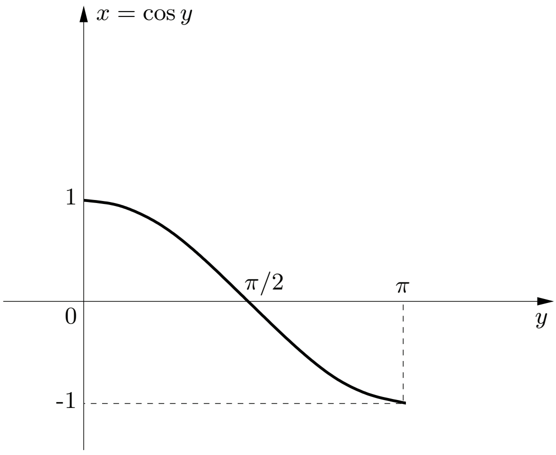


Fig. 4.4

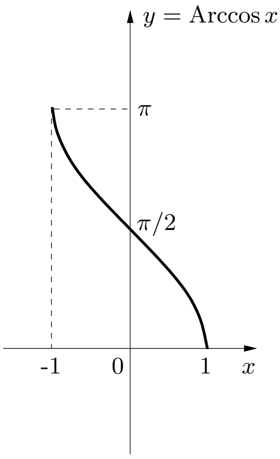


Fig. 4.5

4.19.3 Fonction arc tangente

Définition 4.106 La fonction tg : $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ étant bijective, elle admet une fonction réciproque appelée ***arc tangente*** et notée Arctg. Cette fonction Arctg : $\mathbb{R} \to \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est continue, strictement croissante et impaire.

$$y = \operatorname{Arctg} x \Longleftrightarrow x = \operatorname{tg} y \text{ et } y \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

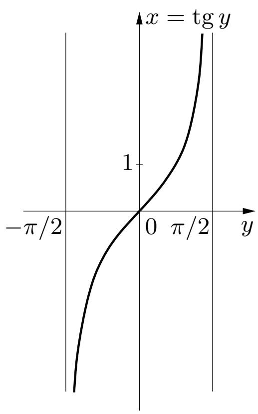


Fig. 4.6

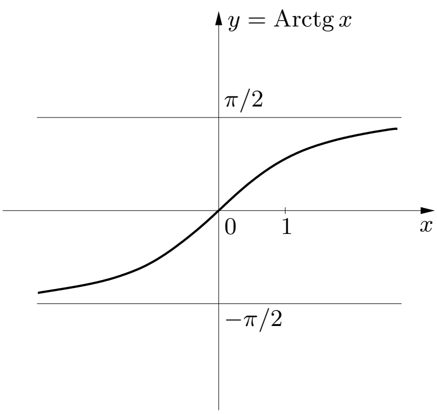


Fig. 4.7

4.19.4 Fonction arc cotangente

Définition 4.107 La fonction cotg : $]0, \pi[\to \mathbb{R}$ étant bijective, elle admet une fonction réciproque appelée ***arc cotangente*** et notée Arccotg. Cette fonction Arccotg : $\mathbb{R} \to]0, \pi[$ est continue et strictement décroissante.

$$y = \operatorname{Arccotg} x \Longleftrightarrow x = \operatorname{cotg} y \text{ et } y \in]0, \pi[.$$

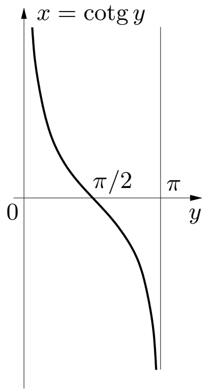


Fig. 4.8

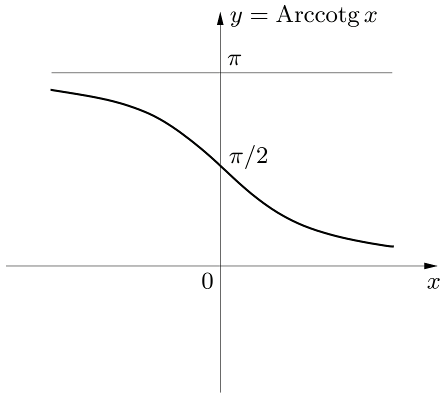


Fig. 4.9

4.20 Fonction exponentielle

Définition 4.108 Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ est absolument convergente (critère de d'Alembert), on pose, par définition

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} .$$

La fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $\exp(x) = e^x$ est appelée fonction ***exponentielle***. Elle est continue, strictement croissante et bijective.

Par convention : $0^0 = 0! = 1$.

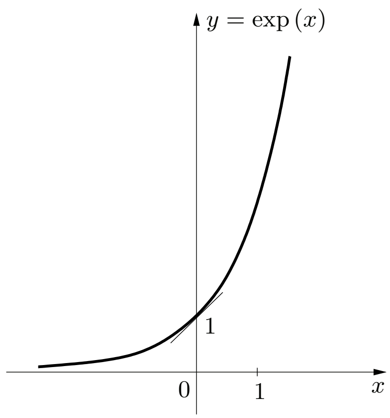


Fig. 4.10

Propriétés

1) $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $$e^x > 0\,.$$

2) $$e^0 = 1 \text{ et } e^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

3) $$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty\,.$$

4) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$: $$e^{x+y} = e^x\, e^y\,.$$

5) $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $$e^{-x} = \frac{1}{e^x}\,.$$

6) $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}$: $$e^x > \frac{x^k}{k!} \text{ et } e^{-x} < \frac{k!}{x^k}\,.$$

7) $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $$e^x = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

4.21 Fonction logarithme népérien

Définition 4.109 La fonction exponentielle étant une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, elle admet une fonction réciproque, appelée ***logarithme népérien*** et notée ln. Cette fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante. Par définition,

$$y = \ln x \Longleftrightarrow x = e^y\,.$$

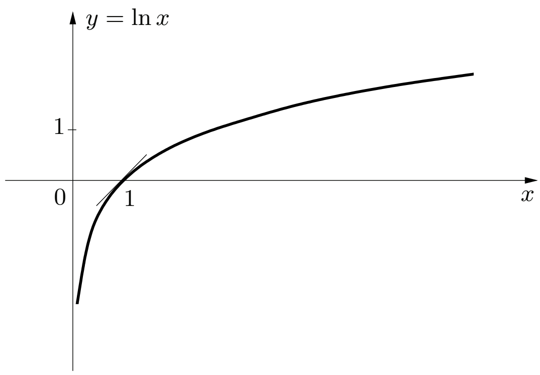


Fig. 4.11

Propriétés

1) $$\ln 1 = 0 \text{ et } \ln e = 1\,.$$

2) $$\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty\,.$$

3) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*$: $$\ln xy = \ln x + \ln y \text{ et } \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y\,.$$

4) $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $$\ln e^x = x\,.$$

4.22 Fonction logarithme de base a

Soient $a > 0$ et $a \neq 1$. La fonction notée $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et définie par

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},$$

est appelée ***logarithme de base*** a. Cette fonction est continue, bijective, strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $0 < a < 1$.

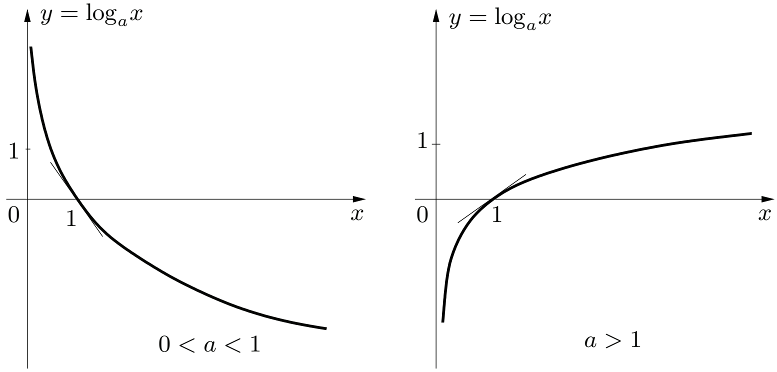


Fig. 4.12 **Fig. 4.13**

Propriétés

1) $$\log_a 1 = 0 \text{ et } \log_a a = 1\,.$$

2) Si $0 < a < 1$: $\lim\limits_{x\to 0+} \log_a x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty\,.$

3) Si $a > 1$: $\lim\limits_{x\to 0+} \log_a x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty\,.$

4) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\log_a x\,y = \log_a x + \log_a y \text{ et } \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y\,.$$

4.23 Fonction exponentielle de base a

Définition 4.110 Soient $a > 0$ et $a \neq 1$. La fonction $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ étant bijective, elle admet une fonction réciproque, appelée fonction ***exponentielle de base*** a et notée $\exp_a$. Cette fonction $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est continue, strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $0 < a < 1$. De plus, par définition, on pose

$$a^x = \exp_a x\,.$$

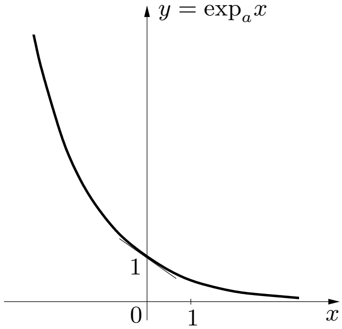


Fig. 4.14

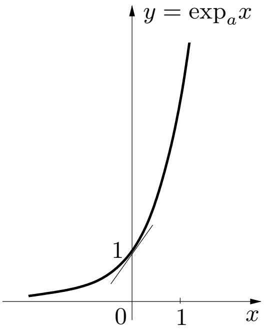


Fig. 4.15

Propriétés

1) $\forall x \in \mathbb{R}$: $$a^x = \exp_a x = e^{x \ln a}\,.$$

2) $$a^0 = 1 \text{ et } a^1 = a\,.$$

3) Si $0 < a < 1$: $$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} a^x = 0\,.$$

4) Si $a > 1$: $$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty\,.$$

5) $\forall x \in \mathbb{R}$: $$\ln a^x = x \ln a \text{ et } \log_a a^x = x\,.$$

6) $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $$a^{x+y} = a^x a^y \text{ et } (a^x)^y = a^{xy}\,.$$

7) $\forall x \in \mathbb{R}$: $$a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x\,.$$

8) $\forall x \in \mathbb{R}$: $$(ab)^x = a^x b^x \text{ et } \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}\,.$$

4.24 Fonction puissance

Définition 4.111 Soit α un nombre réel fixé. La fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ définie par

$$f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x},$$

est appelée fonction ***puissance***. Cette fonction est continue, strictement croissante si $\alpha > 0$, constante si $\alpha = 0$ et strictement décroissante si $\alpha < 0$.

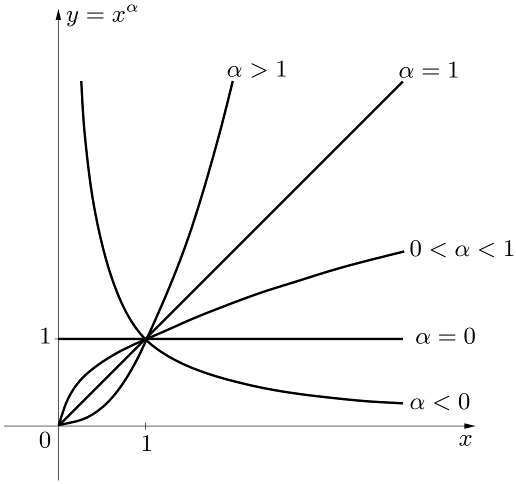


Fig. 4.16

Propriétés

1) Si $\alpha < 0$: $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = 0\,.$

2) Si $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty\,.$

3) $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$: $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x\,.$

4) $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$: $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$ et $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}\,.$

5) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*$: $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha\,.$

6) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*$: $\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}\,.$

7) Si $0 < a < 1$ et $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = 0\,.$

8) Si $a > 1$: $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty\,.$

9) $\forall\, \alpha > 0$: $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log_a x}{x^\alpha} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha \log_a x = 0\,.$

4.25 Fonctions hyperboliques

4.25.1 Fonction sinus hyperbolique

Définition 4.112 Soit $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,.$$

Cette fonction est appelée fonction ***sinus hyperbolique***. Elle est continue, bijective, strictement croissante et impaire.

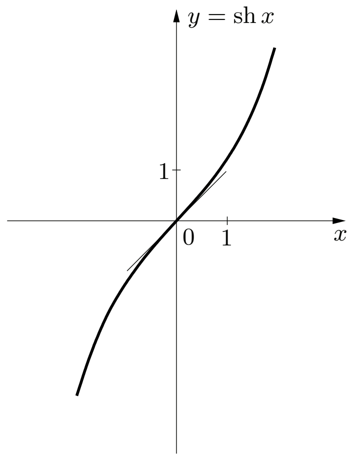


Fig. 4.17

4.25.2 Fonction sinus hyperbolique inverse

Définition 4.113 La fonction sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étant bijective, elle admet une fonction réciproque appelée ***argument sinus hyperbolique*** et notée Argsh. Cette fonction Argsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante et impaire. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right).$$

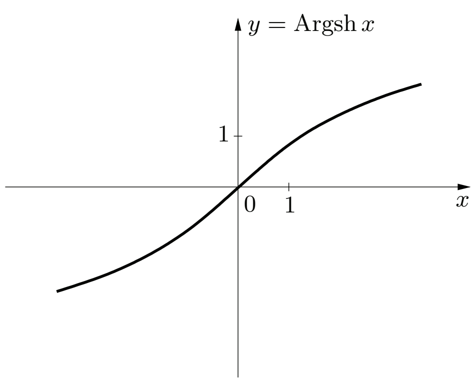


Fig. 4.18

4.25.3 Fonction cosinus hyperbolique

Définition 4.114 Soit ch : $\mathbb{R} \to [1, +\infty[$ la fonction définie par

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Cette fonction est appelée fonction ***cosinus hyperbolique***. Elle est continue et paire. De plus, elle est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

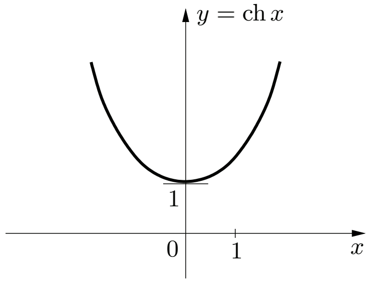


Fig. 4.19

4.25.4 Fonction cosinus hyperbolique inverse

Définition 4.115 La fonction $\operatorname{ch} : [0, +\infty[\ \to [1, +\infty[$ étant bijective, elle admet une fonction réciproque appelée ***argument cosinus hyperbolique*** et notée Argch. Cette fonction $\operatorname{Argch} : [1, +\infty[\ \to [0, +\infty[$ est continue et strictement croissante. De plus, pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\operatorname{Argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

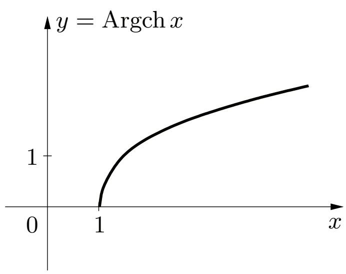


Fig. 4.20

4.25.5 Fonction tangente hyperbolique

Définition 4.116 Soit $\operatorname{th} : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ la fonction définie par

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Cette fonction est appelée fonction ***tangente hyberbolique***. Elle est continue, bijective, strictement croissante et impaire.

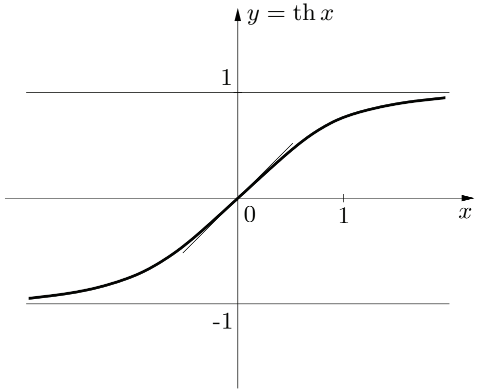


Fig. 4.21

4.25.6 Fonction tangente hyperbolique inverse

Définition 4.117 La fonction $\operatorname{th} : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ étant bijective, elle admet une fonction réciproque appelée ***argument tangente hyperbolique*** et notée Argth. Cette fonction $\operatorname{Argth} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante et impaire. De plus, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

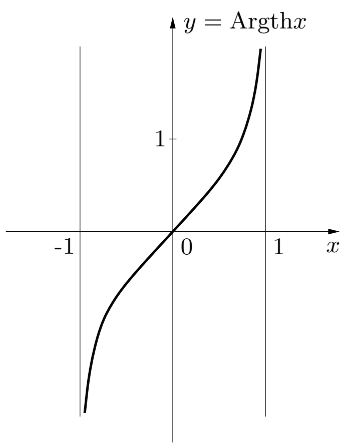


Fig. 4.22

4.25.7 Fonction cotangente hyperbolique

Définition 4.118 Soit $\coth : \mathbb{R}^* \to]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ la fonction définie par

$$\coth x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Cette fonction est appelée fonction ***cotangente hyberbolique***. Elle est continue, bijective et impaire. De plus, elle est strictement décroissante sur chacun des deux intervalles ouverts $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

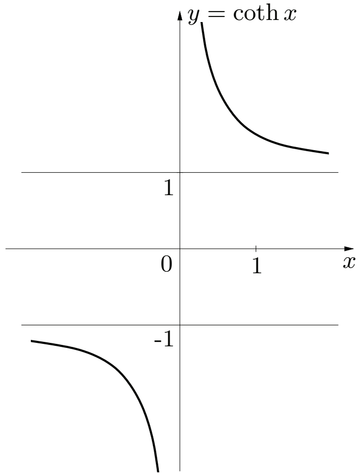


Fig. 4.23

4.25.8 Fonction cotangente hyperbolique inverse

Définition 4.119 La fonction $\coth : \mathbb{R}^* \to]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ étant bijective, elle admet une fonction réciproque appelée ***argument cotangente hyperbolique*** et notée Argcoth. Cette fonction $\text{Argcoth} :]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\to \mathbb{R}^*$ est continue, impaire et strictement décroissante sur chacun des deux intervalles ouverts $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$. De plus, pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$:

$$\text{Argcoth}\, x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

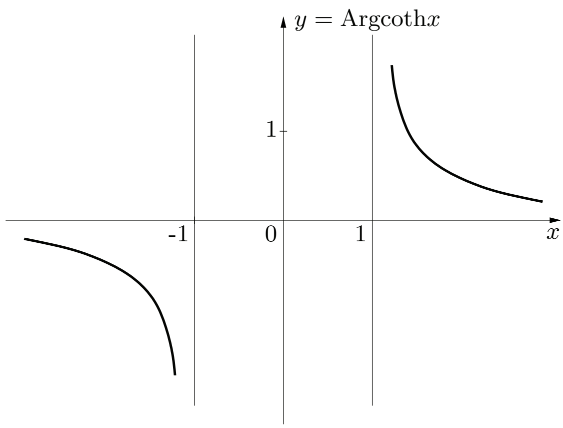


Fig. 4.24

4.26 Exercices

Montrer à l'aide de la définition de la limite que

4.1 $\lim\limits_{x\to 2}(4x+5)=13\,.$

4.2 $\lim\limits_{x\to -3}\left(|x|-x^3\right)=30\,.$

4.3 Calculer
$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^3+3x}{6x}\,.$$

4.4 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}\,.$$

4.5 Soient $\alpha\in\mathbb{R}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer
$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\alpha)^n-\alpha^n}{x}\,.$$

Calculer

4.6 $\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}\,.$

4.7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}\,.$

4.8 $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{2x+1}\,.$

4.9 $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right).$

4.10 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\operatorname{Arctg}x.$

4.11 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}}\,.$

4.12 $\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}\,.$

4.13
$$\lim_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)}-1\right).$$

4.14 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}\,.$

4.15 $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right).$

4.16 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}\,.$

Calculer

4.17
$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^2+1}\right).$$

4.18 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+x^2}-\sqrt[3]{x+2x^3}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2x-x^2}}\,.$

4.19 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer
$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{2}}{x-2}\,.$$

Calculer

4.20 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}\,.$

4.21 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-x^3+x^2-x}{x^2-1}\,.$

4.22 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3+x^2+1}{x^3+x}\,.$

4.23 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right).$

4.24 $\lim\limits_{x\to 0}[x]\,.$

4.25 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{1+[x]}\,.$

4.26 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right].$

Montrer que

4.27 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\,.$

4.28 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=1\,.$

Calculer

4.29 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{x}\,.$

4.30 $\lim\limits_{x\to +\infty}x\sin\dfrac{1}{x}\,.$

4.31 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}\,.$

4.32 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\,.$

4.33 $\lim\limits_{x\to 0+}\operatorname{Arctg}\dfrac{1}{x}\,.$

4.34 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-\cos x}{x+\sin x}\,.$

4.35 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$.

4.36 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{x \sin 5x}$.

4.37 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x^2}{x^6 + 3x^2}$.

4.38 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\,(x-1)\sin(x-1)}{x^3 - 3x + 2}$.

4.39 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 6x - \cos 8x}{x^2}$.

4.40 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 6x - \sin^2 4x}{\operatorname{tg}^2 x}$.

4.41 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin 2x - \sin 4}{x - 2}$.

4.42 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x - 1}{x^2}$.

4.43 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - 1}{\sin x^2}$.

4.44 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{|x|}$.

4.45 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^3 x \sin \dfrac{1}{x}}{1 - \cos x}$.

4.46 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x^2 \operatorname{Arctg} \dfrac{1}{x^4}}{(1-\cos x)^2}$.

4.47 Soient α, $\beta \in \mathbb{R}^*$. Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin \alpha x}{1 - \cos \beta x}.$$

Calculer

4.48 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 \sin \dfrac{1}{x}}{\operatorname{tg}^2 x}$.

4.49 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\left(\sqrt{x+1} - 1\right)}{x}$.

4.50 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{\sin^3 x}$.

4.51 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x)\operatorname{tg} x}{x^2}$.

4.52 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cotg} 4x - \operatorname{cotg} 3x}$.

4.53 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\operatorname{tg}(x-1)}{1 - \sin \dfrac{\pi}{2} x}$.

4.54 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 + \cos \pi x}{\sin^2 \pi x}$.

4.55 Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Calculer

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{x^3 - \alpha^3}{\sin\left(\dfrac{\pi}{\alpha} x\right)}.$$

4.56 Calculer $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1 - 2\cos x}{\sin(\pi - 3x)}$.

4.57 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer

$$\lim_{x\to\alpha} \sqrt{\frac{\cos\left(\dfrac{\pi x}{2\alpha}\right)}{\alpha - x}}.$$

Calculer

4.58 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5\, e^{-x^2}$.

4.59 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 5^{-x}$.

4.60

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(e^{x+\frac{1}{x}} - e^x\right)\left(e^{-x+\frac{1}{x}} - e^{-x}\right).$$

4.61 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x^{-4}}}{\sin x^2}$.

4.62 $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sin x}$.

4.63 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(3x^3+1\right) - 3\ln x}{x \sin \dfrac{1}{x}}$.

4.64 $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x \ln(1-x)$.

4.65 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{25}\, e^{-x}$.

4.66 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\, e^{-2x} + \sqrt{x}\, e^{-\sqrt{x}}\right)$.

4.67 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2^x + 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$.

4.68 Soit $\alpha > 0$. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty.$$

4.69 Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la limite

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{x^3 + 6\alpha x^6 - 7\alpha^4 x}{\alpha^3 - x^3}$$

existe-t-elle ?

4.70 Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la limite

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\left(x^3 - 2\alpha x^2 + \alpha^4 x\right) \ln|x|}{(x-1)(x-\alpha)^2}$$

existe-t-elle ?

4.71 Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la limite

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\left(x^4 - 2\alpha x^3 + 4x^2\right) \operatorname{tg}^2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^4}$$

existe-t-elle ?

4.72 Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la limite

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\left(\alpha^5 x^5 - 2\alpha^2 x^4 + x^2\right) \operatorname{tg}(x-\alpha)}{\sin^2(x-\alpha)}$$

existe-t-elle ?

4.73 Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la limite

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{x^4 + \alpha x^3 - 8\alpha x}{\sin\left(\alpha^4 - x^4\right)}$$

existe-t-elle ?

4.74 Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la limite

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{x^6 - 2\alpha x^5 + (\alpha+1)\, x^4}{(x-\alpha) \operatorname{tg}(x-\alpha)}$$

existe-t-elle ?

4.75 Pour quelles valeurs de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \dfrac{1}{x} + \alpha\,|x|}{\sqrt{x^2 + \beta \left|\cos \dfrac{1}{x}\right|}}$$

existe-t-elle ?

4.76 Pour quelles valeurs de α, $\beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\alpha^2 - 1\right)(\beta - 2) + 4x + x^3}{\alpha^2 (\beta+2)\, x + \alpha\beta x^2} = 1\ ?$$

4.77 Pour quelles valeurs de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\alpha^4 - 1)(\beta - 4) + 4\beta x + 6x^2}{\alpha^2(\beta+2)x + (\alpha^2 + \beta^2)x^2} = 8\ ?$$

4.78 Pour les deux fonctions f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et

$$g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geq 3 \\ x & \text{si } x < 3, \end{cases}$$

calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

4.79 Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes. Montrer que la fonction composée $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est aussi croissante.

4.80 Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions décroissantes. Montrer que la fonction composée $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante.

4.81 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

4.82 Soit $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ une fonction impaire. Montrer que f est identiquement nulle.

4.83 1) Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont la courbe $\mathbf{C}$ est symétrique par rapport à la première bissectrice sans être celle-ci, n'est pas croissante.

2) En dédutre que si f est continue, elle est strictement décroissante.

3) Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non décroissante dont la courbe $\mathbf{C}$ est symétrique par rapport à la première bissectrice.

4.84 Montrer que la courbe C de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet le point $\Omega = (a, b)$ pour centre de symétrie si et seulement si la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(a+t) - b$ est impaire.

4.85 Montrer que la courbe C de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet pour axe de symétrie la droite verticale $x = a$ si et seulement si la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(a+t)$ est paire.

4.86 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 25}.$$

Trouver $\operatorname{Im} f$. La fonction f est-elle injective ?

4.87 Montrer que la fonction $f :]-1,0[\to]0,1[$ définie par

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

est bijective. Calculer sa fonction réciproque f^{-1}.

4.88 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x}}$$

est bijective. Calculer sa fonction réciproque f^{-1}.

4.89 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 4}{e^x}$$

est bijective. Calculer sa fonction réciproque f^{-1}.

4.90 Montrer que la fonction $f : [0,+\infty[\to [1,+\infty[$ définie par

$$f(x) = \frac{2\,e^{2x}}{1+e^x}$$

est bijective. Calculer sa fonction réciproque f^{-1}.

4.91 Soient f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les deux fonctions définies respectivement par

$$f(x) = [x] + \big(x - [x]\big)^2$$

et

$$g(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}\,.$$

Montrer que $g = f^{-1}$.

4.92 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective et impaire. Montrer que sa fonction réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est aussi impaire.

4.93 Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$:

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}\,.$$

4.94 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arccotg} x = \frac{\pi}{2}\,.$$

4.95 Pour $x \in [-1,1]$, simplifier

$$\operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$

4.96 Pour $x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, simplifier

$$\operatorname{Arcsin}\sqrt{1-\cos^2 x}\,.$$

4.97 Pour $x \in]-\pi,\pi[$, simplifier

$$\operatorname{Arctg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\,.$$

4.98 Pour $x \in [0,2\pi]$, simplifier

$$\operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\,.$$

4.99 Pour $x \in [0,2\pi]$, simplifier

$$\operatorname{Arccos}\sqrt{\frac{1+\cos^4 x - \sin^4 x}{2}}\,.$$

4.100 Pour $x \in [0,\pi]$, simplifier

$$\operatorname{Arccos}\left|\cos^2 x - \sin^2 x\right|.$$

4.101 Démontrer que pour tout $x \in [-1,1]$:

$$\operatorname{Arccos}\left(1-2x^2\right) = 2\operatorname{Arcsin}|x|\,.$$

Résoudre

4.102

$$\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 0\,.$$

4.103

$$\operatorname{Arcsin} 2x - \operatorname{Arcsin}\sqrt{3}\,x = \operatorname{Arcsin} x\,.$$

4.104 $\operatorname{Arcsin}\sqrt{5x-7x^2} = \operatorname{Arccos} x\,.$

4.105

$$\operatorname{Arctg}(1-2x) - \operatorname{Arctg}\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\,.$$

4.106 Pour quelle valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f : \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\operatorname{Arctg}\left(\dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}\right) & \text{si } 0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \alpha & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est-elle continue en 0 ?

Résoudre

4.107 $\log_x 4^x = \dfrac{x}{3}$.

4.108 $2^{2x} - 2^{x+1} + 1 = 0$.

4.109 $2^{4x-2} - 2^{2x} - 3 = 0$.

4.110 $\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 13 \\ \ln x^2 + \ln y^2 = 2\ln 6\,. \end{array}\right.$

4.111 $\left\{\begin{array}{l} x^y = y^x \\ x^3 = y^2\,. \end{array}\right.$

4.112 Soit $a \neq b$. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} a & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ b & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{array}\right.$$

est discontinue en chacun de ses points.

4.113 Etudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^4 \lim_{n\to+\infty} \frac{x^n - 1}{x^{2n} + 1}\,.$$

4.114 Etudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos^{2n} x}{1 + \sin^{2n} x}\right).$$

4.115 Etudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \lim_{m\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} \cos^{2n}(m!\pi x)\right).$$

4.116 Etudier la continuité de la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+2}\left(1 + \sin^{2n} x\right)}{\sqrt{x^{2n} + 2^{2n}}}\,.$$

4.117 Etudier la continuité de la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+3}(1 + \cos^{4n} x)}{\sqrt[3]{x^{3n} + 5^{3n}}}\,.$$

4.118 Etudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} x^2\left[\dfrac{1}{x}\right] & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{array}\right.$$

4.119 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{array}\right.$$

est continue en $\frac{1}{2}$ et discontinue ailleurs.

4.120 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{x}\, e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x \sin\left(\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}\right) & \text{si } x > 0 \end{array}\right.$$

est continue en 0.

4.121 Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = x \sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{\sqrt{|x|}}\,.$$

Peut-on la prolonger par continuité en 0 ?

4.122 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} \sqrt{x^4 + 1} - (ax^2 + b) & \\ \quad + \dfrac{1 - \cos(cx)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{array}\right.$$

Trouver a, b, $c \in \mathbb{R}$ de sorte que f est continue en 0 et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -3$.

4.123 Soit $f : E \to F$ une fonction qui n'est pas localement constante au voisinage du point a et supposons qu'il existe un nombre réel ℓ et une fonction $\delta : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant la propriété suivante :

$$x \in E \text{ et } 0 < |x - a| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left|f(x) - \ell\right| \leq \varepsilon$$

pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\lim\limits_{\varepsilon\to0+} \delta(\varepsilon) = 0$.

4.124 Trouver le maximum et le minimum de la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left|x^2 - x\right| + |x|$.

4.125 Soient $f,\, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que

$$\max_{a\leq x\leq b} f(x) + \min_{a\leq x\leq b} g(x) \leq \max_{a\leq x\leq b}\big(f(x)+g(x)\big)\,.$$

4.126 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante sur $]-\infty, 0[$, croissante sur $]0,+\infty[$ et continue en 0. Montrer que f atteint son minimum en ce point.

4.127 Soient $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f admet un maximum local en a et un autre en b. Montrer qu'il existe $c \in\,]a,b[$ pour lequel f admet un minimum local.

4.128 Soient $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $\operatorname{Im} f = [f(a)\,,\, f(b)]$. Montrer que f est continue.

4.129 1) Soit I un intervalle. Montrer que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est monotone si et seulement si pour tout triplet $x \leq y \leq z$ de I :

$$\big(f(y)-f(x)\big)\big(f(y)-f(z)\big) \leq 0\,.$$

2) En déduire que si la fonction f n'est pas monotone, il existe trois éléments $r < s < t$ de I pour lesquels on a l'alternative suivante :
ou bien $f(s) > \max\big\{f(r), f(t)\big\}$
ou bien $f(s) < \min\big\{f(r), f(t)\big\}$.

4.130 Soient $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue n'admettant aucun extremum local dans l'intervalle ouvert $]a,b[$. Montrer que f est strictement monotone.

4.131 Soient $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $x \in \mathbb{Q}$: $f(x) = g(x)$. Montrer que $f = g$.

4.132 Montrer que l'équation

$$x^5 + x^3 + x + \sqrt{x} - 1 = 0$$

admet une et une seule racine réelle.

4.133 Montrer que l'équation

$$5x^7 + 3x^3 + 10\,x - 3 = 0$$

admet une et une seule racine réelle et qu'elle est positive.

4.134 Pour quelles valeurs de $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$, l'équation

$$\alpha^2 x^3 + x + \beta = 0$$

admet-elle une unique racine dans l'intervalle fermé $[0,1]$?

4.135 Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, l'équation

$$x^2 + \sqrt{x} - \alpha = 0$$

admet-elle une unique racine dans l'intervalle fermé $[0,1]$?

4.136 Soient $a < b$ et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x\to a+} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to b-} f(x) = +\infty\,.$$

Montrer que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.

4.137 Soit $f : [0,5] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe au moins un élément α de l'intervalle fermé $[0,5]$ pour lequel

$$13\,f(0) + 24\,f(5) = 37\,f(\alpha)\,.$$

4.138 Montrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.

4.139 Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(2)$. Montrer qu'il existe au moins un élément α de $[0,1]$ pour lequel on ait

$$f(\alpha) = f(\alpha+1)\,.$$

4.140 Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues vérifiant $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$. Montrer qu'à tout $\alpha \geq 0$, on peut associer un élément x_α de $[0,1]$ tel que

$$f\left(x_\alpha\right) = \alpha\, g\left(x_\alpha\right).$$

4.141 Soient $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = a$ et $f(b) = b$ et soit $g : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe au moins un élément c de $[a,b]$ pour lequel $f(c) = g(c)$.

4.142 Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f < g$. Montrer qu'il existe une constante $c < 0$ telle que pour tout $x \in [0,1]$:

$$f(x) < g(x) + c\,.$$

4.143 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction s'annulant en 0 et telle que pour tout couple x, y de $\mathbb{R}$:

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|\,.$$

Montrer que pour tout $x \in [0,1]$: $f(x) = x$.

4.144 Soient $a < b$ et $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction croissante.

1) Montrer que f admet un point fixe.

2) Que devient ce résultat si f est supposée décroissante ?

4.145 Soient $c < a < b < d$ et $f : [a,b] \to [c,d]$ une fonction surjective et continue. Montrer que f possède au moins un point fixe.

4.146 Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 4$. Montrer qu'il exite au moins un élément c de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ pour lequel on ait $f\left(c + \frac{1}{2}\right) - f(c) = 2$.

4.147 Soient $a < b$ et $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$. Montrer qu'il existe au moins un élément c de $[a,b]$ pour lequel on ait $f(c) = g(c)$.

4.148 Montrer que la fonction $f : \left[0, \frac{1}{4}\right] \to \left[0, \frac{1}{4}\right]$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{4 + x^2}$$

est $\frac{1}{32}$-contractante.

4.149 ***Théorème du point fixe de Banach***.
Soient $a < b$ et $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction k-contractante.

1) Montrer que f admet un unique point fixe c dans $[a,b]$.

2) Soit (x_n) la suite récurrente définie par

$$x_{n+1} = f(x_n) \text{ et } a \leq x_0 \leq b\,.$$

Montrer que pour tout couple d'entiers $m > n \geq 1$:

$$|x_m - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k}\,|f(x_0) - x_0|\,.$$

3) En déduire

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = c\,.$$

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|x_n - c| \leq \frac{k^n}{1-k}\big|f(x_0) - x_0\big|\,.$$

4.150 Soit $f : [0,3] \to [0,3]$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x + 4}{4}\,.$$

1) Vérifier que $\operatorname{Im} f \subset [0,3]$.

2) Montrer que f est k-contractante.

3) Trouver son point fixe.

4.151 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction k-contractante et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq a$. Montrer que

$$f\left([a - \alpha\,,\, a + \alpha]\right) \subset [a - \alpha\,,\, a + \alpha]$$

avec $\alpha = \dfrac{|f(a) - a|}{1-k}$.

4.152 Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x > 0$: $|f(x)| < x$.

1) Vérifier que $f(0) = 0$.

2) Montrer qu'à tout couple $0 < a < b$, on peut associer $0 < \rho < 1$ tel que pour tout $x \in\,]a,b[\, : |f(x)| < \rho x$.

3) Que devient ce résultat si $a = 0$?

4.153 Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue mais qu'elle n'est pas lipschitzienne.

4.154 Soient $a < b$ et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que f est uniformément continue si et seulement si les deux limites

$$\lim_{x\to a+} f(x) \text{ et } \lim_{x\to b-} f(x)$$

existent.

4.155 Montrer que la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

est uniformément continue.

4.156 Soient $a > 0$ et $f :]a,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

1) Montrer que f est uniformément continue.

2) Que peut-on dire si $a = 0$?

4.157 Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe deux constantes α et β telles que pour tout $x \in [0,+\infty[$:

$$|f(x)| \leq \alpha x + \beta.$$

4.158 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f :]a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. De plus, on suppose que

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \ell_1 \text{ et } \lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell_2$$

avec $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. Montrer que f est uniformément continue.

4.159 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Trouver toutes les périodes de f.

4.160 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$. Montrer qu'il existe $a \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$ pour lequel $f(a) = f\left(a + \frac{T}{2}\right)$.

4.161 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique.

1) Vérifier que la fonction $|f|$ est aussi périodique.

2) La réciproque est-elle vraie ?

4.162 Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique telle que

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell.$$

Montrer que f est constante.

4.163 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction injective. Montrer que T est une période de f si et seulement si T est une période de $g \circ f$.

4.164 Trouver la période de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\cos^2 x\right).$$

4.165 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique.

1) Montrer qu'elle est bornée.

2) Que devient ce résultat si f n'est pas supposée continue ?

4.166 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2}\, f(x).$$

Montrer que f est périodique. Donner un exemple d'une telle fonction.

4.167 Soit $a \in]0,1[$. A chaque entier $n \geq 0$, on associe la fonction $f_n :]0,a[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$.

1) Montrer que la suite $\left(f_n\right)$ est uniformément convergente.

2) Que devient ce résultat si $a = 1$?

4.168 A chaque entier $n \geq 0$, on associe la fonction $f_n : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x^n + \sin\left(\frac{x}{n+1}\right).$$

Montrer que la suite (f_n) est uniformément convergente.

4.169 A chaque entier $n \geq 0$, on associe la fonction $f_n :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}.$$

1) Calculer la limite simple de la suite (f_n).

2) La convergence est-elle uniforme ?

4.170 A chaque entier $n \geq 1$, on associe la fonction $f_n : [1,3] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x\left(1 + \sqrt[n]{nx}\right).$$

Montrer que la suite (f_n) est uniformément convergente.

4.171 Soit $a < b$. A chaque entier $n \geq 0$, on associe la fonction croissante $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$. De plus, on suppose que la suite $\big(f_n\big)$ converge simplement vers la fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Montrer que la convergence est uniforme.

4.172 A chaque entier $n \geq 0$, on associe la fonction polynomiale $P_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $P_0(x) = 0$ et

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n^2(x)\right).$$

1) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ et tout entier $n \geq 0$:

$$0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}.$$

2) En déduire que la suite (P_n) converge uniformément vers la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$.

3) Montrer qu'il existe une suite de fonctions polynominales $Q_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ qui converge uniformément vers la fonction $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = |x|$.

4.173 A la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on associe le ***polynôme de Bernstein*** $B_n(f,\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}$ ***d'ordre*** n $(n \geq 1)$ définie par

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Montrer que si la fonction f est continue, la suite des polynômes de Bernstein $\big(B_n(f,\cdot)\big)$ converge uniformément vers f.

4.174 ***Théorème d'approximation de Weierstrass***. Soient $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'à chaque nombre $\varepsilon > 0$, on peut associer un polynône $P_\varepsilon(x)$ tel que

$$\sup_{a \leq x \leq b} \left|f(x) - P_\varepsilon(x)\right| \leq \varepsilon.$$

4.175 Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^{2n+1} - x^{2n+1}}{(x^2+1)^{n+1} - x^{2n+2}}\right).$$

Peut-on intervertir les deux limites ?

4.176 Calculer

$$\lim_{x\to 1+}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n!}{n^x}\right).$$

Peut-on intervertir les deux limites ?

4.177 (***Permutation des limites***) Soit $\big(f_n\big)$ une suite d'éléments de $\mathbf{F}(E,F)$ qui converge uniformément vers la fonction $f : E \to F$. De plus, on suppose que toutes les fonctions f_n sont continues en a. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = f(a).$$

4.178 Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{x}{k(k+1)}.$$

4.179 Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_n = n^2 \max_{0\leq x\leq 1} x^n(1-x)^n.$$

4.180 Soient $f : [0,+\infty[\to [0,1[$ une fonction continue et (x_n) la suite numérique définie par

$$x_{n+1} = x_n\, f(x_n) \ \text{ et } x_0 = 1.$$

1) Montrer que la suite (x_n) converge.

2) Calculer sa limite.

3) Calculer la somme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k\left(1 - f(x_k)\right).$$

4.181 Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x+1) - f(x)) = \ell\,.$$

Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell\,.$$

4.182 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ une fonction continue. Montrer que f est constante.

4.183 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ une fonction continue. Montrer que f est constante.

4.184 Soit $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ une fonction telle que

$$f(x + f(y)) = f(x)\, f(y)\,.$$

Montrer que f est constante.

4.185 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant $f(0) \neq -1$ et telle que pour tout couple x, y de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &f(x + f(y) + x\, f(y)) \\ &\quad = y + f(x) + y\, f(x)\,. \end{aligned}$$

Montrer que f est bijective.

4.186 Montrer que l'unique fonction $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ qui satisfait, pour tout couple x, y de $\mathbb{R}$, l'égalité

$$f^2(x+y) - f^2(x-y) = 4f(x)f(y)$$

est la fonction identiquement nulle.

4.187 Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout couple x, y de $\mathbb{R}$:

$$f^2(x) \geq f(x+y)\big(f(x) + y\big)\,.$$

4.188 Soient β, $\gamma > 0$ et $a \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que l'intervalle fermé $[a - \gamma, a + \gamma]$ contient qu'un nombre fini de rationnels $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\frac{1}{q} > \beta\,.$$

2) En déduire que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}^* \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q} \end{cases}$$

avec $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{pgcd}\,(p, q) = 1$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}^*$ et discontinue sur $\mathbb{Q}^*$.

4.189 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en a telle que pour tout couple x, y de $\mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\,.$$

1) Montrer que la fonction f est continue partout.

2) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x\, f(1)$.

4.190 Trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ discontinue partout telle que pour tout couple x, y de $\mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\,.$$

4.191 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $f(1) = 1$ et pour tout couple x, y de $\mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\,.$$

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $f(t) = t$.

4.192 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout couple x, y de $\mathbb{R}$:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}\,.$$

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $f(t) = (f(1) - f(0))\, t + f(0)$.

4.193 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout couple x, y de $\mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x)\, f(y)\,.$$

De plus, on suppose que f est continue en 0 et $f(0) \neq 0$.

1) Montrer que $f(0) = 1$.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) > 0$.

3) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

4) En posant $\alpha = f(1)$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha^x$.

4.194 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout couple x, y de $\mathbb{R}_+^*$:

$$f(xy) = f(x)\,f(y)\,.$$

De plus, on suppose que f est continue en 1 et $f(1) \neq 0$.

1) Montrer que $f(1) = 1$.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f(x) > 0\,.$

3) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) En posant $\alpha = \ln f(e)$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* : f(x) = x^\alpha$.

4.195 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout couple x, y de $\mathbb{R}_+^*$:

$$f(xy) = f(x) + f(y)\,.$$

De plus, on suppose que f est continue en 1.

1) Montrer que $f(1) = 0$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)\,.$$

2) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) En posant $\alpha = f(e)$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* : f(x) = \alpha \ln x$.

Chapitre 5

Calcul différentiel

5.1 Introduction

Une fonction $f : E \to F$ est dite ***dérivable*** en a si la limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelée la ***dérivée*** de la fonction f au point a et on la note $f'(a)$ ou encore $\frac{df}{dx}(a)$. Lorsque $f'(a)$ existe, la droite d d'équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

n'est autre que la ***tangente*** à la courbe C de la fonction f au point $\mathrm{A} = \big(a, f(a)\big)$ et $f'(a) = \operatorname{tg}\theta$ la pente de cette tangente.

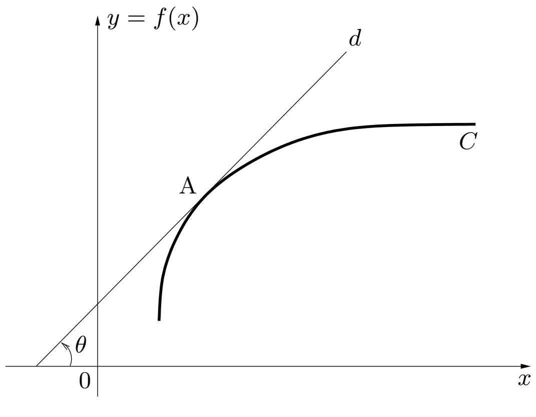


Fig. 5.1

Proposition 5.1 *Soit $f : E \to F$ une fonction dérivable en a. Alors,*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Proposition 5.2 *Toute fonction $f : E \to F$ dérivable en un point est continue en ce point.*

5.1.1 Propriétés

Soient f, $g : E \to F$ deux fonctions dérivables en a. Alors,

1) Linéarité. $\forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha f + \beta g)'\,(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a).$$

2) $$(fg)'\,(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\,.$$

3) $\forall\, x \in E : g(x) \neq 0$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}\,.$$

Proposition 5.3 *Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to F$ une fonction bijective et continue. De plus, on suppose que f est dérivable en a et que $f'(a) \neq 0$. Alors, la fonction réciproque $f^{-1} : F \to I$ est dérivable en $b = f(a)$ et*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}\,.$$

Proposition 5.4 *Soient $f : E \to F$ une fonction dérivable en a et $g : A \to B$ une fonction dérivable en $f(a)$. De plus, on suppose que $\operatorname{Im} f \subset A$. Alors, la fonction composée $g \circ f : E \to \mathbb{R}$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'\,(a) = g'\big(f(a)\big)f'(a)\,.$$

Proposition 5.5 *Soient I un intervalle ouvert, $a < b$ deux éléments de I et $f : I \to F$ une fonction dérivable telle que $f'(a) \neq f'(b)$. Alors, sur $[a, b]$, la fonction dérivée $f' : I \to F$ prend toute valeur comprise entre $f'(a)$ et $f'(b)$.*

En particulier, si f' ne s'annule pas, elle garde un signe constant.

5.1.2 Dérivée unilatérale

Définition 5.6 Une fonction $f : E \to F$ définie à droite du point $a \in E$ est dite ***dérivable à droite*** en a si la limite

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelée la ***dérivée à droite*** de la fonction f en a et on la note $f'_d(a)$.

Définition 5.7 Une fonction $f : E \to F$ définie à gauche du point $a \in E$ est dite ***dérivable à gauche*** en a si la limite

$$\lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelée la ***dérivée à gauche*** de la fonction f en a et on la note $f'_g(a)$.

Proposition 5.8 *Une fonction $f : E \to F$ est dérivable en a si et seulement si sa dérivée à droite et sa dérivée à gauche en a existent et sont égales.*

5.1.3 Dérivées d'ordre supérieur

Définition 5.9 Une fonction $f : E \to F$ est dite ***dérivable*** si elle est dérivable en chaque point de E. Dans ce cas, la fonction $f' : E \to \mathbb{R}$ est appelée la ***fonction dérivée*** de f. Si maintenant la fonction f' est elle-même dérivable, sa fonction dérivée est appelée la ***dérivée seconde*** de f et on la note f''. Plus généralement, les dérivées successives de f, si elles existent, seront notées

$$f^{(1)} = f' , \quad f^{(2)} = f'', \dots, f^{(n)} .$$

La fonction $f^{(n)}$ étant appelée la $n^{\text{ième}}$ ***dérivée*** de f ou encore la ***dérivée d'ordre*** n de f.

Définition 5.10 On dit qu'une fonction $f : E \to F$ est de classe $\mathbf{C}^n$ si sa $n^{\text{ième}}$ dérivée $f^{(n)}$ est continue. $\mathbf{C}^0$ désignant l'ensemble des fonctions continues et $\mathbf{C}^\infty$ l'ensemble des fonctions dont toutes les dérivées successives sont continues. On a alors les inclusions suivantes :

$$\mathbf{C}^\infty \subset \cdots \subset \mathbf{C}^{n+1} \subset \mathbf{C}^n \subset \cdots \subset \mathbf{C}^1 \subset \mathbf{C}^0 .$$

Proposition 5.11 *Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to F$ une fonction dont la dérivée est monotone. Alors, f est de classe $\mathbf{C}^1$.*

Proposition 5.12 (Formule de Leibniz) *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f, g : E \to F$ deux fonctions de classe $\mathbf{C}^n$. Alors, pour tout $x \in E$:*

$$\big(fg\big)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x) .$$

5.1.4 Point stationnaire

Définition 5.13 On dit que $a \in E$ est un ***point stationnaire*** de la fonction $f : E \to F$ si $f'(a) = 0$.

Proposition 5.14 *Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to F$ une fonction dérivable en a et qui admet en ce point un extremum local. Alors, a est un point stationnaire de f. Autrement dit, $f'(a) = 0$.*

Proposition 5.15 *Soient $f : [a, b] \to F$ une fonction continue et c un élément de $[a, b]$ où f atteint son maximum ou son minimum. Alors, c se trouve forcément parmi les points suivants :*

1) a ou b ;

2) les points stationnaires de f ;

3) les points x de l'intervalle ouvert $]a, b[$ où $f'(x)$ n'existe pas.

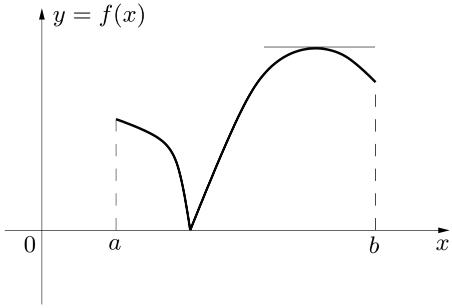


Fig. 5.2

Proposition 5.16 *Soient I un intervalle ouvert contenant a, $n > 0$ un entier pair et $f : I \to F$ une fonction de classe $\mathbf{C}^n$ telle que*

$$f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad et \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Alors,

1) *Si $f^{(n)}(a) > 0$, la fonction f admet un minimum local en a.*
2) *Si $f^{(n)}(a) < 0$, la fonction f admet un maximum local en a.*

5.1.5 Point d'inflexion

Définition 5.17 On dit qu'une fonction $f : E \to F$ dérivable en a admet un ***point d'inflexion*** en a, si sa courbe C traverse sa tangente au point $A = \big(a, f(a)\big)$.

Proposition 5.18 *Soit $f : E \to F$ une fonction dérivable en a. Alors, f admet un point d'inflexion en a si et seulement s'il existe un nombre réel $\delta > 0$ (choisi de sorte que $]a - \delta\,,\, a + \delta[\ \subset E$) tel que l'on ait : ou bien*

$$\begin{cases} f(x) < f(a) + f'(a)(x - a) & si\ x \in\ ]a - \delta\,,\, a[\\ f(x) > f(a) + f'(a)(x - a) & si\ x \in\ ]a\,,\, a + \delta[\end{cases} \qquad \textit{(fig. 5.3)}$$

ou bien

$$\begin{cases} f(x) > f(a) + f'(a)(x - a) & si\ x \in\ ]a - \delta\,,\, a[\\ f(x) < f(a) + f'(a)(x - a) & si\ x \in\ ]a\,,\, a + \delta[\end{cases} \qquad \textit{(fig. 5.4).}$$

Cas particuliers : On suppose que $f \in \mathbf{C}^1$ et $f'(a) = 0$. Alors,

1) Si pour tout $x \in\ ]a - \delta, a[\ \cup\ ]a, a + \delta[\ : f'(x) > 0$, la première accolade est satisfaite.

2) Si pour tout $x \in\ ]a - \delta, a[\ \cup\ ]a, a + \delta[\ : f'(x) < 0$, la deuxième accolade est satisfaite.

Proposition 5.19 *Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \to F$ une fonction de classe $\mathbf{C}^2$ qui admet un point d'inflexion en a. Alors, $f''(a) = 0$.*

Proposition 5.20 *Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \to F$ une fonction de classe $\mathbf{C}^2$. Alors, s'il existe un nombre réel $\delta > 0$ (choisi de sorte que $]a-\delta\,,\, a+\delta[\, \subset I$) tel que l'on ait : ou bien*

$$\begin{cases} f''(x) < 0 & \text{si } x \in\,]a-\delta, a[\\ f''(x) > 0 & \text{si } x \in\,]a, a+\delta[\end{cases} \qquad \text{(fig. 5.3)}$$

ou bien

$$\begin{cases} f''(x) > 0 & \text{si } x \in\,]a-\delta, a[\\ f''(x) < 0 & \text{si } x \in\,]a, a+\delta[\end{cases} \qquad \text{(fig. 5.4)},$$

la fonction f admet un point d'inflexion en a.

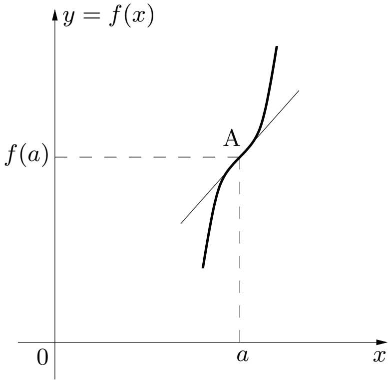


Fig. 5.3

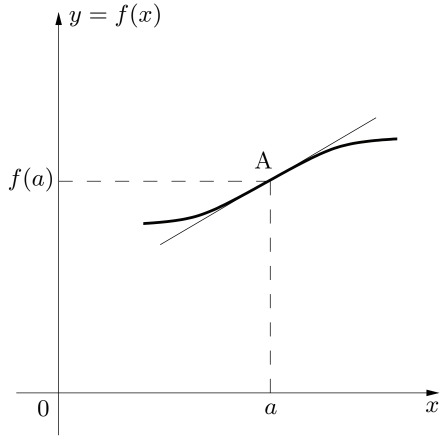


Fig. 5.4

Proposition 5.21 *Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \to F$ une fonction de classe $\mathbf{C}^n$ où $n > 1$ est un entier impair. De plus, on suppose que*

$$f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ et } f^{(n)}(a) \neq 0\,.$$

Alors, la fonction f admet un point d'inflexion en a.

Remarque : On est dans le cas de la figure 5.3 si $f^{(n)}(a) > 0$ et dans celui de la figure 5.4 si $f^{(n)}(a) < 0$

5.2 Théorèmes

Proposition 5.22 (Théorème de Rolle) *Soient $a < b$ et $f : [a,b] \to F$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. De plus, on suppose que $f(a) = f(b)$. Alors, la fonction f admet au moins un point stationnaire dans $]a,b[$. Autrement dit,*

$$\exists\ c \in\,]a,b[\ \text{ tel que } f'(c) = 0\,.$$

D'un point de vue géométrique, le théorème de Rolle exprime que la courbe C de la fonction f admet, en un point distinct de ses extrémités, une tangente horizontale.

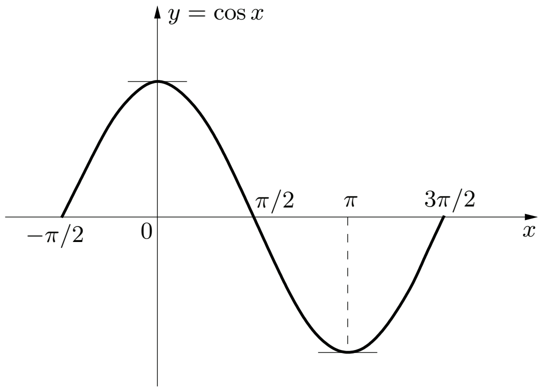


Fig. 5.5

Proposition 5.23 (Théorème de Cauchy) *Soient $a < b$ et $f, g : [a, b] \to F$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. De plus, on suppose que pour tout $x \in]a, b[: g'(x) \neq 0$. Alors, il existe au moins un élément c de $]a, b[$ pour lequel on ait*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

Proposition 5.24 (Théorème des accroissements finis) *Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to F$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe au moins un élément c de $]a, b[$ pour lequel on ait*

$$f(b) - f(a) = f'(c)\big(b - a\big) .$$

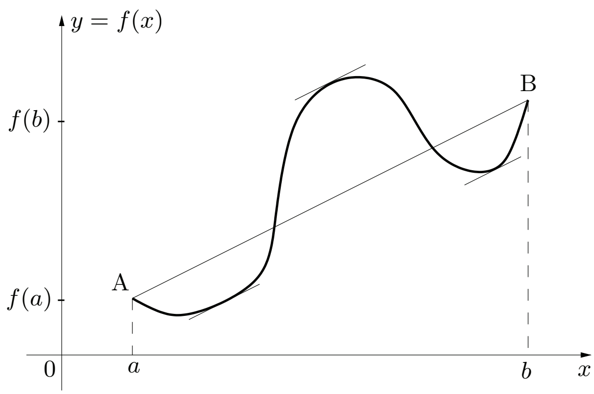


Fig. 5.6

D'un point de vue géométrique, le théorème des accroissements finis exprime que la courbe C de la fonction f admet, en un point distinct de ses extrémités, une tangente parallèle à la corde joignant ses extrémités $\mathrm{A} = \big(a, f(a)\big)$ et $\mathrm{B} = \big(b, f(b)\big)$.

Proposition 5.25 *Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \to F$ une fonction continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et telle que*

$$\lim_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}\,.$$

Alors, la fonction f est dérivable en a. De plus, $f'(a) = \ell$.

Proposition 5.26 *Soient $a < b$ et $f, g : [a, b] \to F$ deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ et telles que pour tout $x \in]a, b[$: $f'(x) = g'(x)$. Alors, les deux fonctions f, g sont égales à une constante près. Autrement dit, pour tout $x \in [a, b]$:*

$$f(x) = g(x) + \text{cste}\ .$$

Proposition 5.27 *Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to F$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que pour tout $x \in]a, b[$: $f'(x) = 0$. Alors, la fonction f est constante.*

5.2.1 Fonction monotone

Proposition 5.28 *Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to F$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors,*

1) f est croissante $\Leftrightarrow \forall\, x \in]a, b[: f'(x) \geq 0$.

2) f est décroissante $\Leftrightarrow \forall\, x \in]a, b[: f'(x) \leq 0$.

3) $\forall\, x \in]a, b[: f'(x) > 0 \Rightarrow f$ strictement croissante.

4) $\forall\, x \in]a, b[: f'(x) < 0 \Rightarrow f$ strictement décroissante.

Proposition 5.29 *Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to F$ une fonction dérivable dont la fonction dérivée f' ne s'annule pas sur I. Alors, f est strictement monotone.*

5.2.2 Règle de Bernoulli-L'Hospital

Proposition 5.30 (Règle de Bernoulli-L'Hospital) *Soient $f, g :]a, b[\to F$ deux fonctions dérivables telles que g, g' ne s'annulent pas sur $]a, b[$. De plus, on suppose que*

1) $\displaystyle\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = \alpha$ avec $\alpha = 0$, $-\infty$ ou $+\infty$;

2) $\displaystyle\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu$ avec $\mu \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Alors,

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu\,.$$

Cette règle reste valable si x tend vers $b-$, vers a, vers $-\infty$ ou vers $+\infty$.

5.3 Polynôme de Taylor

Définition 5.31 Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \to F$ une fonction de classe $\mathbf{C}^n$. Alors, la fonction polynomiale $\mathcal{P}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{P}_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

est appelée le ***polynôme de Taylor d'ordre*** n de la fonction f autour de a.

Proposition 5.32 *Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \to F$ une fonction de classe $\mathbf{C}^n$. Alors,*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \mathcal{P}_n(x)}{(x-a)^n} = 0\,.$$

Proposition 5.33 (Unicité) *Soient I un intervalle ouvert , $a \in I$ et $f : I \to F$ une fonction de classe $\mathbf{C}^n$. Supposons à présent que le polynôme $P(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n$ vérifie*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0\,.$$

Alors, P n'est rien d'autre que le polynôme de Taylor $\mathcal{P}_n$ d'ordre n de la fonction f autour de a.

5.3.1 Propriétés

Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f, g : I \to F$ deux fonctions de classe $\mathbf{C}^n$. Alors,

1) Linéarité. Pour tout couple α, β de $\mathbb{R}$:

$$(\alpha f(a) + \beta g(a)) + (\alpha f'(a) + \beta g'(a))(x-a) + \cdots$$
$$\cdots + \left(\alpha \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \beta \frac{g^{(n)}(a)}{n!}\right)(x-a)^n$$

est le polynôme de Taylor d'ordre n de la fonction $\alpha f + \beta g$ autour de a.

2) Le polynôme de Taylor d'ordre n de la fonction fg autour de a, s'obtient en effectuant le produit de

$$\left(f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right)$$

par

$$\left(g(a) + g'(a)(x-a) + \cdots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right)$$

et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

3) Si $g(a) \neq 0$, le polynôme de Taylor d'ordre n de la fonction $\frac{f}{g}$ autour de a, s'obtient en effectuant la division suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre n de

$$\left(f(a) + f'(a)\big(x-a\big) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\big(x-a\big)^n\right)$$

par

$$\left(g(a) + g'(a)\big(x-a\big) + \cdots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n\right).$$

Rappels : On suppose que $a = 0$. Alors,

1) Si f est une fonction paire, tous les $f^{(k)}(0)$ avec k impair sont nuls.

2) Si f est une fonction impaire, tous les $f^{(k)}(0)$ avec k pair sont nuls.

Proposition 5.34 *Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \to F$ une fonction de classe $\mathbf{C}^n$ telle que $f(a) = 0$. Soient $\alpha > 0$ et $g : \left]-\alpha, \alpha\right[\to G$ une fonction de classe $\mathbf{C}^n$. De plus, on suppose que $\operatorname{Im} f \subset \left]-\alpha, \alpha\right[$. Alors, le polynôme de Taylor d'ordre n de la fonction composée $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ autour de a s'obtient en effectuant*

$$g(0) + g'(0)\left(f'(a)\big(x-a\big) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n\right) + \cdots$$
$$+ \frac{g^{(n)}(0)}{n!}\left(f'(a)\big(x-a\big) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n\right)^n$$

et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Proposition 5.35 *Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \to F$ une fonction de classe $\mathbf{C}^n$ avec $n \geq 1$. Si*

$$a_0 + a_1\big(x-a\big) + \cdots + a_{n-1}\,(x-a)^{n-1}$$

est le polynôme de Taylor d'ordre $n-1$ de la fonction dérivée $f' : I \to \mathbb{R}$ autour de a, le polynôme de Taylor d'ordre n de la fonction f autour de a est

$$f(a) + a_0\big(x-a\big) + \frac{a_1}{2}\,(x-a)^2 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n}\,(x-a)^n\,.$$

5.3.2 Développement limité

Définition 5.36 Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \to F$ une fonction de classe $\mathbf{C}^n$. Alors, l'expression

$$f(x) = \mathcal{P}_n(x) + \mathcal{R}_n(x)\,,\ x \in I$$

est appelée le ***développement limité d'ordre*** n de la fonction f autour de a. La fonction $\mathcal{R}_n : I \to \mathbb{R}$ est appelée le ***reste*** du développement limité d'ordre n de la fonction f autour de a. Ce reste est caractérisé par

$$\lim_{x\to a} \frac{\mathcal{R}_n(x)}{(x-a)^n} = 0\,.$$

5.3.3 Formule de Taylor

Définition 5.37 Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \to F$ une fonction de classe $\mathbf{C}^{n+1}$. Alors, à chaque élément x de I, on peut associer $\theta_x \in]0,1[$ tel que l'égalité suivante

$$f(x) = \mathcal{P}_n(x) + \frac{f^{(n+1)}\big(a + \theta_x(x-a)\big)}{\big(n+1\big)!}\,(x-a)^{n+1}$$

est vérifiée. Cette égalité est appelée la ***formule de Taylor***. Si $a = 0$, il est d'usage de l'appeler ***formule de MacLaurin***. Ici, pour tout $x \in I$:

$$\mathcal{R}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\big(a + \theta_x\big(x-a\big)\big)}{\big(n+1\big)!}\,(x-a)^{n+1}\,.$$

5.4 Fonction convexe

Définition 5.38 Soit I un intervalle. Une fonction $f : I \to F$ est dite ***convexe*** si pour tout couple a, b de I et tout $\lambda \in [0,1]$:

$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \leq \lambda f(a) + \big(1-\lambda\big)f(b).$$

D'un point de vue géométrique, une fonction $f : I \to F$ est convexe si pour tout couple de points $\mathrm{A} = \big(a, f(a)\big)$ et $\mathrm{B} = \big(b, f(b)\big)$ de sa courbe C , tout point P de C, dont l'abscisse c est comprise entre a et b, est situé au-dessous de la corde AB ; ce qui entraîne, entre autres, que $f(c) \leq \max\big\{f(a), f(b)\big\}$.

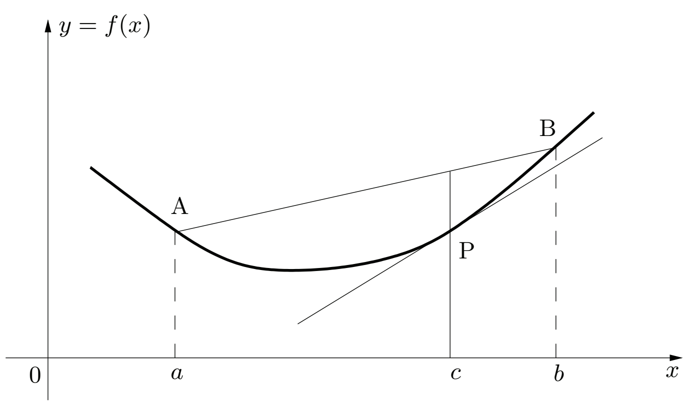


Fig. 5.7

Proposition 5.39 (Inégalité de Jensen) *Soit I un intervalle. Alors, la fonction $f : I \to F$ est convexe si et seulement si pour tout n-tuple $a_1, \ldots, a_n$ de I et tout n-tulple $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de $[0,1]$ vérifiant $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on a*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, f\big(a_k\big).$$

Proposition 5.40 *Soit I un intervalle. Pour qu'une fonction continue $f : I \to F$ soit convexe il faut et il suffit que pour tout couple x, y de I :*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big)\,.$$

Proposition 5.41 *Soient I un intervalle et $f : I \to F$ une fonction convexe. Alors, pour tout triplet x, y, z de I vérifiant $x < y < z$:*

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}\,.$$

Proposition 5.42 *Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to F$ une fonction convexe. Alors, f est continue et admet en tout point de I une dérivée à droite et une dérivée à gauche. De plus, pour tout couple $a < b$ de I :*

$$f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq f'_g(b) \leq f'_d(b)\,.$$

Proposition 5.43 *Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to F$ une fonction dérivable. Alors, f est convexe si et seulement si f' est une fonction croissante.*

Proposition 5.44 *Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to F$ une fonction dérivable et convexe. Alors, f est de classe $\mathbf{C}^1$ et de plus sa courbe C se trouve en chacun de ses points au-dessus de sa tangente (fig. 5.7).*

Proposition 5.45 *Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to F$ une fonction dont la dérivée seconde existe. Alors, f est convexe si et seulement si pour tout $x \in I$: $f''(x) \geq 0$.*

5.5 Asymptotes

Définition 5.46 On dit que la courbe C de la fonction $f : E \to F$ admet la droite d'équation $x = a$ pour ***asymptote verticale***

$$\text{si } \lim_{x \to a-} f(x) = \infty \quad \text{ou si } \lim_{x \to a+} f(x) = \infty\,.$$

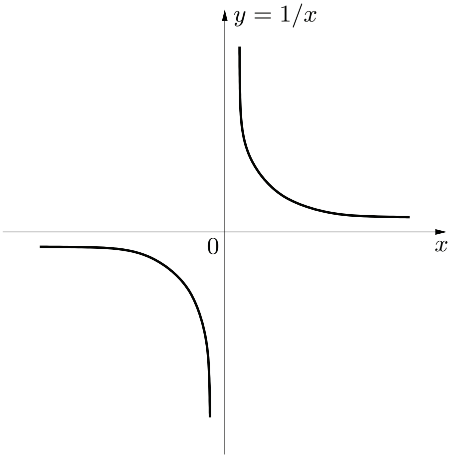


Fig. 5.8

Définition 5.47 On dit que la courbe C de la fonction $f : E \to F$ admet la droite d'équation $y = \ell$ pour ***asymptote horizontale***

$$\text{si} \lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou si} \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell\,.$$

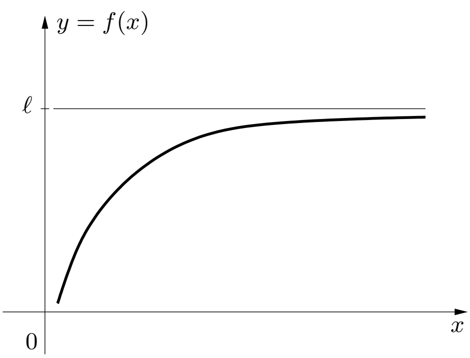


Fig. 5.9

Définition 5.48 On dit que la courbe C de la fonction $f : E \to F$ admet la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ pour ***asymptote oblique*** si

$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - (\alpha x + \beta)\big) = 0\,.$$

Par un simple calcul, on vérifie que

$$\alpha = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ et } \beta = \lim_{x\to\infty} \big(f(x) - \alpha x\big)\,.$$

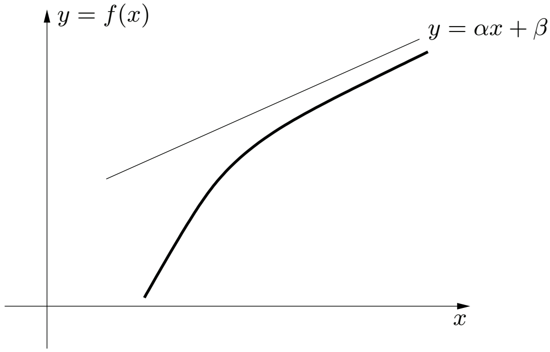


Fig. 5.10

5.6 Etude d'une fonction

L'étude d'une fonction $f : E \to F$ consiste en général à déterminer les différents points énumérés ci-dessous :

1) Si elle est paire, impaire, périodique ou si elle admet des symétries.
2) Ses points de discontinuité et sa limite en ces points.
3) Sa limite aux points frontières de E.
4) Calculer sa dérivée et déterminer le domaine de définition et le signe de celle-ci.
5) Rechercher ses points stationnaires et étudier leur nature.
6) Rechercher ses points d'inflexion.
7) Faire son tableau de variations.
8) Finalement, dessiner C.

Exemple : Etudier la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2}\,.$$

Cette fonction n'est ni paire, ni impaire et ni périodique. Par contre, $f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0-} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3} = \frac{x^3-2}{x^3}\,, \quad D\bigl(f'(x)\bigr) = \mathbb{R}^*$$

Si $x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]\sqrt[3]{2}, +\infty\right[$: $f'(x) > 0$.

Si $x \in \left]0, \sqrt[3]{2}\right[$: $f'(x) < 0$.

L'unique point stationnaire de f est $x = \sqrt[3]{2}$.

Etant donné que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f''(x) = \frac{6}{x^4} > 0$, la courbe C de la fonction f ne possède aucun point d'inflexion. La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale de C, tandis que la première bissectrice $y = x$ est une asymptote oblique de C.

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	m	↗	$+\infty$

où

$$m = f\left(\sqrt[3]{2}\right) = \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\,.$$

La fonction f admet un minimum local en $\sqrt[3]{2}$.

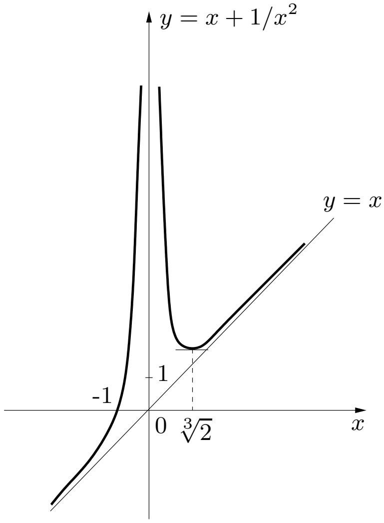


Fig. 5.11

5.7 Courbe paramétrée

Définition 5.49 Soient I un intervalle et $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Par définition, l'application $\phi : I \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(t) = \big(x = \varphi(t)\,,\; y = \psi(t)\big)$$

est appelée une ***courbe paramétrée***. Si, de plus, les deux fonctions φ, ψ sont de classe $\mathbf{C}^n$, on dit que la courbe paramétrée ϕ est de classe $\mathbf{C}^n$.

Proposition 5.50 *Soient I un intervalle, $t_0 \in I$ et φ, $\psi : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en t_0. Alors, la droite d défine par*

$$\begin{cases} x = x(t) = \varphi\big(t_0\big) + \varphi'\big(t_0\big)\, t \\ y = y(t) = \psi\big(t_0\big) + \psi'\big(t_0\big)\, t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

*est la tangente à la courbe paramétrée ϕ au point $\phi\left((t_0)\right) = \big(x\big(t_0\big)\,,\, y\big(t_0\big)\big)$ et, si φ' et ψ' ne s'annulent pas simultanément en t_0, $\phi'\big(t_0\big) = \big(\varphi'\big(t_0\big)\,,\, \psi'\big(t_0\big)\big)$ est son **vecteur tangent** au point $\phi\big(t_0\big)$ tandis que $\big(-\psi'\big(t_0\big)\,,\, \varphi'\,\big(\big(t_0\big)\big)\big)$ est son **vecteur normal** en ce point.*

Proposition 5.51 *Soient I un intervalle, $t_0 \in I$ et φ, $\psi : I \to \mathbb{R}$ une paramétrisation de la fonction $f : E \to F$ (c.-à.-d. $E = \big\{\varphi(t) : t \in I\big\}$ et $\forall\, t \in I : \psi(t) = f\big(\varphi(t)\big)$). De plus, on suppose que $\varphi'\big(t_0\big) \neq 0$ et $f'\,\big(\varphi\big(t_0\big)\big)$ existent. Alors, la **pente** de la tangente à la courbe C de f au point $\big(a = \varphi\big(t_0\big)\,,\, b = \psi\big(t_0\big)\big)$ est donnée par*

$$f'(a) = \frac{\psi'\big(t_0\big)}{\varphi'\big(t_0\big)}\,.$$

5.8 Exercices

Calculer la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

5.1 $f(x) = \dfrac{x}{1+x^4}\,.$

5.2 $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2+x^4}\,.$

5.3 $f(x) = \cos\sqrt{1+x^2}\,.$

5.4 $f(x) = \sin\sqrt{1+x^2+x^4}\,.$

Calculer la dérivée de la fonction $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par

5.5 $f(x) = \ln\cos x\,.$

5.6 $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+\sin x}{\cos x}\right)\,.$

Calculer la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

5.7 $f(x) = x^2[x]\,.$

5.8 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$

5.9 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$

Calculer

5.10 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}\,.$

5.11 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}\,.$

5.12 $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}\,.$

5.13 $\displaystyle\lim_{x\to \sqrt{2}} \frac{x^x - \sqrt{2^{\sqrt{2}}}}{x - \sqrt{2}}\,.$

5.14 $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}\,.$

5.15 Montrer que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

5.16 Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}\,.$$

5.17 Montrer que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Arctg} x}{x} = 1\,.$$

5.18 Calculer
$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{Arctg}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)}{x-1}.$$

Soit $\alpha > 0$. Montrer que

5.19 $\lim_{x\to 0+} x^\alpha \ln x = 0$.

5.20 $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

5.21 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha.$$

5.22 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

Calculer

5.23 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right)}{\sin x}$.

5.24 $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \ln \operatorname{ch} x}{\ln^3(1+x)}$.

5.25 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+x^3\right)}{\operatorname{sh}^3 x}$.

5.26 $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\ln \operatorname{ch} x}$.

5.27 $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\frac{x}{\operatorname{Arctg} x}} \sin^2 x}{\ln\left(1+\operatorname{sh} x^2\right)}$.

5.28 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{Arctg} x \sin x}{\ln\left(1+x^2\right)}$.

5.29 $\lim_{x\to 0+} \dfrac{\sin x^2 \ln x}{\ln(1+x)}$.

5.30 $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sin \dfrac{2}{\sqrt{x}}}{\ln\left(\sqrt{x}-1\right) - \ln\sqrt{x}}$.

5.31 $\lim_{x\to 1} \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\sin(x-1)}{\left(x-1\right)^2}$.

5.32 $\lim_{x\to 0+} \dfrac{\sin x - \sin \dfrac{1}{x}}{e^x - e^{\frac{1}{x}}}$.

5.33 $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \sin x}{1+\cos(x-\pi)}$.

5.34 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch}^2 x - \cos x^2}{x^2}$.

5.35 $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x^6}{x^{12}}$.

5.36 $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x-x^3} - \sqrt[5]{x}}{x-1}$.

5.37 $\lim_{x\to 0} \ln|x| \ln(1-x)$.

5.38 $\lim_{x\to 0} \ln(1+x)\ln\left(e^x-1\right)$.

5.39 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x) - 2\sin x + 2x^2}{4\ln(1+x) - \sin 4x + 2x^2}$.

5.40
$$\lim_{x\to 0+} \Big((\cos 2x - 2\cos 6x)\ln \operatorname{tg} x + \ln \sin 2x\Big).$$

5.41 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x\sqrt{1-x}\sin x}$.

5.42 $\lim_{x\to 0+} \dfrac{\ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{\ln x}$.

5.43 $\lim_{x\to 0+} \dfrac{\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)}{\ln x}$.

5.44 $\lim_{x\to 0} \dfrac{-1+\cos 4x}{\ln \dfrac{\sin x}{x}}$.

5.45 $\lim_{x\to 0+} \dfrac{\ln \sin x \ln \cos x}{x^2 \ln x}$.

5.46 $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x-\operatorname{tg} x)\sin \pi x}{(1-\cos x)(1-\operatorname{ch} x)}$.

5.47 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln \operatorname{ch} x}{\ln\left(1+x^2\right)}$.

5.48 $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$.

5.49 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{\sin x}$.

5.50 $\lim_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x - \cos x}{\operatorname{tg} x}$.

5.51 $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x + \ln \cos x}{1-\operatorname{ch} x}$.

5.52 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{Arctg}\left(x^2(1-\cos x)\right)}{\left(1-\sqrt{\cos x}\right)\ln \dfrac{\sin x}{x}}$.

5.53 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right).$

5.54 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin\bigl(\ln(1+x)\bigr)-\ln(1+\sin x)}{\bigl(1-\cos x\bigr)^2}.$

5.55 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{\sin 5x}-\frac{1}{5}\right).$

5.56 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}.$

5.57 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\cos x-\cos 3x-3\operatorname{tg}^2 x-2}{\bigl(e^x-1\bigr)^4}.$

5.58 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{6\sin x-6x+x^3}{x^3\sin^2 x}.$

5.59 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sh} 4x}{x}-4}{x\sin x}.$

5.60 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{6\operatorname{sh} x-6x-x^3}{x^4\operatorname{sh} x}.$

5.61 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x-\operatorname{tg} x}{x(1-\cos x)}.$

5.62 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^4\bigl(\operatorname{tg} x^2-\sin^2 x\bigr)}{1-\cos x^4}.$

5.63 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-\operatorname{ch} x)(x^2-x\sin x)}{(1-\cos x)\sin^2 x^2}.$

5.64 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-\cos x\right)^2}{x^2\cos x-\sin x^2}.$

5.65 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{6x^2+x^6-6\operatorname{Arcsin} x^2}{x^{10}}.$

5.66 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}.$

5.67

$$\lim_{x\to -\infty}\Bigl(\sqrt{1-x+x^2} + \sqrt[3]{1+2x^2+x^3}\Bigr).$$

5.68 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln\bigl(1+\sin x\bigr)^2+x^2-2x}{\operatorname{tg} x-\sin x}.$

5.69 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\bigl(\ln\cos x\bigr)^2\sin x}{\bigl(e^x-1\bigr)^5}.$

5.70 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(\operatorname{tg} x)+\ln(\cos x)}{x^2+\ln(1+x^2+x^4)}.$

5.71 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x}-e^x}{x^3}.$

5.72 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x}-e^{\operatorname{ch} x}}{\cos x-\operatorname{ch} x}.$

5.73 $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x}-e^{2x}+\sin\pi x}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}.$

5.74 $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{1}{\ln\sin x}\right).$

5.75 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^4+\ln^2\cos^2 x}{x^4+\sin x^4+x^2\operatorname{sh} x^2}.$

5.76 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-\operatorname{ch} x-\sin x}{x\ln\sqrt{1+x^2}+\operatorname{sh}^3 x}.$

5.77 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x-\sin x-\operatorname{Arcsin} x}{\operatorname{Arctg}^5 x}.$

5.78 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{6\operatorname{Arctg} x-6\sin x+x^3}{6\operatorname{tg} x-6\operatorname{Arcsin} x-x^3}.$

5.79 Avec $u(x)=\frac{x}{2+2x+x^2}$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{Arctg}\left(u(x)\right)-\sin x+x^2}{\operatorname{sh}^3 x}.$$

5.80 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Argsh} x-\operatorname{Arcsin} x}{\operatorname{sh} x-\sin x}.$

5.81 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Argth} x-\operatorname{Arctg} x}{\operatorname{sh} x-x}.$

5.82 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Arctg}(\operatorname{th} x)-x}{\operatorname{th} x-\operatorname{tg} x}.$

5.83 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\operatorname{th} x-\operatorname{sh} x)}{x^3}.$

5.84 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\ln(1+\sin x)+x^2-2x}{\sin^3 x}.$

5.85 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x^4+\ln^2\operatorname{ch}^2 x}{x^4+\sin^4 2x}.$

5.86 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}^4 x+\ln\cos^2 x^2}{\sin x^4}.$

5.87 Avec $u(x) = \operatorname{Arcsin} x$ et $v(x) = \operatorname{Arctg} x$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{Arctg}\bigl(u(x)\bigr)-\operatorname{Arcsin}\bigl(v(x)\bigr)}.$$

5.88 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\bigl(1+x\bigr)^{\frac{1}{x}}-e}{x}.$

5.89 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x\cos x)-\operatorname{ch}(x\operatorname{ch} x)}{\sin(x\sin x)+\operatorname{sh}(x\operatorname{sh} x)}.$

5.90 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

5.91 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

5.92 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

5.93 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

5.94 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{x^2}$.

5.95 $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{(1+x)^5-1}\right)^{\frac{1}{\operatorname{Arctg} x}}$.

5.96 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x\right)^{\frac{1}{x}}$.

5.97 $\lim\limits_{x\to 0+}\left(1+x\right)^{\ln x}$.

5.98 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{Arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

5.99 $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin x}$.

5.100

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)^x.$$

5.101 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x+1)\,e^{\frac{1}{1+x}}-x\,e^{\frac{1}{x}}\right)$.

5.102 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

5.103 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}+4^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x$.

5.104 Pour quelles valeurs de $k\in\mathbb{Z}$, la limite suivante

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^k}$$

existe-t-elle ?

5.105 Comment faut-il choisir α, $\beta\in\mathbb{R}$, pour que l'on ait

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^5}\left(\operatorname{ch} x-\frac{1+\alpha x^2}{1+\beta x^2}\right)=0\ ?$$

5.106 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. Calculer

$$\lim_{x\to a}\frac{af(x)-xf(a)}{x-a}.$$

5.107 Soient $a\in\mathbb{R}$ et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^2$ telle que $f'(a)\neq 0$. Calculer

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{(x-a)\,f'(a)}\right).$$

5.108 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{si } x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en 0 et qu'elle est discontinue en tout autre point.

5.109 Pour quelles valeurs de $k\in\mathbb{Z}$, la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases} \sin(x^k) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

est-elle dérivable en 0 ?

5.110 Pour quelles valeurs de $k\in\mathbb{Z}$, la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases} x^k\sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

est-elle dérivable en 0 ?

5.111 Montrer que la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

est dérivable mais que f' n'est pas continue en 0.

5.112 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^2$ telle que $f(0)=0$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x\neq 0\\ f'(0) & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Calculer $g'(0)$.

5.113 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable en 0.

1) Montrer que

$$f'(0) = \lim_{n\to+\infty} n\left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right).$$

2) En donnant un contre-exemple, montrer que l'existence de cette limite n'implique pas nécessairement celle de $f'(0)$.

5.114 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. Vérifier que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a)\,.$$

L'existence de cette dernière limite entraîne-t-elle celle de $f'(a)$?

5.115 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

1) Vérifier que $f'(0) > 0$.

2) Montrer qu'il n'existe aucun intervalle ouvert contenant 0 dans lequel la fonction f est croissante.

5.116 Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \to F$ une fonction bijective et continue. De plus, on suppose que f est dérivable en a et que $f'(a) \neq 0$. En posant $b = f(a)$, montrer que

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}\,.$$

5.117 Soient

$$E = \left\{x = y+2 : y \in \left]0,2\right[\cap \mathbb{Q},\ \sqrt{y} \notin \mathbb{Q}\right\}$$

et $f : \left]0,2\right[\cup E \to F$ la fonction bijective définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ & \text{et } x \in \left]0,2\right[\\ 2x-1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ & \text{et } x \in \left]0,2\right[\\ x-2 & \text{si } x \in E\,. \end{cases}$$

Montrer que $f'(1) = 2$ et que la fonction réciproque f^{-1} n'est pas dérivable en $f(1)$.

5.118 Trouver l'équation de la tangente à la courbe

$$y = \ln \sqrt[3]{1 + \cos^6\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{1+x+x^2}\right)}$$

au point $x = 0$.

5.119 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 + x - 2$$

est bijective. Calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

5.120 Montrer que la fonction $f : \left]0,+\infty\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = -1 + e^{x-1} + \ln x$$

est bijective. Donner l'équation de la tangente à la courbe $y = f^{-1}(x)$ au point $x = 0$.

5.121 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 4x + \sin^4 x$$

est bijective. Donner l'équation de la tangente à la courbe $y = f^{-1}(x)$ au point $x = 0$.

5.122 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = e^x + \cos x + 2x$$

est bijective. Donner l'équation de la normale à la courbe $y = f^{-1}(x)$ au point $x = 2$.

5.123 Montrer que la fonction $f : \left]0,+\infty\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = -2 + x + e^{x-1} + \ln x$$

est bijective. Donner l'équation de la normale à la courbe $y = f^{-1}(x)$ au point $x = 0$.

5.124 Montrer que la fonction $f : \left[0,+\infty\right[\to \left[0,+\infty\right[$ définie par

$$f(x) = x^5 + \ln \sqrt[3]{x^3 + x + 1}$$

est bijective. Donner l'équation de la normale à la courbe $y = f^{-1}(x)$ au point $x = 1 + \frac{\ln 3}{3}$.

5.125 Montrer que la fonction $f :]-1, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{\sqrt{1+x^5}} + e^{-2x}$$

est bijective. Donner l'équation de la normale à la courbe $y = f^{-1}(x)$ au point $x = 3$.

5.126 Soient $f : E \rightarrow F$ une fonction dérivable en a et $g : A \rightarrow B$ une fonction dérivable en $f(a)$. De plus, on suppose que $\operatorname{Im} f \subset A$. Montrer que

$$(g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big) f'(a)\,.$$

5.127 Montrer que la fonction $f : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ définie par

$$f(x) = (2 + \ln x) \ln x$$

est bijective. Donner l'équation de la normale à la courbe $y = f^{-1}(x)$ au point $x = 3$.

5.128 Soient f, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les deux fonctions définies respectivement par

$$f(x) = \left|x\right|^3 + 2x + 3 \text{ et } g(y) = \operatorname{Arctg} y^2\,.$$

Calculer $\big(g \circ f\big)'(0)$.

5.129 Soient f, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les deux fonctions définies respectivement par

$$f(x) = \left|x^5\right| + 6 \sin x + 1$$

et

$$g(y) = \operatorname{Arctg} \sqrt{y^2 + 3}\,.$$

Calculer $\big(g \circ f\big)'(0)$.

5.130 Soient f, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les deux fonctions définies respectivement par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} + 2x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et

$$g(y) = (1 + y)^3\,.$$

Calculer $\big(g \circ f\big)'(0)$.

5.131 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$ définie par

$$f(x) = \frac{3 + 2 \sin x}{\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 - \cos x}}$$

est surjective.

5.132 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^1$ dont la fonction dérivée ne s'annule pas dans $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. Montrer que si f admet un extremum local en a, cet extremum est global.

5.133 Etudier la nature des points stationnaires de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 6\,.$$

5.134 Etudier la nature des points stationnaires de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x + \sin x + \cos x\,.$$

5.135 Etudier la nature des points stationnaires de la fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = e^x + \frac{1}{x}\,.$$

5.136 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie

$$f(x) = (1 + \sin x) \cos x\,.$$

1) Etudier la nature de ses points stationnaires.

2) Trouver ses points d'inflexion.

5.137 Trouver les quatre constantes α, β, μ et σ de sorte que la courbe C d'équation $y = \alpha x^3 + \beta x^2 + \mu x + \sigma$ admette un minimum local au point $(0, 1)$ et un point d'inflexion au point $(1, 3)$.

5.138 Trouver les valeurs extrémales de la fonction polynomiale

$$P(x) = x^5 - 5x^4 + 2$$

dans l'intervalle fermé $[-4, 6]$.

5.139 Trouver les extrema de la fonction $f : \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}\,.$$

5.140 Trouver les extrema de la fonction $f : \left[\frac{1}{2}, 4\right] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^{\ln \frac{1}{x}}\,.$$

5.141 Trouver les extrema de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie implicitement par

$$\frac{4f(x)+10}{f(x)+2} = \sin^2 x + 2\cos x + 1\,.$$

5.142 Trouver le maximum de la fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3+e^{x^2}}} + \frac{16-7x^2}{16-5x^2}\,.$$

5.143 Trouver le minimum de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \operatorname{th}\left(\ln\sqrt{1+x^2}\right).$$

5.144 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3+7x^2+2x+2}{x^6+2x^2+x+1}$$

admet un minimum local en 0.

5.145 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^2+14\,x+4}{10\,x^4+8x^2+7x+2}$$

admet un maximum local en 0.

5.146 Montrer que la fonction $f :\ ]-1,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sin x - \ln\left(2+\frac{x}{1+x^2}\right)^2$$

admet un minimum local en 0.

5.147 Montrer que la fonction $f :]-\infty,1[\ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-2x+2x^2}}{1-x}$$

admet un minimum local en 0.

5.148 Montrer que la fonction $f : \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\operatorname{ch}^4 x - \operatorname{sh}^4 x}{\cos^4 x - \sin^4 x}$$

admet un minimum local en 0.

5.149 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{2-\cos x}{\left(1+\sin^2 x+\operatorname{sh}^2 x\right)\left(1+\operatorname{th}^2 x\right)}$$

admet un maximum local en 0.

5.150 Montrer que la fonction $f : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{\cos x}}{1+x^2}$$

admet un maximum local en 0.

5.151 Montrer que la fonction $f : \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}}{1+\sin^2 x}$$

admet un maximum local en 0.

5.152 Montrer que la fonction $f : \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{\cos^4 x - \sin^4 x}}{\cos x + \sin^2 x}$$

admet un maximum local en 0.

5.153 Montrer que la fonction $f : \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{\cos^4 x - \sin^4 x}}{x^2 + \cos^2 x}$$

admet un maximum local en 0.

5.154 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{1+x^2+\operatorname{sh}^2 x}{\sqrt{\operatorname{ch}^4 x - \operatorname{sh}^4 x}}\right)$$

admet un minimum local en 0.

5.155 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{x^2+\sqrt{1+x^2}}{2+\cos^2 x}\right)^3$$

admet un minimum local en 0.

5.156 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \ln\sqrt{x^2 + \frac{2+x^6}{1+x^2+x^4}}$$

admet un maximum local en 0.

5.157 Montrer que la fonction $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{\sqrt{\operatorname{ch} x}}{1+x^2+x^3}}$$

admet un maximum local en 0.

5.158 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln \sqrt{\dfrac{x^2+\cos^2 x}{\operatorname{ch}(2x)}}}{1+\sin^2 x+\operatorname{sh}^2 x}$$

admet un maximum local en 0.

5.159 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+x^4}{1+x^2}+\operatorname{sh} x^2}$$

admet un maximum local en 0.

5.160 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2+\sqrt{1+x^2}}}{1+2\sin^2 x+\cos^2 x}$$

admet un maximum local en 0.

5.161 Montrer que la fonction $f : \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{1+\operatorname{Arctg} x^2}{\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}}\right)$$

admet un minimum local en 0.

5.162 Montrer que la fonction $f : \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{\operatorname{Argsh} x+\operatorname{Argth} x}{\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}}\right)$$

admet un point d'inflexion en 0.

5.163 Montrer que la fonction $f : \left]-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 3x^2+8\sqrt{\cos x+\sin x}$$

admet un point d'inflexion en 0.

5.164 Montrer que la fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \cos x + e^{\operatorname{Arcsin} x}$$

admet un point d'inflexion en 0.

5.165 Montrer que la fonction $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 1+x+(\cos^2 x-\sin x)\sin x + \ln\left(\frac{1+x^3+x^4}{1+x}\right)^2$$

admet un point d'inflexion en 0.

5.166 Montrer que la fonction $f : \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sin x + \ln \sqrt[3]{\frac{2-x^2+x^3}{1+x+x^3}}$$

admet un point d'inflexion en 0.

5.167 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh}\left(x\sqrt{1+x^2}\right)}{1+\sin^2 x}$$

admet un point d'inflexion en 0.

5.168 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{e^{\sin^2 x}}}$$

admet un point d'inflexion en 0.

5.169 1) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x+2x^2+\cos^2 x > 0\,.$$

2) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sin 2x-2\operatorname{sh} x}{\sqrt{x+2x^2+\cos^2 x}}$$

admet un point d'inflexion en 0.

5.170 Montrer que la fonction $f : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln\cos x}{1+\sin x}-\cos x$$

admet un point d'inflexion en 0.

5.171 Montrer que la fonction $f : \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - \sin x + \cos x}{\sqrt{\cos^4 x - \sin^4 x}}\right)$$

admet un minimum local en 0.

5.172 Montrer que la fonction $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1 - \operatorname{ch} x^2 + \ln\sqrt{1+x^2}}{\sin x^2 + \sqrt{\cos x}}$$

admet un minimum local en 0.

5.173 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \ln\left(5 + \sqrt[3]{5x^2 + \frac{4+x^4}{2+x^2+x^4}}\right)$$

admet un minimum local en 0.

5.174 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{\big(1+|x|\big)\big(1+\operatorname{Arctg} x^2\big)}{\sqrt[4]{1+\sin^2 x}}\right)$$

admet un minimum local en 0.

5.175 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\alpha + \ln\big(1+x^2\big)}{\sqrt{\operatorname{ch} x + \sin x^2 + \operatorname{sh}^2 x}}$$

admet un extremum local en 0. Etudier sa nature en fonction de la valeur de α.

5.176 On veut construire une boîte métallique (sans couvercle) de base carrée et d'une capacité de 4m^3. Sachant qu'une plaque de métal coûte α $\$/\text{m}^2$ et que chaque pliage ou soudure coûte β \$/m, trouver les dimensions de la boîte de sorte que son prix de revient soit minimal.

5.177 Soient $\text{A} = (a, 0)$, $\text{B} = (1, 3)$ et $\text{C} = (8, 4)$ trois points du plan. Trouver a de sorte que le périmètre du triangle ABC soit minimal.

5.178 Soient A, B et P trois points du plan situés sur le cercle Ω. On suppose que sur Ω, les points A et B sont diamétralement opposés. Comment faut-il choisir le point P pour que le périmètre du triangle PAB soit maximal ?

5.179 Soit t_α la tangente à la parabole $y = 3 - x^2$ issue du point d'abscisse $x = \alpha > 0$. Cette tangente coupe les axes de coordonnées respectivement en A et B. Pour quelle valeur de $\alpha > 0$, l'aire du triangle OAB est-elle minimale ?

5.180 Trouver l'aire maximale du rectangle ABCD sachant que son côté AD a pour support l'axe Ox et qu'il est inscrit dans le triangle limité par les trois droites $y = x$, $y = 0$ et $y = -2x + 12$.

5.181 Soient α, β et θ les trois angles d'un triangle que l'on suppose tous aigus. Montrer que

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\theta > 2\,.$$

5.182 Soient $\alpha, \beta \geq 0$ deux nombres vérifiant $\alpha^2 + \beta^2 = 4$. Montrer que

$$\frac{\alpha\beta}{2+\alpha+\beta} \leq \sqrt{2} - 1\,.$$

5.183 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ deux nombres vérifiant $7\alpha^2 + 3\alpha\beta + 3\beta^2 = 1$. Montrer que

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta} \geq \frac{1}{2}\,.$$

5.184 Soient α, β, $\mu > 0$ trois nombres vérifiant $\alpha\beta\mu\big(\alpha+\beta+\mu\big) = 1$. Montrer que

$$(\alpha+\beta)(\beta+\mu) \geq 2\,.$$

5.185 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\big|\sin x\big| < |x|\,.$$

5.186 Montrer que pour tout couple x, y de $\mathbb{R}$:

$$\big|\sin x - \sin y\big| \leq |x - y|\,.$$

5.187 Montrer que pour tout $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$:

$$\big|\operatorname{tg} x\big| > |x|\,.$$

5.188 Montrer que pour tout $0 < |x| < \frac{\pi}{4}$:

$$|\operatorname{tg} x - \sin x| < 2|x| .$$

5.189 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 < x - \operatorname{Arctg} x < x^3 .$$

5.190 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\ln x < x .$$

5.191 Montrer que

1) $\forall x \in]0,1] : \left|\ln x\right| < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

2) $\forall x \in [1,+\infty[: \ln x < 2\sqrt{x}$.

5.192 Montrer que pour tout entier $n > 1$:

$$\frac{1}{1+n^2} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}} .$$

5.193 Montrer que pour tout $x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$:

$$\ln(1+x) < x .$$

5.194 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\ln(1+x) > \frac{x}{1+x} .$$

5.195 Montrer que pour tout $x \in \ ]0,1[$:

$$\ln\sqrt{x} < \frac{x-1}{x+1}.$$

5.196 Montrer que pour tout $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$:

$$x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!}\cos x .$$

5.197 Montrer que pour tout $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$:

$$2x < \sin 2x + \operatorname{tg} x .$$

5.198 Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} .$$

5.199 Montrer que pour tout $x > \sqrt{2}$:

$$x < x + \ln\left(x^2 - 1\right) < 2x .$$

5.200 Soit $f : \left]0,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} .$$

1) Montrer que cette fonction est strictement décroissante.

2) En déduire que pour $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \frac{\alpha\pi}{2\beta} .$$

5.201 Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$:

$$\left|\ln\left(2-8x^4\right) + 4x^4 - \ln 2\right| < \frac{1}{18} .$$

5.202 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} .$$

5.203 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = 2x + \cos x^2 .$$

Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 4 autour de 0.

5.204 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{2+x^2+x^8} .$$

Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 6 autour de 0.

5.205 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \operatorname{Arctg}\frac{1-x}{1+x^2} .$$

Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 5 autour de 1.

5.206 Soit la fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \ln\left(5 + \operatorname{Arcsin} x\right) .$$

Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 5 autour de 0.

5.207 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \cos(\cos x) .$$

Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 6 autour de 0.

5.208 Soit $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \cos\left(1 - \sqrt{\cos x}\right).$$

Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 6 autour de 0.

5.209 Soit $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \left(\cos x\right)^{1+\sin x}.$$

Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 4 autour de 0.

5.210 Soit $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = e^{\sqrt{\cos x}}.$$

Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 5 autour de 0.

5.211 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 100 autour de 0.

5.212 Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale définie par

$$P(x) = \sum_{k=1}^{10} k^2 x^k.$$

Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 5 autour de 2.

5.213 Trouver les onze constantes $\alpha_0, \ldots, \alpha_{10}$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait

$$x^{10}+3x^8-5x^3+x^2-15 = \sum_{k=0}^{10} \alpha_k \left(x-1\right)^k.$$

5.214 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^3$ telle que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin x - x} = 1.$$

Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 3 autour de 0.

5.215 Calculer $e^{0,2}$ à 10^{-6} près.

5.216 Calculer $\ln(1{,}01)$ à 10^{-6} près.

5.217 Estimer l'erreur commise si on utilise l'approximation

$$\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{x}{2}$$

pour des $|x| \leq 0{,}02$.

5.218 Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathbf{C}^n$ (avec $n > 1$) telles que g et Q, son polynôme de Taylor d'ordre n autour de a, ne s'annulent pas sur I. Montrer qu'il existe une fonction $\phi : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^n$ vérifiant $\lim\limits_{x\to a} \frac{\phi(x)}{(x-a)^n} = 0$ et telle que pour tout $x \in I$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} + \phi(x)$$

où $P(x)$ est le polynôme de Taylor d'ordre n de la fonction f autour de a.

5.219 Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, l'équation $x^5 - 5x + \alpha = 0$ admet-elle exactement trois racines réelles distinctes ?

5.220 Montrer que l'équation $x^4 - 2x^2 + 2x + 1 = 0$ admet exactement deux racines réelles distinctes α_1 et α_2 et que, de plus, $-2 < \alpha_1 < -1 < \alpha_2 < 0$.

5.221 Montrer que $x = 0$ est l'unique solution de l'équation

$$x^5 + 3x^3 + 2x + \sin x + \cos x - 1 = 0.$$

5.222 Soient $\alpha > 0$, β, μ et σ quatre constantes vérifiant $\beta^2 - 3\alpha\mu < 0$. Montrer que l'équation

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \mu x + \sigma = 0$$

possède une et une seule racine réelle.

5.223 Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et un entier $n > 1$. Montrer que l'équation

$$x^n + \alpha x + \beta = 0$$

possède au plus deux racines réelles distinctes si n est pair et trois racines réelles distinctes si n est impair.

5.224 Montrer que tout polynôme à coefficients réels de degré $n \geq 1$ admet au plus n racines réelles distinctes.

5.225 Résoudre

$$x - \frac{1}{1-x^3} = 0\,.$$

5.226 Combien de racines réelles distinctes, l'équation

$$\sin\frac{1}{x} + \operatorname{sh}\frac{1}{x} = x\,.$$

admet-elle ?

5.227 Montrer que l'équation

$$\frac{1}{\left(x-1\right)^3} + \frac{1}{\left(x-2\right)^5} = 0$$

possède exactement une solution dans $\mathbb{R}$.

5.228 Montrer que l'équation

$$\frac{1}{x^5} + \frac{1}{\left(x-1\right)^3} + \frac{1}{\left(x-2\right)} = 0$$

possède exactement deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

5.229 Soit $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ n constantes. Montrer que l'équation

$$\frac{1}{\left(x-\alpha_1\right)} + \cdots + \frac{1}{\left(x-\alpha_n\right)} = 0$$

possède exactement $n-1$ solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

5.230 Montrer que l'équation

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - x^3 - \operatorname{sh} x = 0$$

possède exactement trois racines réelles distinctes.

5.231 Montrer que $x = 0$ est l'unique racine réelle de l'équation

$$\frac{1}{x-1} + e^{-x^3} = 0\,.$$

5.232 Montrer que l'équation

$$\frac{1}{x^3-1} + e^{-x^5} - \operatorname{sh} x^7 = 8$$

admet exactement deux racines réelles distinctes.

5.233 Montrer que l'équation

$$\frac{2x-1}{x(x-1)} + \cos x = 0$$

admet une et une seule solution dans l'intervalle ouvert $]0,1[$.

5.234 Discuter, selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$, le nombre exact de solution de l'équation

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + a = 0.$$

5.235 Montrer que l'équation

$$\ln\bigl(1+|x|\bigr) + \frac{1}{1-x} = 0$$

possède exactement une solution α dans $\mathbb{R}$ et que $1 < \alpha < 2$.

5.236 Combien de racines réelles distinctes, l'équation

$$\frac{1}{x(1-x)} + \ln x^2 = 0$$

admet-elle ?

5.237 Discuter, selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, le nombre de solution de l'équation

$$\frac{x}{3^x} = \alpha\,.$$

5.238 Résoudre $3^x + 4^x = 2^x + 5^x$.

5.239 Soit $2^x + 3^x = n^x$.

1) Montrer que pour tout entier $n > 3$, cette équation admet une et une seule solution dans $\mathbb{R}$.
2) En désignant par x_n cette solution, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0\,.$$

Calculer la limite de la suite $\bigl(x_n\bigr)$ définie par

5.240 $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^n}} \max\limits_{x\geq 0} x^n\, e^{-x^2}$.

5.241 $x_n = \max\limits_{0\leq x\leq 1} \left((n+1)\bigl(1-x\bigr)^n x\right)$.

5.242 $x_n = \max\limits_{0\leq x\leq 1} \left((1-x)\ln 2^{(n+1)x^n}\right)$.

5.243 $x_n = \max\limits_{0\leq x\leq 1} \left(\sqrt{n}\, x\bigl(1-x^2\bigr)^n\right)$.

5.244 Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}\,.$$

1) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$ avec $x \neq \sqrt{2}$: $f(x) > \sqrt{2}$.

2) En déduire que la suite $\big(x_n\big)$ définie par

$$x_{n+1} = f\big(x_n\big) \text{ et } x_0 = 2$$

converge. Calculer sa limite.

5.245 Soit $f :]-2,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \ln(x+2) - x\,.$$

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède exactement deux racines réelles distinctes α et β et que, de plus, on a

$$-2 < \alpha < 0 < \beta\,.$$

2) En déduire que la suite $\big(x_n\big)$ définie par

$$x_{n+1} = \ln\big(2 + x_n\big) \text{ et } x_0 = 0$$

converge vers β.

5.246 1) Montrer que pour tout entier $n > 0$:

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}\,.$$

2) En déduire que la suite $\big(x_n\big)$ définie par

$$x_n = -\ln n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

converge. Par définition, la limite de cette suite est appelée la ***constante d'Euler*** et est notée γ.

3) Montrer que

$$\gamma = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right).$$

5.247 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^2$ telle que $f(0) = 0$. Calculer la limite de la suite $\big(x_n\big)$ définie par

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

5.248 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = 1 + (x-1)\,e^x\,.$$

Calculer la limite de la suite $\big(x_n\big)$ définie par

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,.$$

5.249 Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dont la fonction dérivée est bornée. Montrer que la suite $\big(x_n\big)$ définie par

$$x_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$$

est convergente.

5.250 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \big|f'(x)\big| < 1\,.$$

1) Montrer que la fonction f possède un unique point fixe.

2) Que devient ce résultat si

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \big|f'(x)\big| = 1\ ?$$

5.251 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 < m < f'(x) \leq M < +\infty\,.$$

1) Montrer que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.

2) Montrer que la suite $\big(x_n\big)$ définie par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f\big(x_n\big)}{M} \text{ et } x_0 = 0$$

converge vers l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$.

5.252 Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x+1}{2} + \ln x\,.$$

1) Montrer que dans $]3,+\infty[$, f possède un unique point fixe α et que $3 < \alpha < 4$.

2) Montrer que $f\big([3,4]\big) \subset [3,4]$.

3) Vérifier que pour tout $x \in]3,4[$:

$$0 < f'(x) < \frac{5}{6}.$$

4) En déduire que la suite $\big(x_n\big)$ définie par

$$x_{n+1} = f\big(x_n\big) \text{ et } x_0 = 3$$

converge vers α.

5.253 Soient $f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ et $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ les deux fonctions définies respectivement par

$$f(x) = x + \ln\big(x^2 - 1\big)$$

et

$$g(x) = \sqrt{1 + e^{-x}}.$$

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution α et que $1 < \alpha < 2$.

2) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$.

3) Montrer que $g\big([1,2]\big) \subset [1,2]$.

4) Vérifier que pour tout $x \in]1,2[$:

$$\big|g'(x)\big| < \frac{1}{4}.$$

5) En déduire que la suite $\big(x_n\big)$ définie par

$$x_{n+1} = g\big(x_n\big) \text{ et } x_0 = 1$$

converge vers α.

5.254 Soit $a \in]0,1[$. A chaque entier $n \geq 1$, on associe la fonction $f_n : [a,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right).$$

Montrer que la suite $\big(f_n\big)$ est uniformément convergente.

5.255 A chaque entier $n \geq 0$, on associe la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x^n(1-x).$$

Montrer que la suite $\big(f_n\big)$ est uniformément convergente.

5.256 A chaque entier $n \geq 1$, on associe la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$

1) Montrer que la suite (f_n) est décroissante.

2) En déduire que sur chaque intervalle fermé et borné, la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction $f(x) = e^{-x^2}$.

5.257 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout couple x, y de $\mathbb{R}$:

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leq (x-y)^2.$$

Montrer que f est constante.

5.258 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que

1) f paire $\Rightarrow f'$ impaire.

2) f impaire $\Rightarrow f'$ paire.

3) f périodique $\Rightarrow f'$ périodique.

4) Etudier la réciprocité de ces trois implications.

5.259 Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \operatorname{sh}\left(\alpha \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right).$$

1) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\big(1+x^2\big)f''(x) + xf'(x) - \alpha^2 f(x) = 0.$$

2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n+2)}(0) = \big(\alpha^2 - n^2\big)f^{(n)}(0).$$

5.260 Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k3^k$.

5.261 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

5.262 Montrer que pour tout entier $k > 0$:

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}.$$

En déduire que pour tout entier $n > 1$:

1) $\dfrac{n^{n-1}}{(n-1)!} < e^{n-1} < \dfrac{n^n}{(n-1)!}$.

2) $n^n e^{1-n} < n! < n^{n+1}e^{1-n}$.

5.263 Soient $\ell \in \mathbb{R}^*$, $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) + f'(x) = \ell$$

et $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = e^x f(x)$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

2) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

5.264 Soit $f :]0,1[\to]0,+\infty[$ une fonction dérivable telle que

$$\lim_{x\to0+} f(x) = 0\,.$$

Montrer que la fonction $g :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

n'est pas bornée.

5.265 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^2$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) \geq 0$. Montrer qu'il existe deux constantes α et β telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) \geq \alpha x + \beta\,.$$

5.266 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(0) = f'(1) = 0$. Montrer qu'il existe au moins un élément α de $]0,1[$ pour lequel on ait

$$f'(\alpha) = \frac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha}\,.$$

5.267 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = 0$. De plus, on suppose qu'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout $|x| < \delta$: $f'(x) \neq 0$. Montrer que

$$\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{f'(x)} = \ell \Rightarrow \ell = 0\,.$$

5.268 Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^2$ telle que $f''(0) \neq 0$ et soit $\theta :]-1,1[\to]0,1[$ une fonction pour laquelle, pour tout $x \in]-1,1[$, on puisse écrire l'égalité suivante :

$$f(x) = f(0) + f'\big(x\theta(x)\big)x\,.$$

Montrer que $\lim\limits_{x\to0} \theta(x) = \dfrac{1}{2}$.

5.269 Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \ell > 0\,.$$

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

5.270 Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et bornée telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \ell\,.$$

Montrer que $\ell = 0$.

5.271 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et périodique telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \ell\,.$$

Montrer que f est constante.

5.272 Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \ell\,.$$

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$.

2) La réciproque est-elle vraie ?

5.273 Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sin x^2}{x}\,.$$

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.

5.274 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f, g :]a,+\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. De plus, on suppose que g' ne s'annule pas et

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = +\infty\,.$$

Montrer que $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \neq -\infty$.

5.275 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fonctions telles que $g \leq f \leq h$, $f(a) = g(a) = h(a)$ et $g'(a) = h'(a)$. Montrer que $f'(a) = g'(a)$.

5.276 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction de période $T = 2$ définie sur $[-1, 1]$ par $g(x) = |x|$. Montrer que la ***fonction de Weierstrass*** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n g\left(4^n x\right)$$

est continue partout et dérivable nulle part.

5.277 1) Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$:

$$0 < \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x < \frac{x^3}{3\left(1-x^2\right)}.$$

2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 < \frac{2n+1}{2} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

3) Montrer que les deux suites (x_n) et (y_n) définies respectivement par

$$x_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}}{n!} \quad \text{et } y_n = x_n\, e^{\frac{1}{12\, n}}$$

sont adjacentes et que leur limite commune ℓ est positive.

4) En utilisant la formule de Wallis, montrer que $\ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

5) ***Formule de Stirling***. Montrer qu'à chaque entier $n \geq 1$, on peut associer un unique élément θ_n de $]0, 1[$ tel que

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}\, e^{\frac{\theta_n}{12\, n}}.$$

6) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}} = 1.$$

7) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\binom{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-k}\right).$$

5.278 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$:

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{n}{4}.$$

5.279 Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et qui de plus admet un maximum local en a et un autre en b. Montrer qu'il existe au moins un élément c de $]a, b[$ pour lequel on ait $f'(c) = 0$.

5.280 Soient I un intervalle ouvert, $a < b$ deux éléments de I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(a) \neq f'(b)$.

1) Montrer que sur $[a, b]$, la fonction dérivée $f' : I \to \mathbb{R}$ prend toute valeur comprise entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

2) En déduire que si $f'(a)f'(b) < 0$, la fonction dérivée f' s'annule au moins une fois dans $]a, b[$.

3) Montrer que si f' est monotone, $f \in \mathbf{C}^1$.

5.281 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que si sa fonction dérivée f' ne s'annule pas, la fonction f est strictement monotone.

5.282 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire et dérivable. Montrer que f' s'annule au moins une fois.

5.283 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) \geq m > 0$. Montrer que la fonction f s'annule une et une seule fois.

5.284 Soient $0 < a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe au moins un élément c de $]a, b[$ pour lequel on ait

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(c) - cf'(c).$$

5.285 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}^*$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe au moins un élément c de $]a, b[$ pour lequel on ait

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c}.$$

5.286 Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^2$.

1) Montrer que pour tout $x \in I$:

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

2) En déduire, en utilisant uniquement la définition d'une fonction convexe, que f est convexe si et seulement si pour tout $x \in I$: $f''(x) \geq 0$.

5.287 Soit $f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = -\ln(\ln x).$$

1) Vérifier que f est convexe.

2) En déduire que pour tout couple a, b de $]1,+\infty[$:

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \,\ln b}.$$

5.288 Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = x \ln x.$$

1) Vérifier que f est convexe.

2) En déduire que pour tout couple a, b de $]0,+\infty[$:

$$(a+b)\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq a\ln a + b\,\ln b.$$

5.289 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n > 0$ et $p, q > 1$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

1) Vérifier que la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^p$ est convexe.

2) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Inégalité de Hölder ou de ***Cauchy-Schwarz*** si $p = q = 2$.

3) En déduire que pour tout $r > 1$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k + \beta_k\right)^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Inégalité de Minkowski.

5.290 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^x$.

1) Vérifier que f est convexe.

2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n > 0$:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

La ***moyenne géométrique*** est inférieure à la ***moyenne arithmétique***.

5.291 Soient $\alpha > 1$ et $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^\alpha$.

1) Vérifier que f est convexe.

2) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n > 0$:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^\alpha \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^\alpha.$$

5.292 Soient p, $q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = -\ln x.$$

1) Vérifier que f est convexe.

2) En déduire que pour tout $\alpha, \beta \in]0,+\infty[$:

$$\alpha\,\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}.$$

5.293 Soient I un intervalle ouvert et f, $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et convexes.

1) Montrer que la fonction $f+g$ est aussi convexe.

2) Obtient-on le même résultat pour la fonction fg ?

5.294 Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes de classe $\mathbf{C}^2$.

1) Montrer que si g est croissante, la fonction composée $g \circ f$ est aussi convexe.

2) Que devient ce résultat si g n'est pas supposée croissante ?

5.295 Donner un exemple d'une fonction convexe non continue.

5.296 Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que f est convexe si et seulement si sa courbe C se trouve en chacun de ses points au-dessus de sa tangente.

5.297 Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe $\mathbf{C}^1$. De plus, on suppose qu'il existe trois éléments $a < d < b$ de I tels que le point $D = \big(d, f(d)\big)$ se trouve sur la corde Γ qui joint les deux points $A = \big(a, f(a)\big)$ et $B = \big(b, f(b)\big)$. Montrer qu'entre A et B, Γ et la courbe $C = \big\{\big(x, f(x)\big) : a \leq x \leq b\big\}$ sont confondues.

5.298 Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que pour tout couple x, y de $\mathbb{R}$:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

La réciproque est-elle vraie ?

5.299 Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout couple x, y de I :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

5.300 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $\alpha \in \mathbb{R}$. De plus, on suppose que $E = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\} \neq \emptyset$. Montrer que E est un intervalle. La réciproque est-elle vraie ?

5.301 Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe, croissante et non constante. Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

5.302 Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell \leq 0.$$

Montrer que f est décroissante.

5.303 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $f'(a) = 0$. Montrer que f atteint son minimum en a.

5.304 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée. Montrer que f est constante.

5.305 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que les deux limites $\lim_{x \to a+} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ existent. Montrer que f est uniformément continue.

5.306 Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe et non monotone. Montrer qu'il existe un élément c de $]a, b[$ tel que f est décroissante sur $]a, c]$ et croissante sur $[c, b[$.

5.307 Soient $a < b$ deux nombres réels et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe et bornée.

1) Montrer que les deux limites $\lim_{t \to a+} f(t)$ et $\lim_{t \to b-} f(t)$ existent.

2) Montrer que la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} \lim_{t \to a+} f(t) & \text{si } x = a \\ f(x) & \text{si } a < x < b \\ \lim_{t \to b-} f(t) & \text{si } x = b. \end{cases}$$

est convexe.

5.308 ***Méthode de Newton***. Soient $a < b$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^2$ telle que $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ et

$$\forall x \in [a, b] \ : \ f''(x) > 0.$$

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une et une seule solution α dans $]a, b[$.

2) Montrer que pour tout $x \in [a, \alpha]$: $f'(x) < 0$.

3) Montrer que pour tout $x \in [a, \alpha[$:

$$x < x - \frac{f(x)}{f'(x)} < \alpha\,.$$

4) Soit (x_n) la suite définie par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ et } x_0 = a\,.$$

4a) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$: $a \leq x_n < x_{n+1} < \alpha$.
4b) En déduire que cette suite converge vers α.

5.309 Soit I un intervalle. Montrer que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout triplet $x < y < z$ de I :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}\,.$$

5.310 Soient I un intervalle ouvert et une fonction convexe. Montrer que f est continue. Que devient ce résultat si l'intervalle I n'est pas supposé ouvert ?

5.311 Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que f est convexe si et seulement si f' est croissante.

5.312 Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et convexe. Montrer que $f \in \mathbf{C}^1$.

5.313 Soient $a < b$ deux nombres réels et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que f est minorée.

5.314 Etudier la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^x\,.$$

5.315 Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \left(e^{|x|} - 2\right)^3.$$

5.316 Etudier la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = (x + 2)\, e^{\frac{1}{x}}\,.$$

5.317 Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt[5]{x^4(x - 1)}\,.$$

5.318 Etudier la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \operatorname{Arccos}\left(4x^3 - 3x\right).$$

5.319 Etudier la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt[x]{x}\,.$$

5.320 Etudier la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \operatorname{th} \frac{1}{x^2}\,.$$

5.321 Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}\,.$$

5.322 Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x\, e^{-x^2}\,.$$

5.323 Etudier la fonction $f :]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}\,.$$

5.324 Etudier la fonction $f :]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\,.$$

5.325 Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x + \frac{1}{1 + x^2}\,.$$

5.326 Etudier la fonction $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 - \cos x}}\,.$$

5.327 Etudier la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \operatorname{Arccos}\left(1 - 2x^2\right) + \operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1 - x^2}\right).$$

5.328 Etudier la fonction $f :]-\infty, 0] \cup]2, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}\,.$$

5.329 Etudier la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}\,.$$

5.330 Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{x^2}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\right).$$

5.331 Etudier la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^2-2x-1}{x}\, e^{\frac{-1}{x}}\,.$$

5.332 Etudier la fonction $f : \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \ln \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{Argsh}\bigl(\operatorname{tg} 2x\bigr)\,.$$

5.333 Etudier la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x \ln\left(2 \operatorname{ch} \frac{1}{x}\right).$$

5.334 Etudier la fonction $f : [-1, 0] \cup [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{x^3 - x}\,.$$

5.335 Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = [x] + \bigl(x - [x]\bigr)^2\,.$$

5.336 Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \max_{-1 \le t \le 1} \left(1 - \bigl(x-t\bigr)^2\right).$$

5.337 Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \min_{-1 \le t \le 1} \left(1 - \bigl(x-t\bigr)^2\right).$$

Chapitre 6

Calcul intégral

6.1 Introduction

Soient $a < b$ deux éléments de $\mathbb{R}$. Le sous-ensemble fini et ordonné

$$\sigma = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\} \text{ avec } a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < b$$

est appelé une ***subdivision*** de $[a, b]$ et le nombre réel positif

$$\mathcal{P}(\sigma) = \max\{x_k - x_{k-1} : k = 1, \ldots, n\}$$

le ***pas*** de la subdivision σ. En particulier, la subdivision

$$\sigma = \left\{a, a + \frac{b-a}{n}, \ldots, x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \ldots, b\right\}$$

est appelée la ***subdivision régulière d'ordre*** n de $[a, b]$.

Soient $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, le nombre réel

$$\overline{S}_\sigma(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$$

où

$$M_k = \max_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$$

est appelé la ***somme de Riemann supérieure*** de la fonction f relativement à la subdivision σ, tandis que le nombre réel

$$\underline{S}_\sigma(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$$

où

$$m_k = \min_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$$

est appelé la ***somme de Riemann inférieure*** de la fonction f relativement à la subdivision σ.

Pour toute subdivision σ de $[a, b]$:

$$m(b-a) \leq \underline{S}_\sigma(f) \leq \overline{S}_\sigma(f) \leq M(b-a)$$

où

$$m = \min_{a \leq x \leq b} f(x) \text{ et } M = \max_{a \leq x \leq b} f(x) \;;$$

ce qui entraîne que les deux nombres réels

$$\overline{S}(f) = \inf \left\{ \overline{S}_\sigma(f) : \sigma \text{ subdivision de } [a, b] \right\}$$

et

$$\underline{S}(f) = \sup \left\{ \underline{S}_\sigma(f) : \sigma \text{ subdivision de } [a, b] \right\}$$

existent. De plus, ils sont égaux.

Définition 6.1 Soient $a < b$ deux éléments de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Par définition, le nombre réel $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$ est appelé l'***intégrale*** de la fonction f sur $[a, b]$ et on écrit

$$\overline{S}(f) = \underline{S}(f) = \int_a^b f(x)\, dx \,.$$

Par convention :

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx \text{ et } \int_a^a f(x)\, dx = 0 \,.$$

D'un point de vue géométrique, si l'on désigne par A l'aire de la surface plane E délimitée par la courbe C de la fonction $|f|$, l'axe Ox et les deux droites verticales d'équation respective $x = a$ et $x = b$, on peut écrire que pour toute subdivision σ de $[a, b]$:

$$\underline{S}_\sigma\big(|f|\big) \leq A \leq \overline{S}_\sigma\big(|f|\big) \,.$$

D'où

$$A = \overline{S}\big(|f|\big) = \underline{S}\big(|f|\big) = \int_a^b \big|f(x)\big|\, dx \,.$$

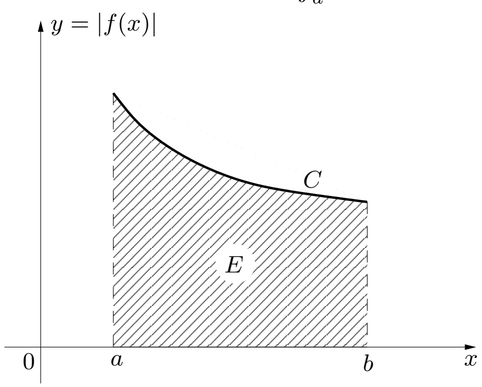


Fig. 6.1

Propriétés

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors,

1) Linéarité. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b \big(\alpha f + \beta g\big)(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

2) Supposons que pour tout $x \in [a, b]$: $f(x) \geq 0$. Alors,

a) $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \geq 0\,.$

b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = 0 \Longleftrightarrow \forall\, x \in [a, b] :\ f(x) = 0\,.$

3) Supposons que pour tout $x \in [a, b]$: $f(x) \geq g(x)$. Alors,

a) $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx\,.$

b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx \Longleftrightarrow \forall\, x \in [a, b] :\ f(x) = g(x)\,.$

4)
$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b \big|f(x)\big|\, dx\,.$$

5) $\forall\, c \in\,]a, b[$: $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx\,.$

Proposition 6.2 *Soit $\big(\sigma_n\big)$ une suite de subdivisions de $[a, b]$ telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{P}\big(\sigma_n\big) = 0\,.$$

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{S}_{\sigma_n}(f) = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}_{\sigma_n}(f) = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Proposition 6.3 (Théorème de la moyenne) *Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. De plus, on suppose que pour tout $x \in [a, b]$: $g(x) \geq 0$. Alors, il existe au moins un élément c de $[a, b]$ pour lequel on ait*

$$\int_a^b (fg)\,(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

En particulier, si $g = 1$,

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)\, (b - a)\,.$$

Proposition 6.4 (Théorème de la convergence uniforme) *Soit* (f_n) *une suite d'éléments de* $\mathbf{C}([a,b],\mathbb{R})$ *qui converge uniformément vers la fonction* f*. Alors,*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Proposition 6.5 (Théorème de la convergence monotone) *Soit* (f_n) *une suite monotone d'éléments de* $\mathbf{C}([a,b],\mathbb{R})$ *qui converge simplement vers la fonction continue* f*. Alors,*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

6.2 Primitives

Définition 6.6 Soient $a < b$ deux éléments de $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction continue $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ est appelée une ***primitive*** de f si pour tout $x \in\,]a,b[\, : F'(x) = f(x)$.

Proposition 6.7 *Si* F_1 *et* F_2 *sont deux primitives de la fonction continue* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*, ces deux fonctions sont égales à une constante près. Autrement dit, pour tout* $x \in [a,b]$ *:* $F_1(x) = F_2(x) + \mathrm{cste}$.

Définition 6.8 Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une primitive de la fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Alors, $\int^x f(t)\,dt$ s'appelle une ***intégrale indéfinie*** et, par définition, pour tout $x \in [a,b]$:

$$\int^x f(t)\,dt = F(x) + \mathrm{cste}\,.$$

Proposition 6.9 (Existence) *Soient* $a < b$ *deux éléments de* $\mathbb{R}$ *et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors, la fonction* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est une primitive de f*.*

Proposition 6.10 (Théorème fondamental du calcul intégral) *Soient* $a < b$ *deux éléments de* $\mathbb{R}$ *et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors, si* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est une primitive de* f*, on peut écrire*

$$F(b) - F(a) = \int_b^a f(x)\,dx\,.$$

On utilise aussi la notation suivante :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b\,.$$

Proposition 6.11 *Soient $a < b$ deux éléments de $\mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, I un intervalle ouvert et $g, h : I \to [a,b]$ deux fonctions de classe $\mathbf{C}^1$. Alors, la fonction $K : I \to \mathbb{R}$ définie par*

$$K(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$$

est aussi de classe $\mathbf{C}^1$. De plus, pour tout $x \in I$:

$$K'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x) - f\big(h(x)\big)h'(x)\,.$$

6.3 Intégration par parties

Proposition 6.12 *Soient I un intervalle ouvert, $a, b \in I$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathbf{C}^1$. Alors,*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx\,.$$

Exemple 6.13 Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^{n+1}$. Alors, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,\big(x-a\big)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x \big(x-t\big)^n f^{(n+1)}(t)\,dt\,.$$

Ici, le reste du développement limité d'ordre n de la fonction f autour de a est donné explicitement par

$$\mathcal{R}_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x \big(x-t\big)^n f^{(n+1)}(t)\,dt\,.$$

6.4 Changement de variable

Proposition 6.14 *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, I un intervalle ouvert, $\alpha < \beta$ deux éléments de I et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^1$ telle que $\varphi\big([\alpha,\beta]\big) \subset [a,b]$. Alors,*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt\,.$$

Par définition, la transformation

$$x = \varphi(t) \text{ avec } t \in I$$

est appelée un ***changement de variable****.*

Exemple 6.15 Soient $P, Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions polynomiales à n variables réelles, Q ne s'annulant pas. On pose, pour tout $\big(x_1, \ldots, x_n\big) \in \mathbb{R}^n$:

$$R\big(x_1, \ldots, x_n\big) = \frac{P\big(x_1, \ldots, x_n\big)}{Q\big(x_1, \ldots, x_n\big)}\,.$$

Alors, si $a < b$ sont deux éléments de $\mathbb{R}$ et $\mu_1, \ldots, \mu_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ n fonctions continues, la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = R\big(x_1 = \mu_1(x), \ldots, x_n = \mu_n(x)\big)$$

est continue. Dans le but de pouvoir l'intégrer, on va donner quelques changements de variable possibles mais non obligatoires.

6.4.1 $\quad f(x) = R\big(e^x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x\big)$

Changement de variable recommandé :

$$x = \varphi(t) = \ln t \Longleftrightarrow t = e^x\,.$$

6.4.2 $\quad f(x) = R\big(\sin x, \cos x\big)$

Rappel : $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$ et $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$.

Changement de variable recommandé :

$$x = \varphi(t) = 2\operatorname{Arctg} t \Longleftrightarrow t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \ \text{ et } \ -\pi < x < \pi\,.$$

6.4.3 $\quad f(x) = R\big(\sin^2 x, \cos^2 x\big)$

Rappel : $\sin^2 x = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ et $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

Changement de variable recommandé :

$$x = \varphi(t) = \operatorname{Arctg} t \Longleftrightarrow t = \operatorname{tg} x \text{ et } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,.$$

6.4.4 $\quad f(x) = R\big(x, x^{\frac{1}{k_1}}, \ldots, x^{\frac{1}{k_n}}\big)$

Changement de variable recommandé :

$$x = \varphi(t) = t^k \ \text{ avec } k = \operatorname{ppcm}\big[k_1, \ldots, k_n\big]\,.$$

6.4.5 $\quad f(x) = R\left(x\,,\ \sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$

où α, β, γ et δ sont quatre constantes telles que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

Changement de variable recommandé :

$$x = \varphi(t) = \frac{-\delta t^m + \beta}{\gamma t^m - \alpha} \Longleftrightarrow t^m = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\,.$$

6.4.6 $f(x) = R\left(x\,,\,\sqrt{\beta^2x^2+\alpha^2}\right)$ avec $\alpha, \beta > 0$

Changement de variable recommandé :

$$x = \frac{\alpha}{\beta}\,\mathrm{sh}\,t\,.$$

6.4.7 $f(x) = R\left(x, \sqrt{\beta^2x^2-\alpha^2}\right)$ avec $\alpha, \beta > 0$

Changement de variable recommandé :

$$x = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta}\,\mathrm{ch}\,t & \text{si } x \geq \dfrac{\alpha}{\beta} \\ -\dfrac{\alpha}{\beta}\,\mathrm{ch}\,t & \text{si } x \leq -\dfrac{\alpha}{\beta}\,. \end{cases}$$

6.4.8 $f(x) = R\left(x, \sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}\right)$ avec $\alpha, \beta > 0$

Changements de variable recommandés :

$$x = \frac{\alpha}{\beta}\,\sin t \text{ ou } x = \frac{\alpha}{\beta}\,\cos t\,.$$

6.5 Intégration des fonctions rationnelles

Soient $P(t)$ et $Q(t)$ deux polynômes vérifiant les deux propriétés suivantes :

1) $P(t)$ et $Q(t)$ n'ont aucun diviseur commun.
2) Le coefficient du terme du plus haut degré de $Q(t)$ vaut 1.

Soient $a_1, \ldots, a_n$ les n racines réelles distinctes de $Q(t)$ et

$$\left(t^2+2b_1t+c_1\right), \ldots, \left(t^2+2b_mt+c_m\right)$$

l'ensemble de ses diviseurs irréductibles $\left(b_j^2 - c_j < 0\right)$ du second degré tous distincts. Alors, on peut écrire que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$Q(t) = \left(t-a_1\right)^{p_1} \cdots \left(t-a_n\right)^{p_n} \left(t^2+2b_1t+c_1\right)^{q_1} \cdots \left(t^2+2b_mt+c_m\right)^{q_m}.$$

Cette décomposition en ***éléments simples*** est unique et pour tout $t \notin \left\{a_1, \ldots, a_n\right\}$:

$$\begin{aligned}\frac{P(t)}{Q(t)} = R(t) &+ \sum_{k=1}^{p_1} \frac{\alpha_{1k}}{\left(t-a_1\right)^k} + \cdots + \sum_{k=1}^{p_n} \frac{\alpha_{nk}}{\left(t-a_n\right)^k} \\ &+ \sum_{k=1}^{q_1} \frac{\beta_{1k}t+\gamma_{1k}}{\left(t^2+2b_1t+c_1\right)^k} + \cdots + \sum_{k=1}^{q_m} \frac{\beta_{mk}t+\gamma_{mk}}{\left(t^2+2b_mt+c_m\right)^k}\end{aligned}$$

où les α_{rk}, β_{rk} et γ_{rk} sont des constantes (uniques) et où $R(t)$ est le polynôme, quotient dans la division suivant les puissances décroissantes de $P(t)$ par $Q(t)$. Par conséquent,

$$\int^x \frac{P(t)}{Q(t)}\,dt = \int^x R(t)\,dt + \sum_{k=1}^{p_1}\int^x \frac{\alpha_{1k}}{\big(t-a_1\big)^k}\,dt + \cdots + \sum_{k=1}^{p_n}\int^x \frac{\alpha_{nk}}{\big(t-a_n\big)^k}\,dt$$
$$+ \sum_{k=1}^{q_1}\int^x \frac{\beta_{1k}t+\gamma_{1k}}{\big(t^2+2b_1t+c_1\big)^k}\,dt + \cdots + \sum_{k=1}^{q_m}\int^x \frac{\beta_{mk}t+\gamma_{mk}}{\big(t^2+2b_m+c_m\big)^k}\,dt\,.$$

Intégration des éléments simples

1)
$$\int^x \frac{dt}{(t-a)} = \ln|x-a| + \text{cste}\,.$$

2) Pour tout entier $k>1$:

$$\int^x \frac{dt}{(t-a)^k} = \frac{1}{(1-k)\big(x-a\big)^{k-1}} + \text{cste}\,.$$

3) Pour $b,c\in\mathbb{R}$ avec $b^2-c<0$ et $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$:

$$\int^x \frac{\beta t+\gamma}{\big(t^2+2bt+c\big)}\,dt = \frac{\beta}{2}\,\ln\!\big(x^2+2bx+c\big) + \frac{\gamma-b\beta}{\sqrt{c-b^2}}\,\operatorname{Arctg}\!\left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}\right) + \text{cste}\,.$$

4) Pour $b,c\in\mathbb{R}$ avec $b^2-c<0$, $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ et tout entier $k>1$:

$$\int^x \frac{\beta t+\gamma}{\big(t^2+2bt+c\big)^k}\,dt = \frac{\beta}{2(1-k)\big(x^2+2bx+c\big)^{k-1}}$$
$$+ \frac{\gamma-b\beta}{\big(\sqrt{c-b^2}\,\big)^{2k-1}}\int^{\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}} \frac{dt}{\big(t^2+1\big)^k}\,.$$

5) Posons pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$I_n(x) = \int^x \frac{dt}{\big(t^2+1\big)^n}\,.$$

Alors,

$$2n\,I_{n+1}(x) = \frac{x}{\big(x^2+1\big)^n} + (2n-1)\,I_n(x)\,.$$

6.6 Applications géométriques

D'une part, soient $a<b$ deux éléments de $\mathbb{R}$ et C la courbe de la fonction continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. D'autre part, soient I un intervalle ouvert, $t_1,t_2\in I$ et φ, $\psi: I\to\mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathbf{C}^1$ telles que $\varphi(t_1)=a$ et $\varphi(t_2)=b$. De plus, on suppose que pour tout t compris entre t_1 et t_2 :

$$\varphi(t)\in[a,b] \text{ et } \psi(t) = f\big(\varphi(t)\big)\,.$$

6.6.1 Longueur d'un arc de courbe

Ici, on suppose en plus que $f \in \mathbf{C}^1$ et $\tau\dot{\varphi} > 0$ où τ est le signe de $\dot{\varphi}$. Alors, la ***longueur de l'arc*** de la courbe C, compris entre les deux points $\mathrm{A} = \big(a, f(a)\big)$ et $\mathrm{B} = \big(b, f(b)\big)$, est donnée par

$$\int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx = \tau \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)}\, dt\,.$$

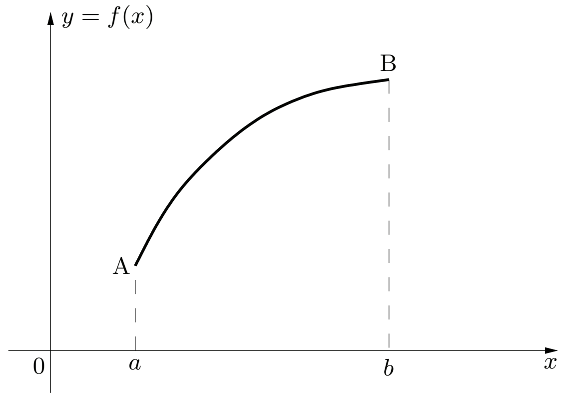


Fig. 6.2

6.6.2 Aire d'une surface plane

L'***aire*** de la surface plane E délimitée par la courbe C, l'axe Ox et les deux droites verticales d'équation respective $x = a$ et $x = b$, est donnée par

$$\int_a^b \big|f(x)\big|\, dx = \int_{t_1}^{t_2} \big|\psi(t)\big|\dot{\varphi}(t)\, dt\,.$$

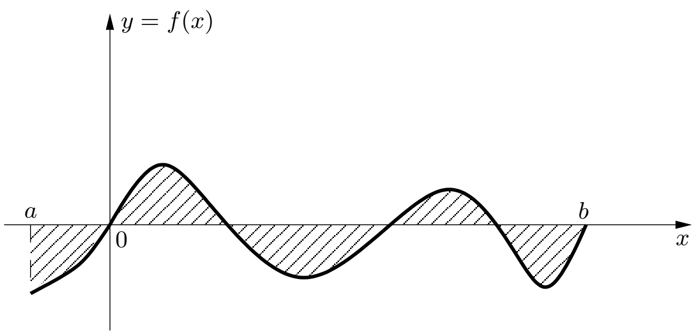


Fig. 6.3

6.6.3 Surface latérale d'un corps de révolution

Ici, on suppose en plus que $f \in \mathbf{C}^1$ et $\tau\dot{\varphi} > 0$ où τ est le signe de $\dot{\varphi}$.

1) Si $f \geq 0$, la ***surface latérale*** obtenue par la rotation autour de l'axe Ox de l'arc de la courbe C, compris entre les deux points $\mathrm{A} = \big(a, f(a)\big)$ et $\mathrm{B} = \big(b, f(b)\big)$, est donnée par

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx = 2\pi\tau \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)}\,dt\,.$$

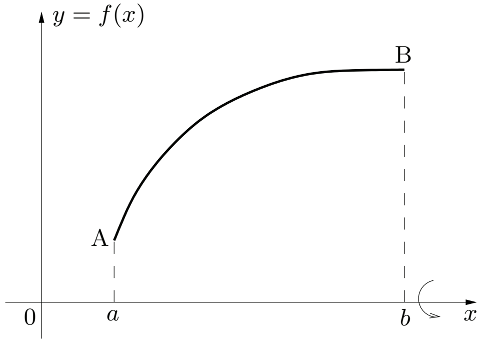


Fig. 6.4

2) Si $a \geq 0$, la ***surface latérale*** obtenue par la rotation autour de l'axe Oy de l'arc de la courbe C, compris entre les deux points $\mathrm{A} = \big(a, f(a)\big)$ et $\mathrm{B} = \big(b, f(b)\big)$, est donnée par

$$2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx = 2\pi\tau \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)}\,dt\,.$$

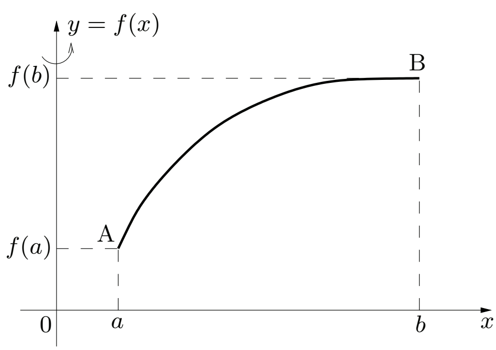


Fig. 6.5

6.6.4 Volume d'un corps de révolution

1) Le ***volume*** obtenu par la rotation autour de l'axe Ox de la surface plane E délimitée par la courbe C, l'axe Ox et les deux droites verticales d'équation respective $x = a$ et $x = b$ est donné par

$$\pi \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int_{t_1}^{t_2} \psi^2(t)\dot{\varphi}(t)\,dt\,.$$

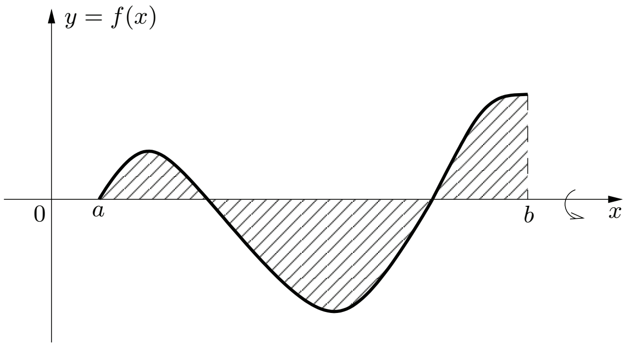


Fig. 6.6

2) Si $a \geq 0$, le ***volume*** obtenu par la rotation autour de l'axe Oy de la surface plane E délimitée par la courbe C, l'axe Ox et les deux droites verticales d'équation respective $x = a$ et $x = b$ est donné par

$$2\pi \int_a^b x\big|f(x)\big|\,dx = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \big|\psi(t)\big|\varphi(t)\dot{\varphi}(t)\,dt\,.$$

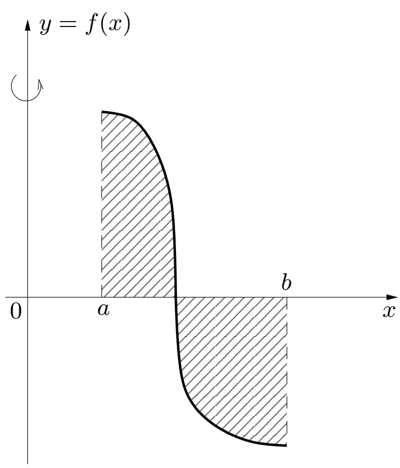


Fig. 6.7

6.6.5 Longueur et aire en coordonnées polaires

Soient $\alpha < \beta$ deux éléments de l'intervalle ouvert I et $\rho : I \to [0,\infty[$ une fonction de classe $\mathbf{C}^1$. De plus, on suppose que l'arc PQ est paramétré par les ***coordonnées polaires***

$$\begin{cases} \varphi(t) = \rho(t)\cos t \\ \psi(t) = \rho(t)\sin t, \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

avec $\mathrm{P} = \big(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)\big)$ et $\mathrm{Q} = \big(\varphi(\beta), \psi(\beta)\big)$. Alors,

1) La longueur de l'arc PQ est donnée par

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\dot\rho^2(t) + \rho^2(t)}\, dt\,.$$

2) Si $\mathrm{O} = (0,0)$, l'aire du secteur OPQ est donnée par

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(t)\, dt\,.$$

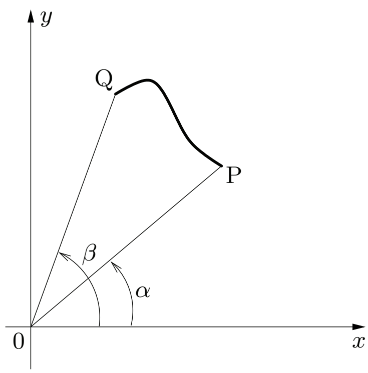


Fig. 6.8

6.7 Exercices

6.1 $\displaystyle\int^x \frac{\sin t}{1+\cos t}\, dt\,.$

6.2 $\displaystyle\int^x e^{\sqrt{t+1}}\, dt\,.$

6.3 $\displaystyle\int^x \frac{\operatorname{sh} t}{e^t+1}\, dt\,.$

6.4 $\displaystyle\int^x \frac{dt}{\operatorname{ch} t}\,.$

6.5 $\displaystyle\int^x \frac{e^t}{\operatorname{ch} t}\, dt\,.$

6.6 $\displaystyle\int^x \operatorname{Arctg} t\, dt\,.$

6.7 $\displaystyle\int^x \operatorname{Arctg} \sqrt{t}\, dt\,.$

6.8 $\displaystyle\int^x \operatorname{Arcsin}^2 t\, dt\,.$

6.9 $\displaystyle\int^x t\sin t^2\,dt\,.$

6.10 $\displaystyle\int^x t^3\cos t^2\,dt\,.$

6.11 $\displaystyle\int^x t^2\cos^2 t\,dt\,.$

6.12 $\displaystyle\int^x \frac{\sin t}{1+\cos t+\operatorname{tg}^2 t}\,dt\,.$

6.13 $\displaystyle\int^x \frac{dt}{\cos t-\sin t+1}\,.$

6.14 $\displaystyle\int^x \frac{dt}{4+\sin t}\,.$

6.15 $\displaystyle\int^x \frac{dt}{2+\cos t}\,.$

6.16 $\displaystyle\int^x \frac{\operatorname{tg} t}{1+\sin^2 t}\,dt\,.$

6.17 $\displaystyle\int^x e^t\sin t\,dt\,.$

6.18 $\displaystyle\int^x \sin(\ln t)\,dt\,.$

6.19 $\displaystyle\int^x t\ln\sqrt{t}\,dt\,.$

6.20 $\displaystyle\int^x \left(1+t^2\right)\ln t\,dt\,.$

6.21 $\displaystyle\int^x t^2\ln^2 t\,dt\,.$

6.22 $\displaystyle\int^x \ln^3 t\,dt\,.$

6.23 $\displaystyle\int^x t\ln(1+t)\,dt\,.$

6.24 $\displaystyle\int^x \frac{\ln t}{\left(1+t\right)^2}\,dt\,.$

6.25 $\displaystyle\int^x \sin(2t)\ln(\operatorname{tg} t)\,dt\,.$

6.26 $\displaystyle\int^x \sin^3(2t)\ln(\operatorname{tg} t)\,dt\,.$

6.27 $\displaystyle\int^x \frac{\sin t}{1+\sin t}\,dt\,.$

6.28 $\displaystyle\int^x \sin^7 t\cos t\,dt\,.$

6.29 $\displaystyle\int^x \frac{\sin 2t}{2+\sin t}\,dt\,.$

6.30 $\displaystyle\int^x \frac{\sin t}{2+\cos^2 t}\,dt\,.$

6.31 $\displaystyle\int^x \frac{\sin^2 t\cos t}{1+\sin^2 t}\,dt\,.$

6.32 $\displaystyle\int^x \frac{\cos^4 t\sin t}{1+\sin^2 t}\,dt\,.$

6.33 $\displaystyle\int^x \sin^4 t\,dt\,.$

6.34 $\displaystyle\int^x \sin^5 t\,dt\,.$

6.35 $\displaystyle\int^x \cos^8 t\,dt\,.$

6.36 $\displaystyle\int^x \cos^9 t\,dt\,.$

6.37 $\displaystyle\int^x \frac{dt}{\sin^2 t\cos^2 t}.$

6.38 $\displaystyle\int^x \frac{\operatorname{tg}^2 t}{\cos^2 t}\,dt\,.$

6.39 $\displaystyle\int^x \frac{\sin t}{\cos^4 t}\,dt\,.$

6.40 $\displaystyle\int^x \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}\,dt\,.$

6.41 $\displaystyle\int^x \frac{\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t}\,dt\,.$

6.42 $\displaystyle\int^x \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\,dt\,.$

6.43 $\displaystyle\int^x \frac{t}{\cos^2 t}\,dt\,.$

6.44 $\displaystyle\int^x \frac{dt}{\cos t}.$

6.45 $\displaystyle\int^x \frac{dt}{\sin t}.$

6.46 $\displaystyle\int^x \frac{dt}{\cos^3 t}\,.$

6.47 $\displaystyle\int^x \operatorname{tg}^2 t\,dt\,.$

6.48 $\displaystyle\int^x \operatorname{tg}^4 t\,dt\,.$

6.49 $\displaystyle\int^x \frac{\operatorname{Arctg}\sqrt{t}}{(1+t)\sqrt{t}}\,dt\,.$

6.50 $\displaystyle\int^x \frac{dt}{\sqrt{t+1}\left(1+\sqrt{t+1}\right)}.$

6.51 $\displaystyle\int^x \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}+1}\,dt\,.$

6.52 $$\int^x \frac{\sqrt[3]{t^2}}{1+\sqrt{t}}\,dt\,.$$

6.53 $$\int^x \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}\,\left(2+3\,\sqrt[3]{t}\right)}.$$

6.54 $$\int^x \frac{\sqrt{t}}{t(1+t)}\,dt\,.$$

6.55 $$\int^x \left(1+t^2\right)\sqrt{t}\,dt\,.$$

6.56 $$\int^x t^5\sqrt{1-t^3}\,dt\,.$$

6.57 $$\int^x t^2\sqrt{t^2-1}\,dt.$$

6.58 $$\int^x \frac{\sqrt{t+1}}{t}\,dt\,.$$

6.59 $$\int^x \frac{\sqrt[3]{t+1}}{t}\,dt\,.$$

6.60 $$\int^x \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}\,dt\,.$$

6.61 $$\int^x \frac{dt}{\sqrt{t(4-t)}}\,dt\,.$$

6.62 $$\int^x \frac{dt}{\sqrt{t^2-3t}}.$$

6.63 $$\int^x \frac{2t+1}{\sqrt{1+2t+2t^2}}\,dt\,.$$

6.64 $$\int^x \frac{dt}{\sqrt{2t^2-4t+10}}.$$

6.65 $$\int^x \frac{t}{\sqrt{-t^2+8t}}\,dt\,.$$

6.66 $$\int^x \frac{t^2+4}{\sqrt{t^2+t+1}}\,dt\,.$$

6.67 $$\int^x \frac{t^2}{\sqrt{t^2-t+1}}\,dt\,.$$

6.68 $$\int^x \frac{dt}{t\sqrt{1+t^n}}\,,\quad n\in\mathbb{N}^*\,.$$

6.69 $$\int^x \frac{dt}{t^2\sqrt{1-t^2}}.$$

6.70 $$\int^x t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt\,.$$

6.71 $$\int^x \frac{t^5}{\sqrt{1+t^2}}\,dt\,.$$

6.72 $$\int^x \frac{t}{1+\sqrt{1+t^2}}\,dt\,.$$

6.73 $$\int^x \frac{dt}{1+\sqrt{2t-t^2}}\,.$$

6.74 $$\int^x \frac{dt}{(1+t)\sqrt{1+t^2}}\,.$$

6.75 $$\int^x \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}\,\sqrt{t+\sqrt{t}+1}}\,dt\,.$$

6.76 $$\int^x \sqrt{t^3+t^4}\,dt\,.$$

6.77 $$\int^x \frac{1+t}{t^2-t+1}\,dt\,.$$

6.78 $$\int^x \frac{t^8}{1+t^2}\,dt\,.$$

6.79 $$\int^x \frac{t}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt\,.$$

6.80 $$\int^x \frac{t^3+1}{t^2+1}\,dt\,.$$

6.81 $$\int^x \frac{t^5+1}{t^3+1}\,dt\,.$$

6.82 $$\int^x \frac{t^4}{t^3+1}\,dt\,.$$

6.83 $$\int^x \frac{t^5+t^3+t}{t^4+1}\,dt\,.$$

6.84 $$\int^x \frac{dt}{t^4+t}\,.$$

6.85 $$\int^x \frac{dt}{t^4+1}\,.$$

6.86 $$\int^x \frac{dt}{t^6+1}\,.$$

6.87 $$\int^x \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^3}\,.$$

6.88 $$\int^x \frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt\,.$$

6.89 $$\int^x \frac{dt}{t^4+t^2}\,.$$

6.90 $$\int^x \frac{dt}{t^4\left(1+t^3\right)}\,.$$

6.91 $$\int^x \frac{dt}{t\left(1+t^5\right)}\,.$$

6.92 $$\int^x \frac{dt}{t\left(1+t^n\right)}\,,\quad n\in\mathbb{N}^*\,.$$

6.93 $\displaystyle\int^x \frac{t^5}{(1+t)(1+t^3)}\,dt\,.$

6.94 $\displaystyle\int^x \frac{2t+5}{\left(t^2+1\right)\left(t-3\right)}\,dt\,.$

6.95 $\displaystyle\int^x \frac{t^6}{\left(1+t^2\right)^3}\,dt\,.$

6.96 $\displaystyle\int^x \frac{t^2+t+1}{\left(t^2-1\right)^2}\,dt\,.$

6.97 $\displaystyle\int^x \frac{t^3\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^3}\,dt\,.$

6.98 $\displaystyle\int^x \frac{dt}{t\left(1+t^5\right)^5}\,.$

6.99 $\displaystyle\int^x \frac{dt}{\left(t^3-1\right)^2}\,.$

6.100 $\displaystyle\int^x \frac{t^2\ln t}{\left(t^3+1\right)^3}\,dt\,.$

6.101 $\displaystyle\int^x \frac{t^2+6t+19}{\left(t+3\right)^2}\ln t\,dt\,.$

Calculer

6.102 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{e^{\operatorname{Arctg}\frac{1}{t}}}{1+t^2}\,dt\,.$

6.103 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{dt}{t^2\,e^{\frac{1}{t}}}\,.$

6.104 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{5^t+5^{-t}}\,.$

6.105 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+e^t}\,.$

6.106 $\displaystyle\int_1^4 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,dt\,.$

6.107 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t+\sqrt{1+t}}\,.$

6.108 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t\cos^3 t}{4-\cos^2 2t}\,dt\,.$

6.109 $\displaystyle\int_0^4 \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,dt\,.$

6.110 $\displaystyle\int_0^4 \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+\sqrt{t}}}\,dt\,.$

6.111 Montrer que la fonction $f : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{1-2t\sin x+t^2}\,dt$$

est constante.

6.112 Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^5 x}{\sin^5 x+\cos^5 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x}{\sin^5 x+\cos^5 x}\,dx\,.$$

En déduire la valeur commune à ces deux intégrales.

Calculer

6.113 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\pi} \frac{x\sin t}{\sqrt{x^2-2x\cos t+1}}\,dt\,.$

6.114 $\displaystyle\lim_{x\to0}\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\,dt\,.$

6.115 $\displaystyle\lim_{x\to0}\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt\,.$

6.116 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\displaystyle\int_0^x \ln\left(1+t^2\right)dt}{x^3}\,.$

6.117 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\displaystyle\int_0^{x^2} e^{-\frac{t^2}{x^2}}\,dt}{x}\,.$

6.118 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+tx}}}{x}\,.$

6.119 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 e^{\sqrt{1+t}}\cos(tx)\,dt\,.$

6.120 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\displaystyle\int_0^x \sin t^2\,dt}{\sin^3 x}\,.$

6.121 Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to0+}\int_1^x t^n\ln t\,dt\right).$$

Peut-on intervertir les limites ?

6.122 Calculer

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{n\to+\infty}\int_0^{x^2} t^2\,e^{n(t-x^2)}\,dt\right).$$

Peut-on intervertir les limites ?

6.123 Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n^2t\big(1-t\big)^n dt \neq \int_0^1\left(\lim_{n\to+\infty} n^2t\big(1-t\big)^n\right)dt\,.$$

6.124 Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\,e^{\frac{t}{n}}\,dt\,.$$

6.125 Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n\sin t}\,dt = 0\,.$$

6.126 Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n(1-t)\cos(nt)\,dt\,.$$

6.127 Montrer que pour $t\in[0,1]$ et tout entier $n>0$:

$$\frac{1}{1+\left(1+\dfrac{t}{n+1}\right)^{n+1}} \leq \frac{1}{1+\left(1+\dfrac{t}{n}\right)^{n}}.$$

En déduire la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{dt}{1+\left(1+\dfrac{t}{n}\right)^n}\,.$$

Calculer

6.128 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{nt}{1+nt^2\ln n}\,dt\,.$

6.129 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{\sin(nt)}{nt}\,dt\,.$

6.130 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{t}{\big(\operatorname{sh} t+\operatorname{ch} t\big)^n}\,dt\,.$

6.131 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln\left(e+\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{t}{\ln n+nt^2}\,dt\right).$

6.132 Montrer que la suite $\big(x_n\big)$ définie par

$$x_n=\int_0^n \frac{t}{e^t+t}\,dt$$

converge.

6.133 Calculer la limite de la suite $\big(x_n\big)$ définie par

$$x_n=\int_0^n \frac{dt}{1+e^{nt}}\,.$$

6.134 Soit $\big(x_n\big)$ la suite définie par

$$x_{n+1}=\int_0^{x_n}\frac{e^{-t^2}}{2+t^2}\,dt \text{ et } x_0=1\,.$$

Calculer sa limite.

6.135 Montrer que la suite $\big(x_n\big)$ définie par

$$x_{n+1}=\int_0^{x_n}\frac{1+\sin^2 t}{2+\operatorname{ch} t^2}\,dt \text{ et } x_0=1$$

converge. Calculer sa limite.

6.136 Calculer la limite de la suite $\big(x_n\big)$ définie par

$$x_n=n^3\int_n^{2n}\frac{t}{1+t^5}\,dt\,.$$

6.137 1) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,dt.$

2) En déduire

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2k+3}=0\,.$$

Calculer la limite de la suite $\big(x_n\big)$ définie par

6.138 $\displaystyle x_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{n+k}\,.$

6.139 $\displaystyle x_n=\sum_{k=1}^n\frac{k^2}{n^3}\,.$

6.140 $\displaystyle x_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}\,.$

6.141 $p\in\mathbb{N}^*$. $\displaystyle x_n=\sum_{k=1}^n\frac{\big(2k-1\big)^p}{n^{p+1}}\,.$

6.142 1) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n\frac{k}{n(n+k)}.$

2) En déduire que si (a_k) est une suite qui converge vers a,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n\frac{a_k}{n+k}=a\ln 2\,.$$

6.143 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

1) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$: $f(xy) = f(x) + f(y)$.

2) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

3) Montrer que f est bijective.

4) Montrer que $\left(f^{-1}\right)' = f^{-1}$.

5) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

6) Vérifier que $f = \ln$.

6.144 Posons, pour tout entier $n \geq 0$:

$$\alpha_n(x) = \int_0^x \sin^n t \, dt$$

et

$$\beta_n(x) = \int_0^x \cos^n t \, dt.$$

1) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\alpha_n(x) = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \alpha_{n-2}(x)$$

et

$$\beta_n(x) = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \beta_{n-2}(x).$$

2) En déduire que pour tout entier $n \geq 0$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^n t \, dt = \frac{3}{(n+2)(n+4)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt.$$

3) Calculer les deux intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t \, dt$$

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^4 t \, dt.$$

4) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\beta_{2n} = \beta_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \alpha_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

et

$$\beta_{2n+1} = \beta_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \alpha_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}.$$

5) ***Formule de Wallis***. En déduire

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} \right)^2 = \pi.$$

6.145 Posons, pour tout entier $n \geq 0$:

$$\gamma_n(x) = \int_0^x e^t \sin^n t \, dt.$$

1) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\gamma_n(x) = \frac{1}{n^2+1} \left(e^x \sin^n x - n \, e^x \sin^{n-1} x \cos x + n(n-1) \, \gamma_{n-2}(x) \right).$$

2) Calculer les deux intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin^2 t \, dt \text{ et } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin^3 t \, dt.$$

6.146 Posons, pour tout entier $n \geq 1$:

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^n}.$$

1) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$2n \, I_{n+1}(x) = \frac{x}{\left(x^2+1\right)^n} + (2n-1) \, I_n(x).$$

2) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}$.

6.147 Soit (I_n) la suite définie par

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,dt\,.$$

Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim_{n\to+\infty} nI_n$.

6.148 Posons, pour tout $x > 1$ et tout $n, m \in \mathbb{Z}$:

$$\mu_{n,m}(x) = \int^x t^m \ln^n t\,dt\,.$$

1) Montrer que $\mu_{n,m}(x) =$

$$\begin{cases} \dfrac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x - \dfrac{n}{m+1}\mu_{n-1,m}(x) \\ \qquad \text{si } m \neq -1 \\ \dfrac{1}{n+1}\ln^{n+1} x + \text{cste} \\ \qquad \text{si } m = -1 \text{ et } n \neq -1 \\ \ln(\ln x) + \text{cste} \\ \qquad \text{si } m = n = -1. \end{cases}$$

2) Calculer $\displaystyle\int_1^2 t^3 \ln^2 t\,dt$.

6.149 Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$.

1) Montrer que

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,dt < \frac{\ln n}{n}\,.$$

2) En déduire que la suite (x_n) définie par

$$x_n = -\frac{\ln^2 n}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k}$$

est convergente.

6.150 Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que pour tout entier $n > 1$:

$$1 + \int_1^n t^p\,dt < \sum_{k=1}^{n} k^p < \int_1^{n+1} t^p\,dt\,.$$

2) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}\,.$$

6.151 Trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissante dont la dérivée s'annule une infinité de fois.

6.152 Soient I un intervalle ouvert et (f_n) une suite d'éléments de $\mathbf{C}^1(I, \mathbb{R})$ qui converge simplement vers la fonction f. De plus, on suppose que la suite (f_n') des fonctions dérivées converge uniformément vers la fonction g. Montrer que $g = f'$.

6.153 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^1$ dont la fonction dérivée f' est impaire. Montrer que f est paire.

6.154 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et paire. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt\,.$$

6.155 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et impaire. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0\,.$$

6.156 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_a^{a+nT} f(t)\,dt = n\int_0^T f(t)\,dt\,.$$

6.157 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$. Montrer que pour tout couple a, b de $\mathbb{R}$:

$$\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt\,.$$

6.158 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

est périodique. Montrer que f est périodique. La réciproque est-elle vraie ?

6.159 Soient $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1) Montrer que

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(a+b-t)\,dt\,.$$

2) En déduire la valeur des deux intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt \text{ et } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\bigl(1+\operatorname{tg} t\bigr)\,dt\,.$$

6.160 1) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\int_0^{\pi} t\, f(\sin t)\,dt = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin t)\,dt.$$

2) Calculer

$$\int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt \text{ et } \int_0^{\pi} \frac{t\sin^4 t}{\sin^4 t+\cos^4 t}\,dt.$$

6.161 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective de classe $\mathbf{C}^1$.

1) Montrer que pour tout couple $a < b$ de $\mathbb{R}$:

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \bigl(bf(b) - af(a)\bigr) - \int_a^b f(t)\,dt\,.$$

2) En déduire que

$$\int_0^1 \sqrt[17]{1-t^9}\,dt = \int_0^1 \sqrt[9]{1-t^{17}}\,dt\,.$$

6.162 Soient $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b g\circ f(x)\,dx\,.$$

6.163 Soient $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et convexe.

1) Montrer que

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}\,(b-a)\,.$$

2) Montrer que si $f \le 0$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \frac{1}{2}\,(b-a)\min_{a\le x\le b} f(x)\,.$$

6.164 Soient $a < b$ deux nombres réels et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathbf{C}^1$. De plus, on suppose que pour tout $x \in [a,b]$: $f'(x) \ge 0$. Montrer qu'il existe au moins un élément c de $[a,b]$ pour lequel on ait

$$\int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt = f(a)\bigl(g(c)-g(a)\bigr) + f(b)\bigl(g(b)-g(c)\bigr)\,.$$

6.165 Soient $a < b$ deux nombres réels, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^1$ telle que pour tout $x \in [a,b]$: $f'(x) \ge 0$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe au moins un élément c de $[a,b]$ pour lequel on ait

$$\int_a^b f(t)h(t)\,dt = f(a)\int_a^c h(t)\,dt + f(b)\int_c^b h(t)\,dt\,.$$

6.166 Soient $a < b$ deux nombres réels et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

1) Etablir l'***inégalité de Cauchy-Schwarz***

$$\left(\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right).$$

2) Montrer que l'on a l'égalité si et seulement si les deux fonctions f et g sont linéairement dépendantes.

6.167 Soit $f : [0,1] \to \,]0,+\infty[$ une fonction continue.

1) Montrer que

$$\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)\left(\int_0^1 \frac{dt}{f(t)}\right) \ge 1\,.$$

2) Pour quelles fonctions f a-t-on l'égalité ?

6.168 Soit $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et croissantes. Montrer que

$$\int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt \geq \left(\int_0^1 f(t)\, dt\right) \left(\int_0^1 g(t)\, dt\right).$$

6.169 ***Lemme de Gronwall.*** Soient $\alpha \geq 0$, $a < b$ et $f, g : [a,b] \to [0, +\infty[$ deux fonctions continues telles que pour tout $x \in [a,b]$:

$$f(x) \leq \alpha + \int_a^x f(t)\, g(t)\, dt .$$

1) Montrer que pour tout $x \in [a,b]$:

$$f(x) \leq \alpha\, e^{\int_a^x g(t)\, dt} .$$

2) En déduire que

$$\left(\forall\, x \in [a,b] : f(x) \leq \int_a^x f(t)\, dt\right) \Rightarrow f = 0 .$$

6.170 Soient I un intervalle ouvert, $a < b$ deux éléments de I et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour toute fonction $h : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$ vérifiant $h(a) = h(b) = 0$:

$$\int_a^b \big(f(t)\, h(t) + g(t)\, h'(t)\big)\, dt = 0 .$$

Montrer que $f = g'$.

6.171 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^{n+1}$. Montrer que pour tout $x \in I$:

$$\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\, dt = f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n} + \frac{1}{n} \int_a^x (x-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\, dt .$$

6.172 Montrer que

$$\frac{1}{4} + \ln 2 \leq \int_0^1 \ln\big(1 + e^t\big)\, dt \leq \ln \sqrt{2(1+e)} .$$

6.173 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^n (1-x)^n}{n!} .$$

1) Montrer que pour tout $x \in\,]0,1[$:

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!} .$$

2) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, les nombres $f^{(k)}(0)$ et $f^{(k)}(1)$ sont des entiers.

3) En déduire que $\boldsymbol{\pi}$ **est irrationnel**.

6.174 Un nombre réel est dit ***transcendant*** s'il n'est pas racine d'un polynôme à coefficients entiers non tous nuls.

1) Soient $k, \ell \in \mathbb{N}^*$ et $P(x)$ un polynôme de degré ℓ. Montrer que

$$\int_0^1 k\, e^{-kt} P(kt)\, dt = -e^{-k} Q(k) + Q(0)$$

où $Q(x) = P(x) + P'(x) + \cdots + P^{(\ell)}(x)$.

2) En déduire que **e est transcendant**.

6.175 Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} x \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x^2 \cos t}\, dt = 0.$$

Etudier la nature des points stationnaires de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

6.176 $$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} .$$

6.177

$$f(x) = \int_1^x \big(1 + \cos^4 t\big)\big(t^2 - t - 2\big)\, dt .$$

6.178 $$f(x) = \int_0^{x^2} \ln\left(\frac{1}{2} + \sqrt{t}\right)\, dt .$$

6.179 Vérifier que la fonction $f :]-1,1[\, \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_{x^4}^{x^2} \sqrt{\cos t \,\mathrm{ch}\, t}\, dt$$

atteint son minimum en 0.

6.180 Vérifier que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^{x^2} \sin^2 t \, dt$$

atteint son minimum en 0.

6.181 Vérifier que la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^{x^2} \ln(\cos t) \, dt$$

atteint son maximum en 0.

6.182 Trouver les extrema de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \left(1 + \cos^2 t\right) dt \, .$$

6.183 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = e^{-x} \int_0^{x^2} e^{-t-t^2} \, dt$$

admet un minimum local en 0.

6.184 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} \ln\left(1 + t^2\right) dt$$

admet un minimum local en 0.

6.185 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^{x^2} e^{1+t} \ln(1 + t) \, dt \, .$$

admet un minimum local en 0.

6.186 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^{x^4} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} t}{1 + \sqrt{t}}} \, dt \, .$$

admet un minimum local en 0.

6.187 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{\operatorname{ch} t - \sin t} \, dt \, .$$

admet un minimum local en 0.

6.188 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 2x^3 \int_0^x t \, e^{xt^2} \, dt \, .$$

admet un point d'inflexion en 0.

6.189 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^x e^{\sin^2 t} \, dt$$

admet un point d'inflexion en 0.

6.190 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^{\sin x^3} \frac{dt}{\sqrt{1 + e^{\sin t}}}$$

admet un point d'inflexion en 0.

6.191 Calculer la longueur de l'arc de la ***chaînette*** d'équation $y = \operatorname{ch} x$ compris entre les points d'abscisse $x = 0$ et $x = 1$.

6.192 Calculer la longueur de l'arc de la ***parabole*** d'équation $y = x^2$ compris entre les points d'abscisse $x = 0$ et $x = 1$.

6.193 Calculer la longueur de l'arc de la courbe d'équation $y = \ln(\cos x)$ compris entre les points d'abscisse $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{\pi}{3}$.

6.194 Calculer la longueur de l'arc de la courbe d'équation

$$y = \int_0^x \sqrt{-1 + e^{2t}} \, dt$$

compris entre les points d'abscisse $x = 0$ et $x = 1$.

6.195 Calculer la longueur de l'arc de la courbe d'équation

$$y = \int_0^x \sqrt{-1 + e^{2t} \operatorname{ch}^2 t} \, dt$$

compris entre les points d'abscisse $x = 0$ et $x = 1$.

6.196 Soit $\alpha > 0$. On désigne par $L(\alpha)$ la longueur de l'arc de la courbe d'équation

$$y = -\alpha + \sqrt{25 + \alpha^2 - x^2}$$

compris entre les points d'abscisse $x = 0$ et $x = 5$.

1) Montrer que la fonction $L :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est strictement décroissante.

2) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} L(\alpha)$.

Calculer l'aire de la surface plane

6.197

$$E = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \frac{2}{x} \leq y \leq -2x^2 + 5x - 1\Big\}.$$

6.198

$$E = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2 \leq y \leq x + 4\big\}.$$

6.199 $E = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x\big\}$.

6.200

$$E = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{3}x^2 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\Big\}.$$

6.201

$$E = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}\Big\}.$$

6.202 $E = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x^2 - x^4\big\}$.

6.203 Calculer l'aire de la surface plane commune à la parabole d'équation $y^2 = 2x$ et au cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

6.204 Soient $0 \leq \alpha \leq 2$ et E_α la surface plane définie par

$$E_\alpha = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \,, x \geq 0 \,, \; ; y \geq \alpha\big\} \cup \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4 \,, \sqrt{4 - \alpha^2} \leq x \leq 2 \,, \ 0 \leq y \leq \alpha\Big\}.$$

1) Calculer l'aire de E_α.

2) Pour quelle valeur de $0 \leq \alpha \leq 2$, cette aire est-elle minimale ?

6.205 Calculer l'aire de la surface enfermée par la courbe donnée par ses équations paramétriques

$$\begin{cases} \varphi(t) = \sqrt{|\sin 2t| + |\cos 2t|}\cos t \\ \psi(t) = \sqrt{|\sin 2t| + |\cos 2t|}\sin t, \end{cases}$$

$t \in [0, 2\pi]$.

6.206 Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, I un intervalle ouvert et $a < b$ deux éléments de I. Trouver parmi toutes les fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$ qui vérifient les conditions initiales $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$, celle qui minimise la valeur de l'intégrale

$$\int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx \,.$$

6.207 Calculer la surface latérale obtenue par la rotation autour de l'axe Oy de l'arc de la courbe d'équation

$$y = \frac{x^3}{3}$$

compris entre les points d'abscisse $x = 0$ et $x = 2$.

6.208 Calculer la surface latérale obtenue par la rotation autour de l'axe Oy de l'arc de la courbe d'équation

$$y = \frac{2(x^2 - 1)}{3}$$

compris entre les points d'abscisse $x = 1$ et $x = 2$.

6.209 Calculer la surface latérale obtenue par la rotation autour de l'axe Oy de l'arc de la courbe d'équation

$$y = \int_1^x \sqrt{-1 + \left(\operatorname{ch} t^2 + \frac{\sin^4 t}{t}\right)^2}\, dt$$

compris entre les points d'abscisse $x = 1$ et $x = 2$.

6.210 Calculer la surface latérale obtenue par la rotation autour de l'axe Ox de l'arc de la courbe d'équation

$$y = x^3 + x$$

compris entre les points d'abscisse $x = 0$ et $x = 1$.

6.211 Soit d_α la partie de la droite d'équation $x = \alpha$ comprise entre les deux paraboles d'équation

$$y = x^2 \text{ et } y = 6x - x^2 .$$

Déterminer α de sorte que la surface obtenue par la rotation de d_α autour de l'axe Ox soit maximale.

6.212 Soit Ω un ***cône circulaire droit*** de révolution.

1) Calculer sa surface latérale.

2) Calculer son volume.

6.213 Soient $0 < r < a$ et Γ le ***tore*** engendré par la rotation du cercle d'équation $x^2 + (y-a)^2 = r^2$ autour l'axe Ox.

1) Calculer sa surface latérale.

2) Calculer son volume.

Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe Ox de

6.214

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : e^x \le y \le e^{\sqrt{x}}\right\}.$$

6.215

$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \frac{\pi}{3},\ 0 \le y \le \operatorname{tg}^2 x\Big\}.$$

6.216

$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \frac{\pi}{3},\ 0 \le y \le \sqrt{1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x}\Big\}.$$

6.217

$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \frac{\pi}{6},\ 0 \le y \le \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x\Big\}.$$

6.218

$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : e \le x \le e^2, 0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{x \ln^3 x}}\Big\}.$$

6.219

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le y \le 3x - x^2\right\}.$$

6.220

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \sqrt{\frac{x(1-x^5)}{1+x^2}}\right\}.$$

6.221 Soient $|\alpha| < 1$ et E_α la surface plane définie par

$$E_\alpha = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ (1-\alpha)\sqrt{x} \le y \le 1 - \alpha x\right\}.$$

1) Calculer le volume engendré par la rotation de E_α autour de l'axe Ox.

2) Pour quelle valeur de $|\alpha| < 1$, ce volume est-il minimal ?

6.222 Soient $0 \le \alpha \le 4$ et E_α la surface plane définie par

$$E_\alpha = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} \le 1,\ y \ge 0,\ |x| \ge \alpha\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} \le 1,\ y \ge \sqrt{4 - \frac{\alpha^2}{4}}\right\}.$$

1) Calculer le volume engendré par la rotation de E_α autour de l'axe Ox.

2) Pour quelle valeur de $0 \le \alpha \le 4$, ce volume est-il minimal ?

6.223 Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^4 + x - 2}{x^3 + 1}.$$

La courbe de f et son asymptote tournent autour de l'axe Ox. Calculer le volume compris entre le cône engendré par la rotation de l'asymptote pour $x \geq 1$ et la surface latérale engendrée par la rotation de la courbe de f.

Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe Oy de

6.224

$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \frac{6}{1+x} \leq y \leq x \leq 5\Big\}.$$

6.225

$$E = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-4)^2 - 1 \leq y \leq 2x - 1\big\}.$$

6.226

$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{3} \leq x \leq 2,\ y^2 \leq x^2 - 3\Big\}.$$

6.227

$$E = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x^2 \big(1 - \sqrt{1-x}\big)\big\}.$$

6.228

$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq \sqrt{1 - x^4}\Big\}.$$

6.229

$$E = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x \leq y \leq \sqrt{x - x^2}\big\}.$$

6.230

$$E = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x\sqrt{1+x^6}\big\}.$$

6.231

$$E = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x(1-x)\big\}.$$

6.232

$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, \frac{1}{65\,x^2} \leq y \leq \frac{1}{x^2\,(1+x^6)}\Big\}.$$

6.233

$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, \frac{-1}{x^2\sqrt{1+x^4}} \leq y \leq \ln(1+x)\Big\}.$$

6.234 Pour la ***spirale d'Archimède*** ses coordonnées polaires sont données en prenant $\rho(t) = at$ avec $t \in \mathbb{R}$ et a une constante positive.

1) Calculer sa longueur quand t varie de 0 à 2π.

2) Calculer son aire quand t varie de 0 à 2π.

6.235 Pour la ***spirale logarithmique*** ses coordonnées polaires sont données en prenant $\rho(t) = a\,e^{\lambda t}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et a, λ deux constantes positives.

1) Calculer sa longueur quand t varie de 0 à 2π.

2) Calculer son aire quand t varie de 0 à 2π.

6.236 On appelle ***lemniscate*** la courbe constituée de l'ensemble des points dont le produit des distances à deux points fixes est constant. Les équations paramétriques (en coordonnées polaires) de la lemniscate sont données par

$$\begin{cases} \varphi(t) = a\sqrt{|\cos 2t|}\cos t \\ \psi(t) = a\sqrt{|\cos 2t|}\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

où a est une constante positive. Calculer son aire.

6.237 On appelle ***cardioïde*** la courbe décrite par un point fixe P situé sur un cercle qui roule sans glisser sur un autre cercle de même rayon r. Les équations paramétriques (en coordonnées polaires) de la cardioïde sont données par

$$\begin{cases} \varphi(t) = 2r\big(1+\cos t\big)\cos t \\ \psi(t) = 2r\big(1+\cos t\big)\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

1) Calculer sa longueur.
2) Calculer son aire.
3) Calculer la surface latérale ainsi que le volume engendré par sa rotation autour de l'axe Ox.

6.238 On appelle ***astroïde*** la courbe décrite par un point fixe P situé sur un cercle de rayon $\frac{r}{4}$ qui roule sans glisser sur un autre cercle de rayon r. Le petit cercle restant constamment à l'intérieur du grand. Les équations paramétriques de l'astroïde sont données par

$$\begin{cases} \varphi(t) = r\cos^3 t \\ \psi(t) = r\sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]\,.$$

1) Calculer sa longueur.
2) Calculer son aire.
3) Calculer la surface latérale ainsi que le volume engendré par la rotation d'un arc d'astroïde autour de l'axe Ox.

6.239 On appelle ***cycloïde*** la courbe décrite par un point fixe P situé sur un cercle de rayron r qui roule sans glisser sur une droite. Les équations paramétriques de la cycloïde sont données par

$$\begin{cases} \varphi(t) = r\big(t-\sin t\big) \\ \psi(t) = r\big(1-\cos t\big), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

1) Calculer la longueur d'un arc de cycloïde.
2) Calculer l'aire d'un arc de cycloïde.
3) Calculer la surface latérale ainsi que le volume engendré par la rotation d'un arc de cycloïde autour de l'axe Ox.
4) Calculer la surface latérale ainsi que le volume engendré par la rotation d'un arc de cycloïde autour de l'axe Oy.

Chapitre 7

Intégrales généralisées

7.1 Sur l'intervalle borné $]a, b]$

Soient $a < b$ deux nombres réels et $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $F :]a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par

$$F(x) = \int_x^b f(t)\, dt\,.$$

Si $\lim\limits_{x \to a+} F(x)$ existe, on dit que l'***intégrale généralisée***

$$\int_{a+}^b f(t)\, dt$$

existe ou ***converge*** et on pose, par définition,

$$\int_{a+}^b f(t)\, dt = \lim_{x \to a+} F(x)\,.$$

Dans le cas contraire, on dit qu'elle ***diverge*** ou encore qu'elle ***n'existe pas***.

Proposition 7.1 *Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que*

$$\lim_{t \to a+} f(t) = \ell \in \mathbb{R}\,.$$

Alors, l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^b f(t)\, dt$$

converge et, de plus, on a

$$\int_{a+}^b f(t)\, dt = \int_a^b \widehat{f}(t)\, dt$$

où $\widehat{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ est le prolongement par continuité de la fonction f au point a. Autrement dit,

$$\widehat{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } x \in]a, b] \\ \ell & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Remarque : Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, on a donc, d'après ce qui précède,

$$\int_{a+}^{b} f(t)\, dt = \int_{a}^{b} f(t)\, dt\,.$$

Proposition 7.2 (Linéarité) *Soient $f, g :]a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que les deux intégrales généralisées*

$$\int_{a+}^{b} f(t)\, dt \text{ et } \int_{a+}^{b} g(t)\, dt$$

convergent. Alors, pour tout couple α et β de $\mathbb{R}$, l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{b} \big(\alpha f + \beta g\big)(t)\, dt$$

converge et, de plus, on a

$$\int_{a+}^{b} \big(\alpha f + \beta g\big)(t)\, dt = \alpha \int_{a+}^{b} f(t)\, dt + \beta \int_{a+}^{b} g(t)\, dt\,.$$

Proposition 7.3 *Soient $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $c \in]a, b[$. Alors,*

$$\int_{a+}^{b} f(t)\, dt \text{ converge} \iff \int_{a+}^{c} f(t)\, dt \text{ converge}.$$

De plus, si on a la convergence

$$\int_{a+}^{b} f(t)\, dt = \int_{a+}^{c} f(t)\, dt + \int_{c}^{b} f(t)\, dt\,.$$

7.1.1 Intégrale généralisée d'une fonction positive ou nulle

Soit $f :]a, b] \to [0, +\infty[$ une fonction continue. Alors, on a l'alternative suivante,

$$\text{ou bien } \int_{a+}^{b} f(t)\, dt \text{ converge} \quad \text{ou bien } \int_{a+}^{b} f(t)\, dt = +\infty\,.$$

Par convention : Dans le premier cas, on utilise la notation suivante,

$$\int_{a+}^{b} f(t)\, dt < +\infty\,.$$

Proposition 7.4 (Critère de comparaison) *Soit $f, g :]a, b] \to [0, +\infty[$ deux fonctions continues telles que pour tout $t \in]a, b] : 0 \le f(t) \le g(t)$. Alors,*

1) $\displaystyle\int_{a+}^{b} g(t)\, dt < +\infty \Rightarrow \int_{a+}^{b} f(t)\, dt < +\infty\,.$

2) $\displaystyle\int_{a+}^{b} f(t)\, dt = +\infty \Rightarrow \int_{a+}^{b} g(t)\, dt = +\infty\,.$

7.1.2 Intégrale généralisée absolument convergente

Définition 7.5 Soit $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si

$$\int_{a+}^{b} \left|f(t)\right| dt < +\infty\,,$$

on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{a+}^{b} f(t)\,dt$ est ***absolument convergente***.

Proposition 7.6 *Soit $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que*

$$\int_{a+}^{b} \left|f(t)\right| dt < +\infty\,.$$

Alors, son intégrale généralisée $\displaystyle\int_{a+}^{b} f(t)\,dt$ converge.

Proposition 7.7 *Soit $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Alors,*

$$\int_{a+}^{b} \left|f(t)\right| dt < +\infty\,.$$

Proposition 7.8 *Soit $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. De plus, on suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lequel on a*

$$\lim_{t \to a+} \big(t-a\big)^{\alpha} f(t) = \ell \in \mathbb{R}^*\,.$$

Alors,

1) Si $\alpha < 1$, $\displaystyle\int_{a+}^{b} \left|f(t)\right| dt < +\infty\,.$

2) Si $\alpha \geq 1$, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{a+}^{b} f(t)\,dt$ diverge.

Remarque : Si $\ell = 0$ et $\alpha < 1$ l'intégrale généralisée est absolument convergente tandis que si $\ell = \infty$ et $\alpha \geq 1$ elle diverge.

7.2 Sur les intervalles bornés $[a,b[$ et $]a,b[$

Soient $a < b$ deux nombres réels et $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $G : [a,b[\to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par

$$G(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt\,.$$

Si $\lim\limits_{x \to b-} G(x)$ existe, on dit que l'***intégrale généralisée***

$$\int_a^{b-} f(t)\,dt$$

existe ou ***converge*** et on pose, par définition,

$$\int_a^{b-} f(t)\,dt = \lim_{x \to b-} G(x)\,.$$

Dans le cas contraire, on dit qu'elle ***diverge*** ou encore qu'elle ***n'existe pas***. Si

$$\int_a^{b-} \bigl|f(t)\bigr|dt < +\infty\,,$$

on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{b-} f(t)\,dt$ est ***absolument convergente***. Tous les résultats obtenus pour l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{b} f(t)\,dt$$

restent valables pour l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} f(t)\,dt\,.$$

Définition 7.9 Soient $a < b$ deux nombres réels, $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et $c \in]a, b[$. Si les deux intégrales généralisées

$$\int_{a+}^{c} f(t)\,dt \text{ et } \int_c^{b-} f(t)\,dt$$

convergent, on dit que l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{b-} f(t)\,dt$$

existe ou ***converge*** et on pose, par définition,

$$\int_{a+}^{b-} f(t)\,dt = \int_{a+}^{c} f(t)\,dt + \int_c^{b-} f(t)\,dt\,.$$

Cette égalité est indépendante du choix de c. Lorsque l'une ou l'autre des intégrales généralisées

$$\int_{a+}^{c} f(t)\,dt \text{ ou } \int_c^{b-} f(t)\,dt$$

diverge, on dit que l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{b-} f(t)\,dt$$

diverge ou qu'elle ***n'existe pas***. Si

$$\int_{a+}^{b-} \big|f(t)\big|\,dt < +\infty\,,$$

on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{a+}^{b-} f(t)\,dt$ est ***absolument convergente***.

7.3 Sur un intervalle fermé non borné

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $F : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ existe, on dit que l'***intégrale généralisée***

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$$

existe ou ***converge*** et on pose, par définition,

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} F(x)\,.$$

Dans le cas contraire, on dit qu'elle ***diverge*** ou encore qu'elle ***n'existe pas***.

Proposition 7.10 (Linéarité) *Soient $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que les deux intégrales généralisées*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \text{ et } \int_a^{+\infty} g(t)\,dt$$

convergent. Alors, pour tout couple α et β de $\mathbb{R}$, l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} \big(\alpha f + \beta g\big)(t)\,dt$$

converge et, de plus, on a

$$\int_a^{+\infty} \big(\alpha f + \beta g\big)(t)\,dt = \alpha \int_a^{+\infty} f(t)\,dt + \beta \int_a^{+\infty} g(t)\,dt\,.$$

Proposition 7.11 *Soient $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et $c > a$. Alors,*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge} \Longleftrightarrow \int_c^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge.}$$

De plus, si on a la convergence,

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^{+\infty} f(t)\,dt\,.$$

Proposition 7.12 (Critère de Abel-Dirichlet) *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que*

1) g est de classe C^1, monotone et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$;

2) la fonction $F : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est bornée.

Alors, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ converge.

7.3.1 Intégrale généralisée d'une fonction positive ou nulle

Soit $f : [a, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction continue. Alors,

$$\text{ou bien } \int_a^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge} \quad \text{ou bien } \int_a^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty\,.$$

Par convention : Dans le premier cas, on utilise la notation suivante,

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt < +\infty\,.$$

Proposition 7.13 (Critère de comparaison) *Soient $f, g : [a, +\infty[\to [0, +\infty[$ deux fonctions continues telles que pour tout $t \in [a, +\infty[$:*

$$0 \le f(t) \le g(t)\,.$$

Alors,

1) $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt < +\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,dt < +\infty$.

2) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(t)\,dt = +\infty$.

7.3.2 Intégrale généralisée absolument convergente

Définition 7.14 $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si

$$\int_a^{+\infty} \big|f(t)\big|\,dt < +\infty\,,$$

on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est ***absolument convergente***.

Proposition 7.15 *Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que*

$$\int_a^{+\infty} \big|f(t)\big|\,dt < +\infty\,.$$

Alors, son intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Proposition 7.16 *Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. De plus, on suppose qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ pour lequel on a*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\beta} f(t) = \ell \in \mathbb{R}^*\,.$$

Alors,

1) Si $\beta > 1$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \big|f(t)\big|\,dt < +\infty$.

2) Si $\beta \leq 1$, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

Remarque : Si $\ell = 0$ et $\beta > 1$ l'intégrale généralisée est absolument convergente tandis que si $\ell = \infty$ et $\beta \leq 1$ elle diverge.

Définition 7.17 De manière similaire, on définie l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt\,.$$

Toutes les définitions et tous les résultats donnés pour l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$$

restent valables pour l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt$.

7.4 Sur un intervalle ouvert non borné

Soient $a \in \mathbb{R}$, $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et $c > a$. Si les deux intégrales généralisées

$$\int_{a+}^{c} f(t)\,dt \text{ et } \int_{c}^{+\infty} f(t)\,dt$$

convergent, on dit que l'***intégrale généralisée***

$$\int_{a+}^{+\infty} f(t)\,dt$$

existe ou ***converge*** et on pose, par définition,

$$\int_{a+}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{a+}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{+\infty} f(t)\,dt\,.$$

Cette égalité est indépendante du choix de c. Lorsque l'une ou l'autre des intégrales généralisées

$$\int_{a+}^{c} f(t)\,dt \text{ ou } \int_{c}^{+\infty} f(t)\,dt$$

diverge, on dit que l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{+\infty} f(t)\,dt$$

diverge ou qu'elle ***n'existe pas***.
Si

$$\int_{a+}^{+\infty} \big|f(t)\big|\,dt < +\infty\,,$$

On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{a+}^{+\infty} f(t)\,dt$ est ***absolument convergente***.

Définition 7.18 De manière similaire, on définit les deux intégrales généralisées suivantes,

$$\int_{-\infty}^{b-} f(t)\,dt \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt\,.$$

Toutes les définitions données pour l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{+\infty} f(t)\,dt$$

restent valables pour ces deux nouvelles intégrales généralisées.

7.5 Exercices

Calculer

7.1 $\displaystyle\int_{0+}^{1} t\ln t\,dt\,.$

7.2 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}\,.$

7.3 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+6t+10}\,.$

7.4 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{3t-1}{t\big(4t^2+1\big)}\,dt\,.$

7.5 $\displaystyle\int_{0}^{1-} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\,.$

7.6 $\displaystyle\int_{1+}^{2} \frac{dt}{\sqrt{t-1}}\,.$

7.7 $\displaystyle\int_{1+}^{2} \frac{t}{\sqrt{t-1}}\,dt\,.$

7.8 $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t-1}}\,.$

7.9 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}\,.$

7.10 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt[3]{\big(1+t^2\big)^2}}\,dt\,.$

7.11 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}\,.$

7.12 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}}\,.$

7.13 $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{dt}{(t+2)\sqrt{3t-t^2}}\,.$

7.14 $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t(1-t)}}\,.$

7.15 $\displaystyle\int_{1+}^{2-} \frac{t}{\sqrt{(t-1)(2-t)}}\,dt\,.$

7.16 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}}\,.$

7.17 $\displaystyle\int_{1}^{e-} \frac{dt}{t\sqrt{1-\ln^2 t}}\,.$

7.18 $\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{1-} \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,dt\,.$

7.19 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,dt\,.$

7.20 $\displaystyle\int_{0+}^{1} \ln t\,dt\,.$

7.21 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,dt\,.$

7.22 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} t^2\,e^{-t}\,dt\,.$

7.23 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^2\,e^{-4t^2}\,dt\,.$

7.24 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch} t}\,.$

7.25 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} t}{1+t^2}\,dt\,.$

7.26 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} t}{t^2}\,dt\,.$

7.27 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}-} \frac{dt}{4+\operatorname{tg}^2 t}\,.$

7.28 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt\,.$

7.29 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1}\,.$

7.30 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t}{t^4+1}\,dt\,.$

7.31 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\,dt\,.$

7.32 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t^3}{t^4+1}\,dt\,.$

7.33 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos^4 t+\sin^4 t}\,.$

7.34 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}-} \frac{dt}{\cos^4 t-\sin^4 t}\,.$

7.35

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\,,\ a,b>0.$$

7.36 $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt.$

7.37 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{\big(1+t^2\big)^n}\,,\ n\geq 2.$

7.38 $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{2t^3+t^2+1}{t^4+1}\,dt}{\displaystyle\int_0^x \frac{3t^3+4t}{t^4+1}\,dt}.$

Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

7.39 $\displaystyle \int_{3+}^{4} \frac{dt}{\sqrt{\ln(t-2)}}\,.$

7.40 $\displaystyle \int_{0+}^{1} \cos\frac{1}{t}\,dt\,.$

7.41 $\displaystyle \int_{0+}^{1-} \frac{\operatorname{th}(t-t^2)}{t\sin(t-1)}\,dt\,.$

7.42 $\displaystyle \int_{0+}^{1-} \frac{\sin t}{t\ln t}\,dt\,.$

7.43 $\displaystyle \int_{0+}^{\frac12} \frac{\sin\sqrt{t}}{t\ln t}\,dt\,.$

7.44 $\displaystyle \int_{0+}^{1-} \frac{\operatorname{sh} t}{t\sqrt{\ln\frac{1}{t}}}\,dt\,.$

7.45 $\displaystyle \int_{0+}^{1} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt\,.$

7.46 $\displaystyle \int_{0+}^{1-} \frac{\ln^2\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}}\,dt\,.$

7.47 $\displaystyle \int_{0+}^{1-} \frac{\ln t}{\sin(\pi\sqrt{t})}\,dt\,.$

7.48 $\displaystyle \int_{0+}^{1-} \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{\operatorname{Argth} t}}\,dt\,.$

7.49 $\displaystyle \int_{0+}^{1} \frac{dt}{e^t-1}\,.$

7.50 $\displaystyle \int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt\,.$

7.51 $\displaystyle \int_{2+}^{3} \frac{\ln(t-1)}{t-2}\,dt\,.$

7.52 $\displaystyle \int_{1+}^{2} \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}\,.$

7.53 $\displaystyle \int_{0+}^{1-} \frac{dt}{\sqrt{t-t^5}}\,.$

7.54 $\displaystyle \int_{0+}^{1-} \frac{\sin t}{\sqrt{t-t^2}}\,dt\,.$

7.55 $\displaystyle \int_{0}^{\frac{\pi}{2}-} \frac{dt}{1-e^{\cos t}}\,.$

7.56 $\displaystyle \int_{1}^{+\infty} \sqrt{\frac{1+t^2}{1+t^4}}\,dt\,.$

7.57 $\displaystyle \int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{\ln(1+t)}\,dt\,.$

7.58 $\displaystyle \int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{\operatorname{sh} t+\sin^2 t}\,dt\,.$

7.59 $\displaystyle \int_{0+}^{1} \frac{\sin t}{t}\,dt\,.$

7.60 $\displaystyle \int_{0+}^{1} \frac{\operatorname{tg} t}{t}\,dt\,.$

7.61 $\displaystyle \int_{0+}^{1} \sin\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt\,.$

7.62 $\displaystyle \int_{0+}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\sin\frac{1}{t}\,dt\,.$

7.63 $\displaystyle \int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt\,.$

7.64 $\displaystyle \int_{1}^{+\infty} \sin\frac{1}{t}\,dt\,.$

7.65 $\displaystyle \int_{1}^{+\infty} t\sin\frac{1}{t}\,dt\,.$

7.66 $\displaystyle \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t}\,\sin\frac{1}{t}\,dt\,.$

7.67 $\displaystyle \int_{0}^{+\infty} \sin e^{-t}\,dt\,.$

7.68 $\displaystyle \int_{1}^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt\,.$

7.69 $\displaystyle \int_{0+}^{+\infty} e^{-t}\ln t^t\,dt\,.$

7.70 $\displaystyle \int_{4}^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^2 t}\,.$

7.71 $\displaystyle \int_{1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt\,.$

7.72 $\displaystyle \int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t\ln t}{e^t+t}\,dt\,.$

7.73 $\displaystyle \int_{1}^{+\infty} \frac{1+\ln t}{(1+\ln^2 t)\sqrt{t^2+1}}\,dt\,.$

7.74 $\displaystyle \int_{1}^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t+\sin t}\,dt\,.$

7.75 $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\,\sin t}{t^2-1}\,dt\,.$

7.76 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{t+\sqrt{t^2+5}}\,.$

7.77 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt\,.$

7.78 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{e^t-1}}\,dt\,.$

7.79 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{\operatorname{sh} t}}\,.$

7.80 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \sin t^2\,dt\,.$

7.81 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin\dfrac{1}{t^2}}{\ln 1+t)}\,dt\,.$

7.82 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin(1-\operatorname{ch} t)}{t\operatorname{sh} t}\,dt\,.$

7.83 $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{t^2+8}{t^4-t^2}\,dt\,.$

7.84 $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t\sqrt{\ln t}}\,dt\,.$

7.85 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{\operatorname{sh} t}}\,dt\,.$

7.86 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{e^t-1}}\,dt\,.$

7.87 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln(\operatorname{ch} t)}{\operatorname{sh} t}\,dt\,.$

7.88 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctg} t^2\right)dt\,.$

7.89 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg}^3 t}{t^3}\,\ln(\operatorname{ch} t)\,dt\,.$

7.90 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg}^3 t}{t\ln(\operatorname{ch} t)}\,dt\,.$

7.91 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\ln(1+t)}}\,dt\,.$

7.92 $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4-1}}\,.$

7.93 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t^2}{\ln(1+t)\operatorname{sh} t}\,dt\,.$

7.94 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} t\cos t^4\,dt\,.$

7.95 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{t\,e^{\sin t}}{\operatorname{Arctg} t+t^2\operatorname{ch}^2 t}\,dt\,.$

7.96 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln^3 t}{\operatorname{ch}^2 t}\,dt\,.$

7.97 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln\big(2+t^2\big)}}{e^t-1}\,\sin t\,dt\,.$

7.98 $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{dt}{\big(\ln t\big)^{\ln t}}\,.$

7.99 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-2t}\operatorname{sh} t}{\ln\big(1+\operatorname{th}\sqrt[3]{t}\big)}\,dt\,.$

7.100 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{t^2\,e^{-t}}{t-e^{\cos t}+e}\,dt\,.$

7.101 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln t}{\ln\big(1+\sqrt{t}\big)}\,e^{-\operatorname{sh} t}\,dt\,.$

7.102 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,e^{-\sqrt{t}}\,dt\,.$

7.103 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln\big(1+\sqrt{t}\big)}{\operatorname{th} t}\,e^{-t}\,dt\,.$

7.104 $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\ln\sqrt{t}}{t^2-1}\,dt\,.$

7.105 $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-t^2}}\,dt\,.$

7.106 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{1+t^2}}\,dt\,.$

7.107 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{1-\cos t^2}{t^4}\,dt\,.$

7.108 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\operatorname{Arctg} t}}\,dt\,.$

7.109 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{\ln(1+t)}\,e^{-\sqrt{t}}\,dt\,.$

7.110 $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\sin t}{\ln(1-t)}\,dt\,.$

7.111 $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\ln t}{\ln(2-t)}\,dt\,.$

7.112 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt\,.$

7.113 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{t\ln t}{1+t^2\sin^4 t}\,dt\,.$

7.114 $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\ln^4 t}{(1-t)^2}\, dt\,.$

7.115 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} \ln(\operatorname{sh} t)\, dt\,.$

7.116 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{th}^2 t}{t^2\sqrt{\ln(1+t)}}\, dt\,.$

7.117 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{t\, e^{-\operatorname{sh} t}}{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}\, \sin\frac{1}{t}\, dt\,.$

7.118 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin t}{\ln(1+t)\operatorname{Arctg}\sqrt{t}}\, dt\,.$

7.119 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t\ln(1+t)}{\operatorname{sh}\sqrt{t}\ \operatorname{Arctg}\sqrt{t^3}}\, dt\,.$

7.120 $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-} \cos t\ln\bigl(\operatorname{tg} t\bigr)\, dt.$

7.121 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t^2}{t\ln\sqrt{1+t}}\, e^{-\operatorname{sh} t}\, dt.$

7.122 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{t(1+t\ln t)}\, dt.$

7.123 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\bigl(1-\cos(\sin t)\bigr)\sin t}{\sqrt{t^3}}\, dt.$

7.124 $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\ln t}{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)}\, dt.$

7.125 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln^2 t^t}{t^t}\, dt\,.$

7.126 $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\ln\left(1-\sqrt{t}\right)}{\ln(1-t)}\, dt.$

7.127 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} t}{\sqrt{\operatorname{sh} t}\ \ln\left(1+\sqrt{t}\right)}\, dt.$

7.128 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} t\ln\sqrt[t]{1+t}}{\operatorname{sh} t}\, dt\,.$

7.129 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{t}\ \ln\bigl(1+\sqrt{t}\,\bigr)\operatorname{sh}\sqrt{t}}\, dt\,.$

Discuter, en fonction du nombre réel $\alpha > 0$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

7.130 $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{dt}{t^\alpha}\,.$

7.131 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}\,.$

7.132 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t}\, dt\,.$

7.133 $\displaystyle\int_{0+}^{1} t^\alpha \ln t\, dt\,.$

7.134 $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{\ln t}{t^\alpha}\, dt\,.$

7.135 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha}\, dt\,.$

7.136 $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{(t-1)^\alpha}}\, e^{-t}\, dt\,.$

7.137 $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\sin t}{t(-\ln t)^\alpha}\, dt\,.$

7.138 $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt\,.$

7.139 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}\ \operatorname{sh}^{2\alpha} t}\, dt\,.$

7.140 $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{t^\alpha}{\sqrt[4]{t^3\,(1-t)}}\, dt\,.$

7.141 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1+t}{\sqrt[3]{1+t^\alpha}}\, dt\,.$

7.142 $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{\sqrt[3]{1-t}}{\sqrt{t}\,(t-\alpha)}\, dt\,.$

7.143 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^{-t} t^\alpha\, dt\,.$

7.144 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\, dt\,.$

7.145 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}-} \frac{dt}{\left(\cos^2 t-\dfrac{1}{2}\right)^\alpha}\,.$

7.146 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^\alpha\left(2+\sin\sqrt{t}\right)}\, dt\,.$

7.147 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t^\alpha\left(\sqrt{t}+\operatorname{ch}^2 t\right)}\, dt\,.$

7.148 $\displaystyle\int_{0+}^{1} \left(\ln\frac{1}{t}\right)^\alpha\, dt\,.$

7.149 $\displaystyle\int_{3}^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)\bigl(\ln(\ln t)\bigr)^\alpha}\,.$

7.150 $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{e^{-\frac{\alpha}{1-t}}}{\sin^\alpha t}\, dt\,.$

7.151 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-\operatorname{sh} t}}{\operatorname{sh}^{\alpha} t}\, dt\,.$

7.152 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{t^{\alpha} \operatorname{ch}^{2\alpha} t}{\operatorname{sh}^{3\alpha} t}\, dt.$

7.153 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t^{\alpha}\, e^{\sin t}}{\sqrt{t} + \operatorname{ch}^2 t}\, dt\,.$

7.154 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}\, e^{-t^2}}{2 + \sin t}\, dt\,.$

7.155 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}}\, dt\,.$

7.156 $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg}(t-1)}{\big(t^2-1\big)^{\alpha}}\, dt\,.$

7.157 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \sin \frac{1}{t^{\alpha}}\, dt\,.$

7.158 $\displaystyle\int_{0+}^{1} \ln\big(\sin t^{\alpha}\big)\, dt\,.$

7.159 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln\big(1 + \operatorname{Arctg} t\big)}{\operatorname{sh}^{\alpha} t}\, dt\,.$

7.160 $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\ln t}{\big(t-1\big)^{\alpha}}\, e^{-t}\, dt\,.$

7.161 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{dt}{\ln^{\alpha}(1+t)}\,.$

7.162 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln\big(1+t^{\alpha}\big)}{1 + t - e^{t}}\, dt\,.$

7.163 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^{\alpha}}\, dt\,.$

Discuter, en fonction deux nombres réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

7.164 $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{dt}{t^{\alpha}\,\big(1-t\big)^{\beta}}\,.$

7.165 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1 + \alpha\, e^{-t}}{1 + \beta\, e^{t}}\, dt\,.$

7.166 $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{t^{\beta-2}}{\ln^{\alpha} t}\, dt\,.$

7.167 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\big(1+t\big)^{\alpha} - t^{\alpha}}{t^{\beta}}\, dt\,.$

7.168 $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{\beta}\big(t-1\big)^{\alpha}}\, dt\,.$

7.169 $\displaystyle\int_{-1+}^{1-} \frac{\big|t\big|^{\alpha} \cos t}{\big(\sqrt{1-t^2}\big)^{\beta}}\, dt\,.$

7.170 $\displaystyle\int_{-1+}^{+\infty} \frac{\big|t\big|^{\alpha}}{\big(1+t\big)^{\beta}}\, dt\,.$

7.171 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{2\alpha}\big(1+t^3\big)^{\beta}}\, dt\,.$

7.172 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} t}{t^{\alpha}\,\big(1+\sqrt{t}\big)^{\beta}}\, dt\,.$

7.173 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{(1+\alpha)t}}{e^{t} + \beta\, e^{-t}}\, dt\,.$

7.174 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t} \cos \beta t\, dt\,.$

7.175 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} t^{\beta} \sin t^{\alpha}\, dt\,.$

7.176 $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{dt}{\sin^{\alpha} t\, \sqrt{\big(1-t^2\big)^{\beta}}}\,.$

7.177 $\displaystyle\int_{2+}^{+\infty} \frac{dt}{\big(t^2-4\big)^{\alpha\beta}}\,.$

7.178 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{\alpha} + \operatorname{th}^{\beta} t}\, dt\,.$

7.179 $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha} \ln^{\beta} t}\,.$

7.180 $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}} t^{\alpha} \ln^{\beta} \frac{1}{t}\, dt\,.$

7.181 $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{t^{\alpha} \ln^{\beta} t}{e^{t}}\, dt\,.$

7.182 $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\ln^{\alpha} t}{e^{\beta t}(t-1)}\, dt\,.$

7.183 $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{\alpha} \ln^{\beta} \frac{1}{t}}.$

Discuter, en fonction de l'entier $n > 0$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

7.184 $\displaystyle\int_{0+}^{1} \left(\frac{\sin t^{n}}{\ln t^{n}}\right)^{n} dt\,.$

7.185 $\displaystyle\int_{1+}^{2-} \frac{2-t}{\big(-t^2+3t-2\big)^{n}}\, dt\,.$

7.186 $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{e^{-\sin t} \ln^{n} t}{\big(t-1\big)^{n}}\, dt\,.$

7.187 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\left(t^n - [t^n]\right)^n}{\ln\left(e^{t^n} - 1\right)}\, dt\,.$

Calculer

7.188 $\displaystyle\lim_{x\to 1+} \int_{1+}^{x-} \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(x-t)}}\,.$

7.189 $\displaystyle\lim_{x\to 0+} e^{\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-} \ln(x \operatorname{tg} t)\, dt}\,.$

7.190 $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{\sin x}}}{1+t^2}\, dt\,.$

7.191 $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^3 \int_{0+}^{1} \frac{t \ln t}{t^2 + x^2}\, dt\,.$

7.192 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_{0}^{x^2} e^{-\frac{t^2}{x^2}}\, dt\,.$

7.193 $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2 t}\, dt\,.$

7.194 $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \int_{0}^{+\infty} e^{-xt} \sin t\, dt\,.$

7.195 $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \int_{0+}^{1-} \frac{t^n}{\sqrt{t(1-t)}}\, dt\,.$

7.196 Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

est convergente. Est-elle absolument convergente ?

7.197 Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_{1}^{+\infty} t^2 \sin t^4\, dt$$

est convergente. Est-elle absolument convergente ?

7.198 ***Paradoxe du peintre.***

1) Calculer l'aire de

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \geq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}.$$

2) Calculer la surface latérale obtenue par la rotation autour de l'axe Ox de la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ avec $x \geq 1$.

3) Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe Ox de la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ avec $x \geq 1$.

7.199 Etudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^4 \int_{0}^{+\infty} e^{-x^4 t}\, dt\,.$$

7.200 Soient $a < b$ deux nombres réels et $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que son intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{b} f(t)\, dt$$

converge.

1) Montrer que la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{a+}^{x} f(t)\, dt & \text{si } x \in]a,b] \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

est continue.

2) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\displaystyle\int_{0+}^{x} \ln(\sin t)\, dt}{x(\ln x - 1)}\,.$

7.201 Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln t}{t^2} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ \ln t & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

1) Montrer que les deux intégrales généralisées

$$\int_{0+}^{1} f(t)\, dt \text{ et } \int_{1}^{+\infty} f(t)\, dt$$

divergent.

2) Calculer

$$\lim_{x\to +\infty} \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)\, dt$$

et

$$\lim_{x\to +\infty} \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} f(t)\, dt\,.$$

7.202 Soient $f, g :]0,1[\to \mathbb{R}$ les deux fonctions continues définies respectivement par

$$f(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}+x}^{\frac{\pi}{2}-x} \operatorname{tg} t \, dt$$

et

$$g(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}+2x}^{\frac{\pi}{2}-x} \operatorname{tg} t \, dt \, .$$

1) Montrer que les deux intégrales généralisées

$$\int_{-\frac{\pi}{2}+}^{0} \operatorname{tg} t \, dt \text{ et } \int_{0}^{\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} t \, dt$$

divergent.

2) Calculer

$$\lim_{x \to 0+} f(x) \text{ et } \lim_{x \to 0+} g(x) \, .$$

7.203 Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_{0}^{+\infty} f(t) \, dt \text{ converge}$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \, .$$

Montrer que $\ell = 0$.

7.204 Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^1$ telle que les deux intégrales généralisées

$$\int_{0}^{+\infty} f(t) \, dt \text{ et } \int_{0}^{+\infty} f'(t) \, dt$$

convergent. Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \, .$$

7.205 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique telle que son intégrale généralisée

$$\int_{0}^{+\infty} f(t) \, dt$$

converge. Montrer que $f = 0$.

7.206 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{s \to 0+} s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{\left(x-t\right)^2 + s^2} \, dt = \pi f(x) \, .$$

7.207 Trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t) \right| dt < +\infty$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f'(t) \right| dt = +\infty \, .$$

7.208 Trouver une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\int_{0}^{+\infty} \left| f(t) \right| dt < +\infty$$

et

$$\int_{0}^{+\infty} f^2(t) \, dt = +\infty \, .$$

7.209 Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \ell \text{ et } \int_{0}^{+\infty} f(t) \, dt \text{ converge.}$$

Montrer que $\ell = 0$.

7.210 Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^1$ telle que

$$\int_{0}^{+\infty} f(t) \, dt \text{ et } \int_{0}^{+\infty} f'(t) \, dt$$

convergent. Montrer que

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0.$$

7.211 Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_{0}^{+\infty} \left| f(t) \right| dt < +\infty \, .$$

Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{0}^{+\infty} f(t) \cos(xt) \, dt = 0$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{0}^{+\infty} f(t) \sin(xt) \, dt = 0 \, .$$

7.212 Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^1$ telle que

$$\int_0^{+\infty} e^{-\beta_0 t} \left| f'(t) \right| dt < +\infty$$

pour un certain $\beta_0 > 0$.

1) Montrer que

$$\sup_{x \geq 0} \left| f(x) \right| e^{-\beta_0 x} \leq \left| f(0) \right| + \int_0^{+\infty} e^{-\beta_0 t} \left| f'(t) \right| dt \,.$$

2) En déduire que pour tout $\beta > \beta_0$:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \left| f(t) \right| dt < +\infty$;

b) $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f(t)\, e^{-\beta t} = 0$;

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} f'(t)\, dt = \beta \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} f(t)\, dt - f(0)$.

7.213 Soit $\alpha > 0$.

1) Montrer que

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln t}{\alpha^2 + t^2}\, dt = \frac{\pi \ln \alpha}{2\alpha} \,.$$

2) En déduire que

$$\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-} \ln(\alpha \operatorname{tg} t)\, dt = \frac{\pi \ln \alpha}{2} \,.$$

7.214 Calculer

$$\lim_{\alpha \to 0+} \alpha \int_{0+}^{1} \frac{t^\alpha}{\ln(1+t)}\, dt \,.$$

7.215 Soit un entier $n > 0$.

1) Vérifier que pour tout $t \in \,]0, \pi]$:

$$\frac{\sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right) t}{2 \sin \dfrac{t}{2}} = \frac{1}{2} + \cos t + \cdots + \cos nt \,.$$

2) En déduire que

$$\int_{0+}^{\pi} \frac{\sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right) t}{2 \sin \dfrac{t}{2}}\, dt = \frac{\pi}{2} \,.$$

7.216 Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \dfrac{1}{2 \sin \dfrac{t}{2}} - \dfrac{1}{t} & \text{si } 0 < t \leq \pi \,. \end{cases}$$

1) Vérifier que f est continue.

2) Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t\, dt = 0 \,.$$

3) Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{0+}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} \,.$$

4) En déduire que

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{2} \,.$$

7.217 Posons, pour tout entier $p \geq 0$:

$$\beta_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p t\, dt$$

et soient $\left(x_n\right)$ et $\left(y_n\right)$ les deux suites définies respectivement par

$$x_n = \sqrt{n}\, \beta_{2n+1} \text{ et } y_n = \sqrt{n}\, \beta_{2n-2} \,.$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier

a) $\forall t \in \,]0, \sqrt{n}]$: $e^{-t^2} > \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n$;

b) $\forall t \in \mathbb{R}^*$: $e^{-t^2} < \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

2) Montrer que pour tout entier $n > 1$:

$$x_n < \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt < \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt < y_n \,.$$

3) En déduire

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$;

b) $$\lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to +\infty} \int_0^{x} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \lim_{x \to +\infty} \lim_{n \to +\infty} \int_0^{x} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

7.218 Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction continue et décroissante telle $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt < +\infty$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,dt \leq \left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\int_0^{+\infty} f(t)\,dt\,.$$

7.219 Soient $a < b$ deux nombres réels et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^1$. Montrer que

$$\lim_{x\to a+} f'(x) \text{ existe } \Rightarrow \lim_{x\to a+} f(x) \text{ existe.}$$

La réciproque est-elle vraie ?

7.220 ***Fonction Gamma.***
Soit $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ la fonction définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\,dt\,.$$

1) Vérifier que cette fonction est bien définie.

2) Montrer que Γ est convexe et continue.

3) Montrer que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,.$$

4) En déduire que pour tout $x \in]0,+\infty[$ et entier $n \geq 0$:
a) $\Gamma(n+1) = n!$;
b) $\Gamma(x+n+1)$
$= x(x+1)\cdots(x+n)\Gamma(x)$.

5) Calculer $\lim_{x\to 0+}\Gamma(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\Gamma(x)$.

6) Montrer que pour tout $x > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\Gamma(x+n)}{n^x\Gamma(n)} = 1\,.$$

7) En déduire que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\,.$$

8) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}\,.$$

9) Montrer que pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\,e^{\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right)\,,$$

où γ est la constante d'Euler (ex. 5.246) .

10) Montrer que $\Gamma \in \mathbf{C}^1$ et que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma'(x) = \int_{0+}^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\ln t\,dt\,.$$

11) En déduire que pour tout $x > 0$:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x}{k(k+x)}\,.$$

En utilisant la fonction gamma Γ, calculer les intégrales suivantes

7.221 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt.$

7.222 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$

7.223 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^3}\,dt\,.$

7.224 $\displaystyle\int_{0+}^{1}\ln\Gamma(t)\,dt.$

7.225 $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n}\,e^{-xt}\,dt,\ x,n > 0.$

7.226 $\displaystyle\int_{0+}^{1-}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{x-1}dt,\ x > 0.$

7.227 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\sqrt{t-1}\,e^{-t}\,dt.$

7.228 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt\,.$

Chapitre 8

Séries

8.1 Séries numériques

Soit $\left(a_n\right)$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Toute expression de la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

est appelée une ***série numérique***.

Définition 8.1 La série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ est dite ***convergente*** si la suite de ses ***sommes partielles***

$$\left(S_p = \sum_{n=0}^{p} a_n\right)$$

converge. La limite de cette suite, lorsqu'elle existe, est appelée la ***somme*** de la série et on pose, par définition,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{p \to +\infty} S_p \,.$$

Lorsque la suite $\left(S_p\right)$ diverge, on dit que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ ***diverge***. Dans le cas particulier où $\lim\limits_{p \to +\infty} S_p = +\infty$ (resp. $-\infty$), on écrit : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Définition 8.2 La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est dite ***absolument convergente*** si la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left|a_n\right|$ est convergente.

Exemple 8.3 La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est appelée la ***série harmonique***. Elle diverge.

Exemple 8.4 La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est appelée la ***série harmonique alternée***. Elle converge vers $-\ln 2$. De l'exemple précédent, on déduit qu'elle n'est pas absolument convergente.

Proposition 8.5 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge* $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Proposition 8.6 $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ *converge* $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge*.

8.1.1 Séries à termes positifs ou nuls

Soit (a_n) une suite d'éléments de $[0, +\infty[$. Alors, on a l'alternative suivante :

$$\text{ou bien } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge} \qquad \text{ou bien } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty\,.$$

Par convention : Dans le premier cas, on utilise la notation suivante

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty.$$

Proposition 8.7 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.*

Exemple 8.8 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

8.1.2 Critères de convergence

Critère du quotient

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels positifs telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R}_+^*\,.$$

Alors, on a l'alternative suivante : ou bien les deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ convergent ou bien elles sont toutes les deux divergentes.

Critère de Cauchy

Soient (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ et $\rho = \lim_{n\to+\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$. Alors, si $\rho < 1$ la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est absolument convergente et diverge si $\rho > 1$.

Rappel : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \Rightarrow \ell = \rho$.

Critère de d'Alembert

Soit $\big(a_n\big)$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^*$ pour laquelle

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho\,.$$

Alors, si $\rho < 1$ la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ est absolument convergente et diverge si $\rho > 1$.

Critère des séries alternées

Soit $\big(a_n\big)$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

1) $\forall\, n \in \mathbb{N} : a_n\, a_{n+1} \leq 0\,;$

2) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \big|a_{n+1}\big| \leq \big|a_n\big|\,;$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0.$

Alors, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge. De plus, pour tout entier $p \geq 0$:

$$\left|\sum_{n=p}^{+\infty} a_n\right| \leq \big|a_p\big|\,.$$

Critère de comparaison

Soient $\big(a_n\big)$ et $\big(b_n\big)$ deux suites d'éléments de $[0,+\infty[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$: $0 \leq a_n \leq b_n$. Alors,

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty\,.$

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty\,.$

Critère de l'intégrale

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $f : [m,+\infty[\, \to [0,+\infty[$ une fonction continue et décroissante. Alors,

$$\int_m^{+\infty} f(t)\,dt < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=m}^{+\infty} f(n) < +\infty\,.$$

De plus, s'il y a convergence, on a pour tout entier $p \geq m$:

$$\int_{p+1}^{+\infty} f(t)\,dt \leq \sum_{n=m}^{+\infty} f(n) - \sum_{n=m}^{p} f(n) \leq \int_p^{+\infty} f(t)\,dt\,.$$

Critère de Raabe-Duhamel

Soit $\left(a_n\right)$ une suite d'éléments de $]0,+\infty[$ pour laquelle

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\rho\,.$$

Alors, si $\rho>1$ la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge et diverge si $\rho<1$.

Critère du logarithme

Soit $\left(a_n\right)$ une suite d'éléments de $]0,+\infty[$ pour laquelle

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)=\rho\,.$$

Alors, si $\rho>1$ la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge et diverge si $\rho<1$.

Critère d'Abel

Soient $\left(a_n\right)$ et $\left(b_n\right)$ deux suites de nombres réels vérifiant les trois propriétés suivantes :

1) $\exists\ \mu\in\mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout couple d'entiers $p>q\geq 0$, $\left|\sum\limits_{n=q}^{p} b_n\right|\leq\mu\,;$

2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left|a_{n+1}-a_n\right|<+\infty\,;$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0.$

Alors, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nb_n$ converge.

Critère de Dirichlet

Soient $\left(a_n\right)$ et $\left(b_n\right)$ deux suites de nombres réels vérifiant les trois propriétés suivantes :

1) $\exists\ \mu\in\mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout entier $p\geq 0$: $\left|\sum\limits_{n=0}^{p} b_n\right|\leq\mu\,;$

2) la suite $\left(a_n\right)$ est monotone ;

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0.$

Alors, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nb_n$ converge.

8.2 Séries entières

Soient $\left(a_n\right)$ une suite de nombres réels et $a \in \mathbb{R}$. Alors, toute série numérique de la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(x-a\right)^n ,$$

où $x \in \mathbb{R}$, est appelée une ***série entière***.

Définition 8.9 Soient $\left(a_n\right)$ une suite de nombres réels, $a \in \mathbb{R}$ et $\rho = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|a_n\right|}$. Alors,

$$\mathcal{R} = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} & \text{si } \rho \in \left]0,+\infty\right[\\ 0 & \text{si } \rho = +\infty \\ +\infty & \text{si } \rho = 0 \end{cases}$$

est appelé le ***rayon de convergence*** de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \left(x-a\right)^n$.

Proposition 8.10 *Soient $\left(a_n\right)$ une suite de nombres réels, $a \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{R}$ le rayon de convergence de la série entière*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(x-a\right)^n .$$

Alors, la série entière est absolument convergente pour $|x-a| < \mathcal{R}$ et diverge pour $|x-a| > \mathcal{R}$.

Proposition 8.11 *Soient $\left(a_n\right)$ une suite de nombres réels, $a \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{R}$ le rayon de convergence de la série entière*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(x-a\right)^n .$$

Alors, pour toute suite $\left(\alpha_n\right)$ vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\alpha_n\right|} = 1$, le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \alpha_n \left(x-a\right)^n$$

vaut lui aussi $\mathcal{R}$.

Proposition 8.12 *Soient $\left(a_n\right)$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{R}$ le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \left(x-a\right)^n$. De plus, on suppose que*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \ell .$$

Alors, $\mathcal{R} = \ell$.

8.2.1 Propriétés

Proposition 8.13 *Soient $\big(a_n\big)$ une suite de nombres réels, $a \in \mathbb{R}$ et on suppose que pour le couple $\alpha < \beta$ de $\mathbb{R}$, les deux séries numériques*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \alpha^n \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \beta^n$$

convergent. Alors, sur $[a+\alpha, a+\beta]$, la suite de fonctions

$$\left(f_p(x) = \sum_{n=0}^{p} a_n \big(x-a\big)^n\right)$$

converge uniformément vers la fonction continue $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \big(x-a\big)^n$.

Proposition 8.14 *Soient $\big(a_n\big)$ une suite de nombres réels , $a \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{R} > 0$ le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \big(x-a\big)^n$. On pose*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \big(x-a\big)^n \text{ avec } |x-a| < \mathcal{R}\,.$$

Alors, le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \big(x-a\big)^{n-1}$$

vaut lui aussi $\mathcal{R}$ et pour tout $|x-a| < \mathcal{R}$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \big(x-a\big)^{n-1}\,.$$

Il en résulte immédiatement que f est de classe $\mathbf{C}^\infty$ et que pour tout entier $n \geq 0$:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,.$$

De plus, pour tout $|x-a| < \mathcal{R}$:

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} \big(x-a\big)^{n+1}\,.$$

Le rayon de convergence de cette dernière série entière vaut lui aussi $\mathcal{R}$.

8.3 Exercices

Calculer

8.1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{5^n}$.

8.2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}$.

8.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

8.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[2n]{e^{-n^2}}$.

8.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n+1}\right)$.

8.6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

8.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+5)}$.

8.8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$.

8.9 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2n-3}$.

8.10 $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n+4}{n\left(n^2-4\right)}$.

8.11 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+2}{n\left(n^2-1\right)}$.

8.12 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^2\left(n-1\right)^2}$.

8.13 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n+3}{n(n-1)(n+2)}$.

8.14 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(2n-1\right)^2}$.

8.15 Montrer, par induction, que pour tout entier $p > 0$:

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{p(p+3)}{4(p+1)(p+2)}.$$

En déduire la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Calculer

8.16 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{e^n}{3^n} + \frac{\ln 2^n}{n^3-n}\right)$.

8.17 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n}$.

8.18 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

8.19 Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\operatorname{Arctg}\frac{1}{n^2+n+1} = \operatorname{Arctg}\frac{1}{n} - \operatorname{Arctg}\frac{1}{n+1}.$$

En déduire la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Arctg}\frac{1}{n^2+n+1}.$$

8.20 Trouver les trois constantes α, β et μ de sorte que pour tout entier $n \geq 3$:

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{\alpha}{(n-1)!} + \frac{\beta}{(n-2)!} + \frac{\mu}{(n-3)!}.$$

En déduire la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}.$$

8.21 Montrer que pour tout entier $p \geq 1$:

$$(e-1)\sum_{n=1}^{p} n\,e^{-n} = \frac{1-e^{-p}}{1-e^{-1}} - p\,e^{-p}.$$

En déduire la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\,e^{-n}.$$

8.22 Pour quelles valeurs des deux nombres réels α et β la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\Big(n(n+1)^{\alpha}(n+2)^{\beta}\Big)$$

converge-t-elle ? Lorsqu'elle converge, calculer sa somme.

8.23 Soit (a_n) la suite de nombres réels définie par

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \text{ et } a_0 = a_1 = 1\,.$$

1) Montrer, par induction, que pour tout entier $n \geq 0$: $a_n \geq n$.

2) En déduire la somme des deux séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}a_{n+1}}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_{n-1}a_{n+1}}\,.$$

8.24 Soit $0 < \alpha < 1$ et posons pour tout entier $p \geq 1$:

$$\lambda_p = 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + \cdots + p\alpha^{p-1}\,.$$

Calculer $(\alpha-1)\lambda_p$. En déduire la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha^{n-1}\,.$$

8.25 Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2}\,.$$

Etudier la convergence des séries suivantes :

8.26 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n+1}\,.$

8.27 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^3+1}{n^3+5}\,.$

8.28 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}\,.$

8.29 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin 5n^2}{n^2+1}\,.$

8.30 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n!}{n^2}\,.$

8.31 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 4n}{n^2}\,.$

8.32 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}\,.$

8.33 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}\,.$

8.34 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^5}}{n^3+1}\,.$

8.35 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}\,.$

8.36 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\,.$

8.37 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n^2+1}}\,.$

8.38 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n\,.$

8.39 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+\ln n}\,.$

8.40 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}\,.$

8.41 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n^n}{(n+2)!}\,.$

8.42 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 4\cdots(3n+1)}{(n+1)!}\,.$

8.43 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^n}{n^2+n+1}\right).$

8.44 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{25}}{\operatorname{sh} n}\,.$

8.45 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}\,.$

8.46 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

8.47 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n!}{n^3}$.

8.48 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$.

8.49 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{5^n}$.

8.50 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sin(2n+1)\frac{\pi}{4}\right)^n$.

8.51 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sin(2n+2)\frac{\pi}{4}\right)^n$.

8.52 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sin n$.

8.53 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{1}{n}$.

8.54 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n\sin\frac{1}{n}$.

8.55 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{Arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

8.56 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n+1}\right)$.

8.57

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1-\sin^2 n+\cos^3 n}{(1+n^2)(1+\sin^2 n)(1+\cos^2 n)}.$$

8.58 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\ln n}$.

8.59 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$.

8.60 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

8.61 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$.

8.62 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$.

8.63 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{e^{-n}}{\ln^2 n}$.

8.64 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^n e^{-n}$.

8.65 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n+e^{-n}}{\ln n}\right)$.

8.66 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln(1+n)}{\sqrt{n^2+n}}$.

8.67 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln(1+n)}{\sqrt{n^3+n}}$.

8.68 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\ln n!}+\frac{e^{\sqrt{n}}}{n!}\right)$.

8.69 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Discuter, en fonction du nombre réel $\alpha > 0$, la convergence des séries suivantes :

8.70 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n\ln^\alpha(\operatorname{ch} n)$.

8.71 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sin\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n+1}\right)^\alpha$.

8.72 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n!}{n^\alpha}$.

8.73 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{n^8}$.

8.74 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha^n n!}{n^n}$.

8.75 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{\alpha^{2n}-1}$, $\alpha\neq 1$.

8.76 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sin^n\frac{\pi\alpha}{2}$.

8.77 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{tg}^n\alpha}{\sqrt{n(n+1)}}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

8.78 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^n \alpha}{n}$.

8.79 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^{-\sqrt{n}}$.

8.80 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \alpha^{-\ln n}$.

8.81 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$.

8.82 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n \ln\left(1 + \frac{\big|[\alpha]\big|}{n}\right)$.

En utilisant le critère de Dirichlet, discuter, en fonction des nombres réels $\alpha > 0$ et β, la convergence des séries suivantes :

8.83 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\beta)}{n^\alpha}$.

8.84 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\beta)}{n^\alpha}$.

8.85 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin^2(n\beta)}{n^\alpha}$.

8.86 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos^2(n\beta)}{n^\alpha}$.

8.87 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n \cos(n\beta)}{n^\alpha}$.

8.88 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(n\beta)}{\ln n^\alpha}$.

8.89

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{\sin(n\beta)}{n}\right).$$

8.90 Discuter, en fonction de l'entier p, la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{3 + 5 + \cdots + (2n+1)}\, n^p .$$

8.91 Discuter, en fonction des deux entiers positifs p et q, la convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + n^p}{1 + n^q} .$$

8.92 Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} = +\infty .$$

8.93 Montrer, par induction, que pour tout entier $n \geq 3$: $n! > 2^{n-1}$. En déduire que pour tout entier $p \geq 3$:

$$0 < e - \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{p-1}} .$$

8.94 Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

à 10^{-4} près.

8.95 Soit $|a| \neq 1$.

1) Vérifier que pour tout entier $n \geq 0$:

$$\frac{a^{2^n}}{1 - a^{2^{n+1}}} = \frac{1}{1 - a^{2^n}} - \frac{1}{1 - a^{2^{n+1}}} .$$

2) En déduire la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2^n}}{1 - a^{2^{n+1}}} .$$

8.96 Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$ telle que $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k < +\infty$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout couple d'entiers $n > m \geq p$:

$$\prod_{k=m}^{n} (1 - a_k) \geq 1 - \sum_{k=m}^{n} a_k \geq \frac{1}{2} .$$

8.97 Soit (a_n) une suite de nombres réels positifs ou nuls telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty .$$

1) Montrer que pour tout entier $p \geq 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^p < +\infty .$$

2) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0\,.$$

3) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\,.$$

4) Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n+1} < +\infty\,.$$

8.98 Soit (a_n) une suite de nombres réels positifs ou nuls telle que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n^2 < +\infty\,.$$

Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty\,.$$

8.99 Soit (a_n) une suite de nombres réels. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n) \text{ converge} \iff (a_n) \text{ converge.}$$

8.100 Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels positifs pour lesquelles il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}\,.$$

Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty\,.$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty\,.$$

8.101 Soit (a_n) une suite décroissante de nombres réels positifs telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty\,.$$

Montrer que

$$\lim_{m\to+\infty} m a_m = 0\,.$$

8.102 Soit (a_n) une suite de nombres réels positifs ou nuls. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{1 + n^2 a_n} < +\infty\,.$$

8.103 Soit (a_n) une suite de nombres réels positifs ou nuls. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{1 + a_n} < +\infty\,.$$

8.104 Soit (a_n) une suite de nombres réels positifs ou nuls telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{a_n} < +\infty\,.$$

Montrer que la suite (α_n) définie par $\alpha_0 = 0$ et

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\alpha_n + \sqrt{\alpha_n^2 + a_n} \right)$$

est convergente.

8.105 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en 0 et non indentiquement nulle.

1) On suppose que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x + y) = f(x)f(y)$. Montrer que f est de classe $\mathbf{C}^\infty$ et que si $|f(1)| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) = \frac{1}{1 - f(1)}\,.$$

2) On suppose à présent que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x - y) = f(x)f(y)$. Montrer que f est constante.

8.106 Soit (a_n) une suite décroissante de nombres réels telle que l'ensemble

$$E = \left\{ n \in \mathbb{N} : a_n \geq \frac{1}{n} \right\}$$

possède une infinité d'éléments. Montrer que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

diverge. Que devient ce résultat si la suite (a_n) n'est pas supposée décroissante ?

8.107 Soient $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection et (a_n) une suite de nombres réels telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty .$$

Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_{\sigma(n)}| < +\infty$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} .$$

Que devient ce résultat si la série n'est pas supposée absolument convergente ?

8.108 Soit (a_n) la suite de nombres réels définie par

$$a_{n+1} = a_n^2 + a_n \text{ et } a_0 = \alpha > 0 .$$

Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 + a_n} .$$

8.109 Calculer

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{[t]} - \frac{1}{t} \right) dt .$$

8.110 Soit $f : \left]0, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{k} - \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) \right) .$$

1) Vérifier que pour tout $x > 0$, la série converge.

2) Montrer que la fonction f est de classe $\mathbf{C}^1$ et que pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{k(k+x)} .$$

Trouver le rayon de convergence des séries entières suivantes :

8.111 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n+1} (x-2)^n .$

8.112 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt{n^n + 1}} (x-1)^n .$

8.113 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} x^n .$

8.114 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n .$

8.115 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\, e^n x^n .$

8.116 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^n x^n .$

8.117 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\operatorname{ch} n} .$

8.118 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n \ln n^2} .$

Trouver le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

8.119 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n .$

8.120 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} .$

8.121 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n .$

8.122 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n .$

8.123 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^{n+1} .$

8.124 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n}\, x^{n+1}.$

8.125 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n}\, x^{n}.$

8.126 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n+1}\, x^{n+1}.$

8.127 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$

8.128 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n}}{n(n+1)}.$

8.129 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n^2-1}.$

8.130 $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n}}{n^2-3n+2}.$

8.131 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^2+3n+2} x^{n+2}.$

8.132 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^2+6n+5}\, x^{n+5}.$

8.133 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 4^n \left(n+\frac{1}{n}\right) x^{n}.$

8.134 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{3^n}\right) x^{n}.$

8.135 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}.$

8.136 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}\, x^{n}.$

8.137 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^n}{n-1}\, x^{2n+1}.$

8.138 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n+n}{2^n}.$

8.139 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2+n}\, x^{n+2}.$

8.140 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(n+1)!}.$

8.141 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n+e^{-n}\right) x^{n+1}.$

8.142 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n2^n}.$

8.143 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9^n}{n}\, x^{2n+1}.$

8.144 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{2^n(n-1)}.$

Calculer

8.145 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}.$

8.146 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{2^n}}.$

8.147 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\,e^n}{8^n}.$

8.148 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(2n-\frac{1}{2}\right) 3^n\, e^{-3n}.$

8.149 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}.$

8.150 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n \ln 2^n}.$

8.151 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+n)4^n}.$

8.152 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si } x>0 \text{ et } x\neq 1 \\ 1 & \text{si } x=1 \end{cases}$$

est de classe $\mathbf{C}^\infty$.

8.153 ***Lemme de Abel***
Supposons que pour $\beta > 0$, la série numérique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \beta^n$$

converge. Montrer, sans utiliser la notion de rayon de convergence, que la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

converge absolument pour tout $|x| < \beta$.

8.154 Supposons que la série numérique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge.}$$

1) Montrer que sur $[0, 1]$, la suite de fonctions

$$\left(f_p(x) = \sum_{n=0}^{p} a_n x^n \right)$$

converge uniformément vers la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n .$$

2) En déduire que la fonction f est continue sur $[0, 1]$.

3) Montrer que si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $f(\frac{1}{k}) = 0$, tous les a_n sont nuls.

8.155 Soit $0 < \mathcal{R} < +\infty$ le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n .$$

On suppose que

$$\ell = \lim_{x \to \mathcal{R}-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n .$$

Peut-on en conclure que

$$\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathcal{R}^n \ ?$$

8.156 Soient (a_n) une suite de nombres réels, $a \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{R} > 0$ le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - a)^n .$$

1) Vérifier que $\mathcal{R}$ est aussi le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n (x - a)^{n-1} .$$

2) Soit $f : E = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \mathcal{R}\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - a)^n .$$

Montrer que pour tout $|x - a| < \mathcal{R}$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n (x - a)^{n-1} .$$

8.157 Soit $\sigma > 0$ et supposons que pour tout $|x| < \sigma$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 .$$

Montrer que tous les coefficients a_n sont nuls.

8.158 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^\infty$ telle que

$$M = \sup_{n \geq 0} M_n < +\infty$$

où $M_n = \sup \left\{ \left| f^{(n)}(t) \right| : t \in \mathbb{R} \right\}$.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n .$$

2) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$$

et

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} .$$

3) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathbf{C}^\infty$.

4) Trouver les constantes a_n et b_n de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin 2x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

et

$$\cos^3 x = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \,.$$

8.159 Montrer que pour tout $x \in \left]-1,1\right[$:

$$\operatorname{Arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1} \,.$$

En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \,.$$

8.160 Montrer que pour tout $x \in \left]-1,1\right[$:

$$-\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\, x^n \,.$$

En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2 \,.$$

8.161 Vérifier que pour tout $x \in \left]0,1\right[$:

$$\int_{0+}^{x} \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \,.$$

En déduire que

$$\int_{0+}^{1-} \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt = -\frac{\pi^2}{6}$$

et

$$\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt = \frac{1}{2}\left(\ln^2 2 - \frac{\pi^2}{6}\right) .$$

8.162 ***Fonction zéta***

Soit $\zeta : \left]1,+\infty\right[\to \left]0,+\infty\right[$ la fonction définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \,.$$

1) Vérifier que cette fonction est bien définie.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to 1+} \zeta(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \zeta(x)$.

3) Montrer que pour tout $x \in \left]1,+\infty\right[$:

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x} \,.$$

En déduire que la fonction ζ est strictement décroissante.

4) ***Identité d'Euler***

Soit (p_n) la suite strictement croissante de tous les nombres premiers. Montrer que pour tout $x > 1$:

$$\zeta(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(1-p_k^{-x})} \,.$$

5) Montrer que pour tout $x \in \left]1,+\infty\right[$:

$$\lim_{p\to+\infty} \int_{0+}^{+\infty} e^{-pt}\, \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}\, dt = 0 \,.$$

6) En déduire que pour tout $x > 1$:

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t-1}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{0+}^{+\infty} e^{-nt} t^{x-1}\, dt.$$

7) Montrer que pour tout $x > 1$:

$$\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_{0+}^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t-1}\, dt.$$

Chapitre 9

Equations différentielles

9.1 Equations linéaires du premier ordre

9.1.1 Introduction

Soit I un intervalle ouvert. On appelle ***équation différentielle linéaire du premier ordre*** une équation de la forme

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x) \tag{9.1}$$

où $p, f : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues. Sa ***solution générale*** est donnée par la fonction $y : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = c\, e^{-\int_{x_0}^x p(t)\, dt} + e^{-\int_{x_0}^x p(t)\, dt} \int_{x_0}^x f(t)\, e^{\int_{x_0}^t p(s)\, ds}\, dt$$

où $x_0 \in I$ et c est une constante.

9.1.2 Remarques

1) Si $f = 0$, on dit que l'équation (9.1) est ***homogène***.

2) Si la fonction $y_0 : I \to \mathbb{R}$ est une ***solution particulière*** de (9.1), la solution générale de (9.1) peut alors s'écrire

$$y(x) = c\, e^{-\int_{x_0}^x p(t)\, dt} + y_0(x)\,.$$

3) (***Principe de superposition des solutions***) Si $f_1, \ldots, f_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ sont $2n$ fonctions vérifiant pour tout entier $1 \leq j \leq n$ et tout $x \in I$:

$$y_j'(x) + p(x)y_j(x) = f_j(x)\,,$$

la fonction $y_0 : I \to \mathbb{R}$ définie par $y_0 = y_1 + \cdots + y_n$ est une solution particulière de (9.1) pour la fonction $f = f_1 + \cdots + f_n$.

9.2 Equations différentielles du second ordre

9.2.1 Introduction

Soit I un intervalle ouvert. On appelle ***équation différentielle linéaire du second ordre*** une équation de la forme

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \tag{9.2}$$

où p, q, $f : I \to \mathbb{R}$ sont trois fonctions continues. Par définition,

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \tag{9.3}$$

est appelée l'équation ***homogène*** associée à l'équation (9.2).

Définition 9.1 Une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^2$ est dite ***solution*** de l'équation (9.2) si elle la vérifie.

Définition 9.2 Une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^2$ est dite ***solution*** de l'équation homogène (9.3) si elle la vérifie.

Proposition 9.3 *Soient $p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $x_0 \in I$. Alors, pour tout couple α et β de $\mathbb{R}$, il existe une et une seule solution de l'équation homogène (9.3) qui satisfait simultanément les deux conditions initiales $y\big(x_0\big) = \alpha$ et $y'\big(x_0\big) = \beta$.*

Définition 9.4 Les deux fonctions $u, v : I \to \mathbb{R}$ sont dites ***linéairement indépendantes*** si

$$\big(\lambda u(x) + \mu v(x) = 0\,,\ \forall\, x \in I\big) \Rightarrow \lambda = \mu = 0\,.$$

Définition 9.5 Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathbf{C}^1$. Alors, la fonction $\omega\,[u, v] : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\omega\,[u, v]\,(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x)$$

est appelée le ***wronskien*** des deux fonctions u et v.

Proposition 9.6 *Soient I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation homogène (9.3). Alors,*

1) $\forall\, x \in I : \omega\,[y_1, y_2]\,(x) = \omega\,[y_1, y_2]\,\big(x_0\big)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}$.

2) De l'égalité précédente, il découle immédiatement l'alternative suivante : ou bien le wronskien des deux fonctions $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ est toujours nul sur I ou bien il ne s'annule jamais sur I.

3) Les deux fonctions y_1, $y_2 : I \to \mathbb{R}$ sont linéairement indépendantes si et seulement si $\omega\,[y_1, y_2]\,\big(x_0\big) \neq 0$.

9.2.2 Solutions

Proposition 9.7 *L'équation homogène (9.3) admet deux solutions* y_1, y_2 : $I \to \mathbb{R}$ *linéairement indépendantes. De plus, toute solution* $y : I \to \mathbb{R}$ *de (9.3) est de la forme*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\,, \quad x \in I$$

où c_1 *et* c_2 *sont deux constantes.*

Proposition 9.8 *Soient* $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ *deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène (9.3) et* $y_0 : I \to \mathbb{R}$ *une solution particulière de l'équation (9.2). Alors, toute solution* $y : I \to \mathbb{R}$ *de l'équation (9.2) est de la forme*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_0(x)\,, \quad x \in I$$

où c_1 *et* c_2 *sont deux constantes.*

Proposition 9.9 *Soient* $y_1 : I \to \mathbb{R}^*$ *une solution de l'équation homogène (9.3) et* $x_0 \in I$*. Alors, la fonction* $y_2 : I \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$y_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-\int_{x_0}^{t} p(s)\,ds}}{y_1^2(t)}\,dt$$

est aussi une solution de l'équation homogène (9.3) et, de plus, les deux fonctions y_1, $y_2 : I \to \mathbb{R}$ *sont linéairement indépendantes.*

Remarque : Ici, pour trouver la fonction y_2, on utilise la méthode dite de la ***variation de la constante***, à savoir : on pose $y_2(x) = c(x)y_1(x)$ et on remplace y par y_2 dans l'équation homogène (9.3).

Proposition 9.10 *Soient* y_1, $y_2 : I \to \mathbb{R}$ *deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène (9.3) et* $x_0 \in I$*. Alors, la fonction* $y_0 : I \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$y_0(x) = -y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{f(t)y_2(t)}{\omega\big[y_1, y_2\big](t)}\,dt + y_2(x) \int_{x_0}^{x} \frac{f(t)y_1(t)}{\omega\big[y_1, y_2\big](t)}\,dt$$

est une solution particulière de l'équation (9.2).

Remarque : Ici, pour trouver la fonction y_0, on utilise la méthode dite de la ***variation des constantes***, à savoir : on pose $y_0(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ et on remplace y par y_0 dans l'équation (9.2).

Proposition 9.11 (Principe de superposition des solutions) *Si* $f_1, \ldots,$ f_n *et* $y_{0,1}, \ldots, y_{0,n}$ *sont* $2n$ *fonctions vérifiant pour tout entier* $1 \leq j \leq n$ *et tout* $x \in I$ *:*

$$y''_{0,j}(x) + p(x)y'_{0,j}(x) + q(x)y_{0,j}(x) = f_j(x)\,,$$

la fonction $y_0 : I \to \mathbb{R}$ *définie par* $y_0 = y_{0,1} + \cdots + y_{0,n}$ *est une solution particulière de l'équation (9.2) pour la fonction* $f = f_1 + \cdots + f_n$.

9.2.3 Equations différentielles à coefficients constants

Soient a, b deux constantes. Alors, pour l'équation différentielle à coefficients constants

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)\,,$$

on a, si

1) $a^2 - 4b > 0$:

$$y_1(x) = e^{\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}x}\,, \quad y_2(x) = e^{\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}x}$$

et

$$y_0(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{e^{\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}(x-t)} - e^{\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}(x-t)}}{\sqrt{a^2-4b}}\, f(t)\, dt\,.$$

2) $a^2 - 4b = 0$:

$$y_1(x) = e^{-\frac{a}{2}x}\,, \quad y_2(x) = x\, e^{-\frac{a}{2}x}$$

et

$$y_0(x) = \int_{x_0}^{x} (x-t)\, e^{-\frac{a}{2}(x-t)}\, f(t)\, dt\,.$$

3) $a^2 - 4b < 0$:

$$y_1(x) = e^{-\frac{a}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}\, x\right), \quad y_2(x) = e^{-\frac{a}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}\, x\right)$$

et

$$y_0(x) = \frac{2}{\sqrt{4b-a^2}} \int_{x_0}^{x} e^{-\frac{a}{2}(x-t)} \sin\left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}\,(x-t)\right) f(t)\, dt\,.$$

9.3 Equation de Bernoulli

9.3.1 Introduction

Soient I un intervalle ouvert et $m \neq 0$ ou 1. On appelle ***équation de Bernoulli*** une équation différentielle de la forme

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x)y^m(x) \tag{9.4}$$

où $p, f : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues.

9.3.2 Solution

Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}^*$. Alors,

$$y(x) = y_0\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt} \left(1 + (1-m) y_0^{m-1} \int_{x_0}^{x} f(t) \left(e^{-\int_{x_0}^{t} p(s)\,ds}\right)^{m-1} dt\right)^{\frac{1}{1-m}}$$

est, sur le plus grand intervalle ouvert contenant x_0, contenu dans I et pour lequel

$$1 + (1-m) y_0^{m-1} \int_{x_0}^{x} f(t) \left(e^{-\int_{x_0}^{t} p(s)\,ds}\right)^{m-1} dt > 0\,,$$

l'unique solution de l'équation de Bernoulli (9.4) qui satisfait la condition initiale $y\big(x_0\big) = y_0$.

De plus, si $m > 1$, l'intervalle ouvert défini ci-dessus correspond au domaine de définition maximal de la solution.

9.4 Equation de Ricatti

9.4.1 Introduction

Soient I un intervalle ouvert et r, s, $f : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions continues. On appelle ***équation de Ricatti*** une équation différentielle de la forme

$$y'(x) = r(x)\, y^2(x) + s(x)\, y(x) + f(x)\,. \tag{9.5}$$

9.4.2 Solution

Soit $\overline{y} : I \to \mathbb{R}$ une solution particulière de l'équation de Ricatti (9.5). Alors, en faisant le changement de variable

$$z(x) = y(x) - \overline{y}(x)\,,$$

l'équation de Ricatti (9.5) se transforme en l'équation de Bernoulli

$$z'(x) - \left(2r(x)\overline{y}(x) + s(x)\right) z(x) = r(x)\, z^2(x).$$

9.5 Equations à variables séparées

9.5.1 Introduction

On appelle ***équation à variables séparées*** une équation différentielle de la forme

$$f\big(y(x)\big)\, y'(x) = g(x) \tag{9.6}$$

où $f : I_1 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle ouvert I_1 et $g : I_2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle ouvert I_2.

9.5.2 Solution

Proposition 9.12 *On va supposer que la fonction f ne s'annule pas sur l'intervalle ouvert I_1 et soient $x_0 \in I_2$ et $y_0 \in I_1$. Alors, en posant*

$$F(y) = \int_{y_0}^{y} f(t)\,dt \text{ avec } y \in I_1\,, \quad G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \text{ avec } x \in I_2\,,$$

et

$$a = \inf \{s \in I_2 : x \in \left]s, x_0\right] \Rightarrow G(x) \in \operatorname{Im} F\}$$
$$b = \sup \{s \in I_2 : x \in \left[x_0, s\right[\Rightarrow G(x) \in \operatorname{Im} F\}\,,$$

on obtient que la fonction $y : \left]a, b\right[\to I_1$ définie par

$$y(x) = F^{-1}\big(G(x)\big)$$

*est l'**unique solution** de l'équation à variables séparées (9.6) qui satisfait la condition initiale $y\big(x_0\big) = y_0$.*

Remarque : $\left]a, b\right[$ est le plus grand intervalle ouvert contenant x_0, contenu dans I_2 et pour lequel $\big\{G(x) : a < x < b\big\} \subset \operatorname{Im} F$.

9.6 Equations homogènes

9.6.1 Introduction

Soit I un intervalle ouvert et $h : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue n'admettant aucun point fixe. Une équation différentielle de la forme

$$y'(x) = h\left(\frac{y(x)}{x}\right)$$

s'appelle une ***équation homogène***. En faisant le changement de variable

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}\,,$$

elle se transforme en l'équation à variables séparées

$$\frac{z'(x)}{h\big(z(x)\big) - z(x)} = \frac{1}{x}\,.$$

9.6.2 Cas particulier

Soient a_1, a_2, b_1, b_2, c_1,, c_2 six constantes vérifiant les deux conditions suivantes :

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0 \text{ et } c_1^2 + c_2^2 \neq 0\,.$$

Alors, l'équation différentielle

$$y'(x) = \frac{a_1 x + b_1 y(x) + c_1}{a_2 x + b_2 y(x) + c_2} \tag{9.7}$$

n'est pas homogène. Par contre, en faisant le changement de variables

$$x = t + \alpha \text{ et } z(t) = y(t+\alpha) - \beta$$

où

$$\alpha = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \text{ et } \beta = \frac{-a_1 c_2 + a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$

l'équation différentielle (9.7) se transforme en l'équation homogène

$$z'(t) = \frac{a_1 t + b_1 z(t)}{a_2 t + b_2 z(t)}.$$

9.7 Exercices

9.1 Pour $x \in \mathbb{R}$, résoudre

$$y'(x) + y(x) = e^{2x} + e^x + 3\sin x.$$

9.2 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, résoudre

$$xy'(x) - (1+x)y(x) + e^x\left(1+x^2\right) = 0.$$

9.3 Pour $x \in \mathbb{R}$, résoudre

$$y'(x) + y(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

9.4 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, résoudre

$$xy'(x) - 2y(x) = x^5.$$

9.5 Pour $x \in \left]3, +\infty\right[$, résoudre

$$(x-3)y'(x) - 3y(x) = x + 5.$$

9.6 Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, résoudre

$$y'(x) + 2\operatorname{tg} x\, y(x) = \sin x.$$

9.7 Pour $x \in \mathbb{R}$, résoudre

$$y'(x) + \operatorname{th} x\, y(x) = \operatorname{sh} x.$$

9.8 Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, résoudre

$$y'(x) + \operatorname{tg} x\, y(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

9.9 Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, résoudre

$$(\cos x)^2 y'(x) + y(x) = \operatorname{tg} x.$$

9.10 Pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, résoudre

$$(x\cos x)y'(x) + (\cos x + x\sin x)y(x) = 1.$$

9.11 Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, résoudre

$$y'(x) + 2\operatorname{tg} x\, y(x) = 4\operatorname{tg}^3(x).$$

9.12 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, résoudre

$$y'(x) - \left(1 + \frac{2}{x}\right) y(x) = \frac{e^x}{1+x^2}.$$

9.13 Pour $x \in \left]-1, 1\right[$, résoudre

$$\left(1-x^2\right)y'(x) - 2xy(x) = x^2.$$

9.14 Pour $x \in \mathbb{R}$, résoudre

$$\left(1+x^2\right)y'(x) - 2x\, y(x) = 1.$$

9.15 Pour $x \in \left]1, +\infty\right[$, résoudre

$$y'(x) - \frac{1}{x}\, y(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x-1}}.$$

9.16 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, résoudre

$$y'(x) + \frac{1}{x}\, y(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}.$$

9.17 Pour $x \in]0,1[$, résoudre

$$y'(x) - \frac{1}{x}\,y(x) = 1 + \sqrt{1-x^2}\,.$$

9.18 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, résoudre

$$y'(x) + \frac{6}{x}\,y(x) = \frac{1}{x+x^2}\,.$$

9.19 Pour $x \in]1,+\infty[$, résoudre

$$y'(x) - \frac{1}{x}\,y(x) = \frac{1}{\ln^2 x}\,.$$

9.20 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, résoudre

$$y'(x) + \frac{1}{x}\,y(x) = \operatorname{Arctg}(1+x^2)\,.$$

9.21 Pour $x \in]1,+\infty[$, résoudre

$$y'(x) + \frac{1}{x\ln x}\,y(x) = 1 + \frac{1}{\ln x}\,.$$

9.22 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, résoudre

$$xy'(x) - y(x) = x\,.$$

9.23 Pour $x \in]0,1[$, résoudre

$$x(1-x)\,y'(x) + y(x) = x\,.$$

9.24 Pour $x \in \mathbb{R}$, résoudre

$$y'(x) + y(x) = x^3\,.$$

9.25 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, résoudre

$$xy'(x) - y(x) = x\ln x\,.$$

9.26 Pour $x \in \left]e^{-1},+\infty\right[$, résoudre

$$(1+\ln x)y'(x) + \frac{1}{x}\,y(x) = 2 + \ln x\,.$$

9.27 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, résoudre

$$xy'(x) - (x+1)y(x) = x^2\sqrt{1+e^x}\,.$$

9.28 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, résoudre

$$y'(x) - \frac{2}{x}\,y(x) = \operatorname{Arctg} x + \ln x\,.$$

9.29 Résoudre pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$y'(x) - \frac{1}{2x}\,y(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+\sqrt{x}+1}}\,.$$

9.30 Pour $x \in]-1,+\infty[$, résoudre

$$y(x) + y'(x) = x\big(2y(x) - y'(x)\big)\,.$$

9.31 Résoudre pour $y(1) = 1$,

$$y(x)\,y'(x) + \frac{1}{x}\,y^2(x) = \frac{1}{2x}\,.$$

9.32 Résoudre pour $y(1) = 3$,

$$xy(x)\,y'(x) = y^2(x) - x^2\,.$$

9.33 Résoudre pour $y(1) = 1$,

$$2y(x)\,y'(x) - \frac{1}{x}\,y^2(x) = \ln x\,.$$

9.34 Résoudre pour $y(1) = -1$,

$$xy(x)y'(x) + y^2(x) = \frac{\ln x}{x^2}\,.$$

9.35 Résoudre pour $y(0) = 1$,

$$2y(x)\,y'(x) = y^2(x) + 2\operatorname{sh} x\,.$$

9.36 Résoudre pour $y(1) = 2$,

$$2xy(x)\,y'(x) - 3y^2(x) + x^2 = 0\,.$$

9.37 Soit $\alpha > 0$.
Résoudre pour $y(1) = 1$,

$$xy(x)\,y'(x) = x^2 + (1+\alpha)y^2(x)\,.$$

9.38 Résoudre pour $y(0) = 2$,

$$1 + y^2(x) - \left(x^2 - 1\right)y(x)\,y'(x) = 0\,.$$

9.39 Résoudre pour $y(1) = 1$,

$$y^2(x)y'(x) - \frac{1}{x}\,y^3(x) = x\,.$$

9.40 Résoudre pour $y(1) = 1$,

$$y^2(x)\,y'(x) + \frac{1}{x}\,y^3(x) = \frac{1}{x^2}\,.$$

9.41 Résoudre pour $y(1) = 1$,

$$xy^3(x)\,y'(x) - y^4(x) = x^4\ln x\,.$$

9.42 Résoudre pour $y(0) = 1$,

$$y(x)\,y'(x) + x\left(1 - 2\sqrt{x^2+y^2(x)}\right) = 0\,.$$

9.43 Résoudre pour $y(1) = 1$,

$$y'(x)\sqrt{x} - y(x) + \left(x - 2\sqrt{x}\right)\sqrt{y(x)} = 0\,.$$

9.44 Résoudre pour $y(1)=1$,

$$y'(x)=\frac{4y(x)}{x}+x\sqrt{y(x)}\,.$$

9.45 Résoudre pour $y(0)=\frac{-1}{12}$ et $y'(0)=0$,

$$\big(y'(x)\big)^2=y'(x)+x\,.$$

9.46 Résoudre pour $y(1)=1$ et $y'(1)=0$,

$$x^2y''(x)-xy'(x)=x^3\,e^x\,.$$

9.47 Résoudre pour $y(1)=1$ et $y'(1)=1$,

$$xy''(x)-y'(x)=\ln x\,.$$

9.48 Résoudre pour $y(1)=1$ et $y'(1)=0$,

$$\big(x^2+1\big)y''(x)-2xy'(x)=\big(x^2+1\big)^2\,.$$

9.49 Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, résoudre

$$xy''(x)-y'(x)=2x^3\operatorname{Arctg}x\,.$$

9.50 Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, résoudre

$$xy''(x)-y'(x)=1+\frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,.$$

Résoudre

9.51 $y''(x)-4y(x)=4\,e^{-2x}\,.$

9.52 $y''(x)+y(x)=\sin x\,.$

9.53 $y''(x)-2y'(x)+y(x)=x^2-\sin x\,.$

9.54 $y''(x)-6y'(x)+5y(x)=e^{5x}+\cos x\,.$

9.55

$$y''(x)-8y'(x)+16\,y(x)=e^{4x}+\cos x\,.$$

9.56

$$y''(x)+2y'(x)+4y(x)=x\,e^x+\cos x\,.$$

9.57

$$y''(x)+2y'(x)+5y(x)=2\operatorname{ch}x+4\operatorname{sh}x\,.$$

9.58 $y''(x)-2y'(x)+y(x)=x\,e^x\,.$

9.59

$$\begin{aligned}&y''(x)-4y'(x)+3y(x)\\&\quad=x^2\,e^x+\sin x+x\,e^{2x}\cos x\,.\end{aligned}$$

9.60

$$\begin{aligned}&y''(x)-4y'(x)+5y(x)\\&\quad=x^2+x^3+e^{2x}\sin x\,.\end{aligned}$$

9.61 Pour $x\in\,]0,\pi[$, résoudre

$$y''(x)+y(x)=-\frac{1}{\sin x}\,.$$

9.62 Pour $x\in\,\big]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big[$, résoudre

$$y''(x)+4y(x)=\frac{1}{\cos x}\,.$$

9.63 Pour $x\in\,\big]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big[$, résoudre

$$y''(x)-2y'(x)+2y(x)=\frac{e^x}{\cos^2 x}\,.$$

9.64 Résoudre

$$y''(x)-2y'(x)+y(x)=e^x+\sin^2 x\,.$$

9.65 Résoudre

$$\begin{aligned}&y''(x)-5y'(x)+6y(x)\\&\quad=\big(2+17\,x+x^2\big)\,e^{4x}\,.\end{aligned}$$

9.66 Soit $\omega>0$. Résoudre

$$y''(x)+\omega^2y'(x)=0\,.$$

9.67 Soit $\omega>0$. Résoudre

$$y''(x)+\omega^2y(x)=\cos\omega x\,.$$

9.68 Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Résoudre

$$\begin{aligned}&y''(x)+\alpha y'(x)+(\alpha-1)y(x)\\&\quad=\sin(\alpha-2)x\,.\end{aligned}$$

Résoudre

9.69 $y''(x)+9y(x)=\cos 3x+\sin 3x\,.$

9.70 $y''(x)+y'(x)=3\cos x\,.$

9.71 $x^2y''(x)+xy'(x)=\ln x\,.$

9.72 Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, résoudre

$$y''(x)-\frac{1}{x}\,y'(x)=\frac{x}{1+x^2}\,.$$

9.73 Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, résoudre

$$x^2y''(x)+xy'(x)-y(x)=4\,.$$

9.74 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, résoudre

$$x(1+x)y''(x) - xy'(x) + y(x) = 2\,.$$

9.75 Résoudre

$$y''(x) + \frac{1}{x}\,y'(x) - \frac{1}{x^2}\,y(x) = \ln x\,.$$

9.76 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, résoudre

$$x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^2 \ln x\,.$$

9.77 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre

$$y''(x) + 2\alpha y'(x) + y(x) = e^x + e^{-2x}\,.$$

9.78 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre

$$\begin{aligned} y''(x) + 2(1+\alpha)y'(x) + y(x) \\ = x + x^2 + x^3\,. \end{aligned}$$

9.79 Soient $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$. Résoudre

$$y''(x) + \alpha^2 y(x) = 3\sin\omega x\,.$$

9.80 Soient α, $\omega \in \mathbb{R}$. Résoudre

$$y''(x) + 2y'(x) + \alpha y(x) = \cos\omega x\,.$$

9.81 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, résoudre

$$xy''(x) - y'(x) + (1-x)y(x) = 0\,.$$

9.82 Résoudre

$$\begin{aligned} \big(1+x^2\big)y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) \\ = 6\big(1+x^2\big)^2\,. \end{aligned}$$

9.83 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, résoudre

$$\begin{aligned} xy''(x) - (1+x)y'(x) + y(x) \\ = \left(\frac{3-x}{x^2}\right)e^x\,. \end{aligned}$$

9.84 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, résoudre

$$x^2y''(x) - 3xy'(x) - 5y(x) = \frac{1}{x^2}\,.$$

9.85 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, résoudre

$$x^2y''(x) + 4xy'(x) + \big(2-x^2\big)y(x) = x+1\,.$$

9.86 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, résoudre

$$x^2y''(x) + xy'(x) - y(x) = 1 + x^2\,.$$

Résoudre

9.87 $x^2y''(x) - 6y(x) = x^3 \ln x\,.$

9.88 $\big(1+x^2\big)y''(x) - xy'(x) = 1 + x^2\,.$

9.89

$$x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^2 \ln^2 x\,.$$

9.90 $y''(x) + \dfrac{1}{x}y'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}\,.$

9.91 Pour $x \in \,]1, +\infty[$, résoudre

$$\begin{aligned} (1-x)y''(x) + xy'(x) - y(x) \\ = x^2 - 2x + 2\,. \end{aligned}$$

9.92 Résoudre

$$x^2y''(x) - xy'(x) - 3y(x) = \ln x\,.$$

9.93 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, résoudre

$$x^2y''(x) - 4xy'(x) + 6y(x) = \big(x-1\big)^3$$

sachant que l'équation homogène associée possède deux solutions qui sont de la forme $y(x) = x^k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

9.94 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, résoudre

$$x^2y''(x) + xy'(x) - 4y(x) = \frac{x^2+1}{x}$$

sachant que l'équation homogène associée possède deux solutions qui sont de la forme $y(x) = x^k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

9.95 Résoudre

$$\begin{aligned} \big(1+x^2\big)y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) \\ = 1 + x + x^2 \end{aligned}$$

sachant que $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est une solution de l'équation homogène associée.

9.96 Soient I un intervalle ouvert contenant 0 et $p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que l'équation différentielle

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

n'admet pas simultanément x et x^2 pour solution.

9.97 Soit $\omega > 0$. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ de sorte que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ définie par $g(x) = e^{\omega x} f(x)$ soit solution de l'équation différentielle

$$y''(x) + \omega y'(x) - \frac{y(x)}{f(x)} = 0\,.$$

9.98 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}\,.$$

1) Vérifier que f est solution de l'équation différentielle

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = e^x\,.$$

2) En déduire la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}\,.$$

9.99 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la ***fonction de Bessel*** d'ordre n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!\,2^{2k}}\, x^{n+2k}$$

est solution de l'***équation de Bessel***

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - n^2) y(x) = 0\,.$$

9.100 Un corps de masse m tombe verticalement d'une certaine altitude. Sa vitesse initiale est nulle. De plus, on suppose que la résistance de l'air est proportionnelle au carré de sa vitesse.

1) Etablir l'équation du mouvement et la résoudre.

2) Déterminer la vitesse limite que peut atteindre ce corps.

9.101 Trouver la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$ qui ne s'annule pas sauf pour $x = 1$ et qui vérifie

$$\int_1^x f(t)\,dt = \frac{f^2(x)}{x}\,.$$

9.102 Soient $\alpha, \beta > 0$. Résoudre pour $f(0) = 1$ et $g(0) = 0$,

$$\begin{cases} f'(x) + f(x) = \alpha g(x) \\ g'(x) + g(x) = \beta f(x). \end{cases}$$

9.103 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^2$ qui satisfont pour tout couple x, y de $\mathbb{R}$, l'égalité

$$f(x+y) f(x-y) = f^2(x) + f^2(y) - 1\,.$$

Pour les équations de Bernoulli ci-après, trouver la solution qui satisfait la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

9.104 $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et

$$y'(x) = x y^4(x)\,.$$

9.105 $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et

$$y'(x) + y(x) = y^3(x)\,.$$

9.106 $x_0 = 0$, $y_0 = -\frac{1}{2}$ et

$$y(x) y'(x) - y^2(x) = x^2 y^3(x)\,.$$

9.107 $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ et

$$y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = -y^2(x) \ln x\,.$$

9.108 $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ et

$$2x y'(x) + y(x) + 3x^2 y^2(x) = 0\,.$$

9.109 $\alpha > 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{\alpha}{2}$ et

$$y'(x) - 2\alpha y(x) = -2y^2(x)\,.$$

9.110 $\alpha, \beta > 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{\alpha}{2\beta}$ et

$$y'(x) = \alpha y(x) - \beta y^2(x)\,.$$

9.111 $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ et

$$y'(x) - \frac{3}{x} y(x) + \frac{1}{1+x^2} y^2(x) = 0\,.$$

9.112 $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ et

$$y'(x) - \frac{2}{x} y(x) = \frac{\sin x}{x^2} y^2(x)\,.$$

9.113 $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ et

$$y'(x) - \frac{1}{2x} y(x) = y^3(x)\,.$$

9.114 $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{1}{\sqrt{e-1}}$ et

$$y'(x) - y(x) \cos x = y^3(x) \cos x\,.$$

9.115 $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = \frac{1}{\sqrt{e-1}}$ et
$$y'(x) + y(x)\sin x = -y^3(x)\sin x\,.$$

9.116 $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et
$$y'(x) + xy(x) = xy^4(x)\,.$$

9.117 $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ et
$$y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = \frac{\ln x}{x^2}y^2(x)\,.$$

9.118 $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et
$$y'(x) - y(x) = \frac{\cos 2x}{e^{2x}}y^3(x)\,.$$

9.119 $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ et
$$y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = x^4y^4(x)\,.$$

9.120 $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ et
$$xy^3(x)y'(x) - y^4(x) = y^{12}(x)\,.$$

9.121 $x_0 = 1$, $y_0 = \sqrt{2}$ et
$$y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = \sqrt{1+x^3}\,y^3(x)\,.$$

9.122 $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ et
$$\big(1+x^2\big)y'(x) = 2xy(x)\big(y^4(x) - 1\big)\,.$$

9.123 $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ et
$$y'(x) - \frac{1}{1+x}\,y(x) = \frac{1}{1+x^2}\,y^2(x)\,.$$

9.124 $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ et
$$y'(x) - 4y(x) = -2y^3(x)\,.$$

9.125 $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{1}{27}$ et
$$y'(x) - \frac{1}{x}\,y(x) = -\sqrt[3]{x^2y(x)}\,.$$

9.126 $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ et
$$y'(x) - \frac{1}{x}\,y(x) = -\sqrt[3]{y^2(x)}\,.$$

9.127 Soit $y : I_1 \to \mathbb{R}$ une solution l'équation de de Bernoulli qui satisfait la condition initiale $y(x_0) = 0$. Montrer que, si $m > 1$, la fonction y est identiquement nulle.

Pour les équations de Ricatti ci-après, trouver la solution qui satisfait la condution initiale $y\big(x_0\big) = y_0$.

9.128 $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ et
$$y'(x) = y^2(x) + \frac{1}{x}y(x) - \frac{3}{x^2}\,.$$

9.129 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ et
$$y'(x) = y^2(x) - 2\,e^{-x}y(x) + e^{-2x} - e^{-x}\,.$$

9.130 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ et
$$y'(x) = y^2(x) - 2\,e^{x}y(x) + e^{2x} + e^{x}\,.$$

9.131 $x_0 = 0$, $y_0 = 3$ et
$$y'(x) = y^2(x) - y(x) - 2\,.$$

9.132 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ et
$$y'(x) = x^2y^2(x) + x^2\,.$$

9.133 $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et
$$x^2\big(y'(x) + y^2(x)\big) = 2\,.$$

9.134 $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ et
$$xy'(x) - y(x) + y^2(x) = y(x) - 1\,.$$

Pour les équations à variables séparées ci-après, trouver la solution qui satisfait la condition initiale $y\big(x_0\big) = y_0$.

9.135 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ et
$$y'(x)\cos y(x) = x\,.$$

9.136 $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{\pi}{2}$ et
$$y'(x) = \sin y(x)\,.$$

9.137 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ et
$$y'(x) = \frac{x}{1+y(x)}\,.$$

9.138 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ et
$$y'(x) = \frac{x}{1-y(x)}\,.$$

9.139 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ et
$$y'(x) + xy^2(x) = -x\,.$$

9.140 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ et
$$y'(x) + x^2y^2(x) = -x^2\,.$$

9.141 $x_0 = 0,\ y_0 = 1$ et
$$y'(x) = 3x^2\big(y(x) + y^2(x)\big)\,.$$

9.142 $x_0 = 0,\ y_0 = 0$ et
$$\big(1 + x^2\big)y'(x) = x\,e^{y(x)}\,.$$

9.143 $x_0 = 0,\ y_0 = \sqrt{e-1}$ et
$$y(x)\,y'(x) + xy^2(x) + x = 0\,.$$

9.144 $x_0 = \frac{4}{\pi},\ y_0 = -1$ et
$$x^2y'(x) - y^2(x) = 1\,.$$

9.145 $x_0 = 0,\ y_0 = 2$ et
$$y^2(x)y'(x) = x^2\,.$$

9.146 $x_0 = 0,\ y_0 = 1$ et
$$y'(x) = y(x) - 2y^2(x)\,.$$

9.147 $x_0 = 0,\ y_0 = 1$ et
$$y'(x) = xy^3(x)\,.$$

9.148 $x_0 = 1,\ y_0 = 1$ et
$$xy'(x) = \big(1 + y^2(x)\big)\ln x\,.$$

9.149 $x_0 = 1,\ y_0 = \sqrt{3}$ et
$$y(x)y'(x) + 2x\sqrt{4 - y^2(x)} = 0\,.$$

9.150 $x_0 = 0,\ y_0 = 0$ et
$$y'(x) = \big(x^3 - x\big)\,e^{-y(x)}\,.$$

9.151 $x_0 = 0,\ y_0 = \frac{\pi}{4}$ et
$$y'(x)\operatorname{tg} y(x) + e^x\cos^2 y(x) = 0\,.$$

9.152 $x_0 = 0,\ y_0 = \frac{\pi}{4}$ et
$$y'(x)\operatorname{tg} y(x) + x^3\cos^2 y(x) = 0\,.$$

9.153 $x_0 = 0,\ y_0 = 0$ et
$$y'(x) = x + xy^2(x)\,.$$

9.154 $x_0 = 4,\ y_0 = 2$ et
$$\big(x-3\big)^2y'(x) = x\sqrt{y(x) - 1}\,.$$

9.155 $x_0 = 0,\ y_0 = 2$ et
$$y'(x) = y(x) - \frac{1}{y(x)}\,.$$

9.156 $x_0 = 0,\ y_0 = \frac{1}{2}$ et
$$\frac{y'(x)}{\sqrt{1 - y^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,.$$

9.157 $x_0 = 1,\ y_0 = \sqrt{e-1}$ et
$$xy(x)y'(x) = 1 + x^2 + y^2(x) + x^2y^2(x)\,.$$

9.158 $x_0 = 0,\ y_0 = 1$ et
$$y(x)\,y'(x) - (x + \sin x)\,e^{-y^2(x)} = 0\,.$$

9.159 $x_0 = 0,\ y_0 = 1$ et
$$y'(x) = \frac{\sin x\cos x}{y(x)\sqrt{1 + \sin^2 x}}\,.$$

9.160 $x_0 = 1,\ y_0 = 1$ et
$$xy^6(x) - x^2y^2(x)\,y'(x) = 0\,.$$

9.161 $x_0 = 0,\ y_0 = 0$ et
$$x\big(1 + 2y(x) + y^2(x)\big) - \big(1 + x^2\big)\big(1 + y(x)\big)\,y'(x) = 0\,.$$

9.162 $x_0 = 1,\ y_0 = 2$ et
$$y'(x) - \frac{1}{x}\,y(x) = \frac{y(x)}{\ln y(x) - \ln x}\,.$$

9.163 $x_0 = 1,\ y_0 = \sqrt{2}$ et
$$x^4 + y^4(x) - 2x^3y(x)\,y'(x) = 0\,.$$

9.164 $x_0 = \pi,\ y_0 = \pi$ et
$$y'(x) + \sin\left(\frac{x + y(x)}{2}\right) = \sin\left(\frac{x - y(x)}{2}\right).$$

9.165 $x_0 = 0,\ y_0 = 0$ et
$$y'(x) = \cos\left(\frac{y(x)}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{y(x)}{3} - x\right).$$

9.166 $x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ y'(0) = 1$ et
$$2y'(x)\,y''(x) = \big(y'(x)\big)^2\Big(1 + \big(y'(x)\big)^2\Big)\,.$$

9.167 $x_0 = 0,\ y_0 = -\sqrt{e^4 - 1}$ et
$$y(x)\,y'(x) - \big(x^2 + e^x\big)\big(1 + y^2(x)\big) = 0\,.$$

9.168 $x = 1$, $y_0 = \sqrt{2}$ et
$$2xy(x)y'(x) = 1 - y^4(x)\,.$$

9.169 $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et
$$y(x)\,y'(x) = -x + \sqrt{x^2 + y^2(x)}\,.$$

9.170 $y'(0) = y(0) = 0$ et
$$y''(x) = 1 + \big(y'(x)\big)^2\,.$$

9.171 $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et
$$y'(x) = \sqrt{y(x) + \sin x} - \cos x\,.$$

9.172 $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{1}{2}$ et
$$(1 + x)y'(x) = y(x)\big(1 - y(x)\big)\,.$$

9.173 $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et
$$x^2\big(1 - 3y(x)\big) - y'(x) = 0\,.$$

9.174 Trouver la fonction $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$ qui vérifie
$$y(x) = \frac{\pi}{2} + \int_1^x \frac{\sin y(t)}{t}\,dt\,.$$

Pour les équations homogènes ci-après, trouver la solution qui satisfait la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

9.175 $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et
$$y'(x) = 2 + \frac{y(x)}{x}\,.$$

9.176 $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et
$$xy'(x) = x\,e^{-\frac{y(x)}{x}} + y(x)\,.$$

9.177 $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et
$$x^2y'(x) = x^2 + xy(x) - y^2(x)\,.$$

9.178 $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{\pi}{4}$ et
$$xy'(x) = y(x) + x\cos^2\left(\frac{y(x)}{x}\right)\,.$$

9.179 $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{\pi}{2}$ et
$$xy'(x) = y(x) - 2x^3\sin\left(\frac{y(x)}{x}\right)\,.$$

9.180 $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{\pi}{6}$ et
$$xy'(x) = y(x) + x\,\mathrm{tg}\left(\frac{y(x)}{x}\right)\,.$$

9.181 $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{\pi}{6}$ et
$$xy'(x) = y(x) - x^2\,\mathrm{tg}\left(\frac{y(x)}{x}\right)\,.$$

9.182 $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ et
$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} - 2\sqrt{\frac{y(x)}{x}}\,.$$

9.183 $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et
$$xy'(x) = y(x) + \sqrt{x^2 + y^2(x)}\,.$$

9.184 $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{1}{2}$ et
$$y(x) + \big(x - y(x)\big)y'(x) = 0\,.$$

9.185 $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et
$$x^2y'(x) = x^2 + xy(x) - y^2(x)\,.$$

9.186 $y(1) = 0$ $y'(1) = \frac{1}{2}$ et
$$x^3y''(x) - x^2y'(x) = -2x^3\big(y'(x)\big)^2\,.$$

9.187 $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ et
$$xy'(x) = y(x)\left(1 + \ln\left(\frac{y(x)}{x}\right)\right)\,.$$

9.188 $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et
$$x^2 + y^2 + x^2y' = 0\,.$$

9.189 $x_0 = 2$, $y_0 = -3$ et
$$y'(x) = -\frac{2x + y(x) + 1}{x + y(x) + 2}\,.$$

9.190 Soient I un intervalle ouvert, $p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et y_1, $y_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle
$$y''(x) + p(x)\,y'x + q(x)\,y(x) = 0\,.$$

1) Montrer que pour tout $x \in I$:
$$y_1^2(x) + y_2^2(x) \neq 0\,.$$

2) Montrer que s'il existe deux éléments $a < b$ de I pour lesquels $y_1(a) = y_1(b) = 0$, il existe au moins un élément c de $]a, b[$ pour lequel $y_2(c) = 0$.

3) En déduire que les zéros de la fonction y_1 sont isolés.

9.191 Soit $q : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue telle que
$$\int_1^{+\infty} q(t)\,dt = +\infty\,.$$
Montrer que toute solution de l'équation différentielle
$$y''(x) + q(x)\,y(x) = 0$$
s'annule une infinité de fois.

Solutions des exercices du chapitre 1

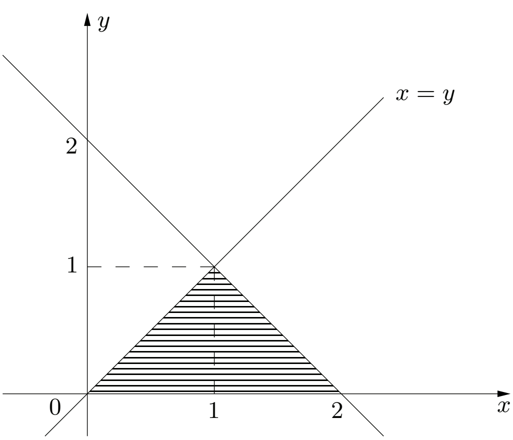
Nombres réels

1.1 $\left(x^2-9\right)\left(x^4-8x\right)=x(x-2)(x-3)(x+3)\left(x^2+2x+4\right)=0$
$\Leftrightarrow x\in\{-3,0,2,3\}\,.$

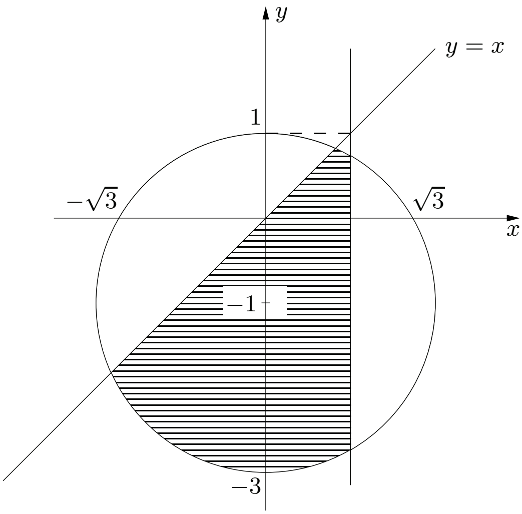
1.2 $\sqrt{\left(x+3\right)^2-2x-5}-x^2=|x+2|-x^2=0\Leftrightarrow x\in\{-1,2\}\,.$

1.3 $\dfrac{x}{x-2}\geq\dfrac{x-1}{x+1}-1=\dfrac{-2}{x+1}\Leftrightarrow\dfrac{(x-1)(x+4)}{(x-2)(x+1)}\geq 0$
$\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-4\right]\cup\left]-1,1\right]\cup\left]2,+\infty\right[\,.$

1.4



1.5



1.6 D'une part, en prenant $x = 10$, on obtient

$$1 = (10+b)(10+c) \text{ et } (10+b), (10+c) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow b = c = -9 \text{ ou } b = c = -11\,.$$

D'autre part, $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$(x-a)(x-10)+1 = (x+b)(x+c) \Leftrightarrow -a-10 = b+c \text{ et } 10\,a+1 = bc\,.$$

En conclusion, les trois entiers cherchés sont

$$a = 8\,,\ b = c = -9 \text{ ou } a = 12\,,\ b = c = -11\,.$$

1.7 Prendre $x = 1$, $y = a \neq 1$ et remplacer n par $n+1$.

1.8 D'après l'exercice précédent (somme d'une progression géométrique) :

$$\frac{2\,000^{2\,000}-1}{1\,999} = \sum_{k=0}^{1\,999} 2\,000^k\,.$$

1.9
$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{100} n\cdot 2^n = \sum_{n=1}^{100}\big((n-1)+1\big)\cdot 2^n = \sum_{n=1}^{100}(n-1)\cdot 2^n + \sum_{n=1}^{100} 2^n \\ &= 2\sum_{n=1}^{99} n\cdot 2^n + \sum_{n=1}^{100} 2^n = 2S - 200\cdot 2^{100} + 2\cdot\frac{1-2^{100}}{1-2} \\ &= 2S - 198\cdot 2^{100} - 2\,. \end{aligned}$$

D'où

$$S = 2(99\cdot 2^{100}+1)\,.$$

$\boxed{\textbf{1.10}}$ 1) Soit P_n avec $n \geq 1$, la relation définie par

$$\left(x+y\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\,.$$

Rappels : $0! = 1$ et $\forall\, n \geq k \geq 1$: $\dbinom{n+1}{k} = \dbinom{n}{k-1} + \dbinom{n}{k}$.

P_1 est vraie. A vérifier, pour tout entier $n \geq 1$: $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. En effet,

$$\begin{aligned}
\left(x+y\right)^{n+1} &= \left(x+y\right)^n (x+y) = (x+y)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{(n+1)-(k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{(n+1)-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{(n+1)-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{(n+1)-k} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) x^k y^{(n+1)-k} + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{(n+1)-k} + y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{(n+1)-k}\,.
\end{aligned}$$

On a ainsi démontré, par récurrence, que la relation P_n est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

2) Pour la première égalité prendre $x = y = 1$ et pour la seconde $y = 1 - x$.

3) Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un entier $n > 1$ et trois entiers naturels a, b et c vérifiant $0 < a \leq b < n$ et $a^n + b^n = c^n$. Alors,

$$\begin{aligned}
c > b \Rightarrow c \geq b+1 \Rightarrow c^n \geq \left(b+1\right)^n > b^n + nb^{n-1} \\
\Rightarrow c^n = a^n + b^n \leq b^n + b^n < b^n + nb^{n-1} < c^n\,.
\end{aligned}$$

D'où contradiction.

$\boxed{\textbf{1.11}}$ En effet, la formule du binôme de Newton nous permet d'écrire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(1+x\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \geq 1 + nx\,.$$

$\boxed{\mathbf{1.12}}$ Soit P_n avec $n \geq 1$, la relation définie par

$$n^5 - n \text{ divisible par } 5\,.$$

P_1 est vraie. A vérifier, pour tout entier $n \geq 1$: $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. En effet,

$$\begin{aligned}(n+1)^5 - (n+1) &= n^5 + 5n^4 + 10\,n^3 + 10\,n^2 + 5n + 1 - n - 1 \\ &= 5\big(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n\big) + \big(n^5 - n\big)\,.\end{aligned}$$

On a ainsi démontré, par récurrence, que la relation P_n est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

$\boxed{\mathbf{1.13}}$ 1) Pour tout entier $n \geq 1 : 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = (1+\cdots+n)+(n+\cdots+1) = n(n+1)\,.$

2) Soit P_n avec $n \geq 1$, la relation définie par $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3\,.$

P_1 est vraie. A vérifier pour tout entier $n \geq 1$: $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. En effet,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + 2(n+1)\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + 2(n+1)\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3\,.\end{aligned}$$

On a ainsi démontré, par récurrence, que la relation P_n est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

$\boxed{\mathbf{1.14}}$ Soit $p \in \mathbb{N}^*$. D'une part, en utilisant la formule du binôme de Newton, on peut écrire pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(k+1)^p = \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} k^{p-m} = k^p + \sum_{m=1}^{p} \binom{p}{m} k^{p-m}\,;$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^p &= \sum_{k=0}^{n} k^p + \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{m=1}^{p}\binom{p}{m}k^{p-m}\right) = S_p + \sum_{m=1}^{p}\left(\binom{p}{m}\sum_{k=0}^{n} k^{p-m}\right) \\ &= S_p + \sum_{m=1}^{p}\binom{p}{m} S_{p-m}\,.\end{aligned}$$

D'autre part, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^p = \sum_{k=1}^{n} k^p + (n+1)^p = S_p + (n+1)^p\,.$

Par conséquent $\displaystyle(n+1)^p = \sum_{m=1}^{p}\binom{p}{m} S_{p-m}\,.$

2) $(n+1)^3 = \displaystyle\sum_{m=1}^{3} \binom{3}{m} S_{3-m} = 3S_2 + 3S_1 + S_0$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{1}{3}\left((n+3)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1)\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

3) Ici $n = 100$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{100}(2k+1)(3k+1) = 6S_2 + 5S_1 + S_0 = 2\,055\,451\,.$

1.15 1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{24} \frac{1}{2k(2k+2)} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{24}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{25}\right) = \frac{6}{25}$

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{24} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{24}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{51}\right) = \frac{25}{51}\,.$

1.16 Pour tout $x \neq 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ (voir exercice 3.53) :

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx &= \sum_{k=1}^{n}\left(2\sin\frac{x}{2}\cos kx\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x\\
&= \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}\,.
\end{aligned}$$

1.17 Pour tout $x \neq 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ (voir exercice 3.53) :

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin kx &= \sum_{k=1}^{n}\left(2\sin\frac{x}{2}\,\sin kx\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x + \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\\
&= -\sum_{k=1}^{n}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x + \sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\\
&= -\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \cos\frac{x}{2} = 2\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}\,.
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{1.18}}$ Faisons l'hypothèse que $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \neq 0$ (dans le cas contraire le résultat est évident). Alors,

$$\forall\,\lambda \in \mathbb{R}:\ 0 \leq \sum_{k=1}^{n}\big(\lambda x_k + y_k\big)^2 = \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \sum_{k=1}^{n} y_k^2$$
$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \leq 0\,.$$

D'où, en prenant tous les $y_k = 1$, on a

$$n \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \geq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 .$$

$\boxed{\mathbf{1.19}}$ En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire

$$1 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{\lambda_k}\, x_k\right) \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k}$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \geq \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\lambda_k}}\,.$$

Ainsi, puisqu'il y a égalité pour $x_k = \dfrac{1}{\lambda_k \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{\lambda_p}}$, le minimum vaut $\dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k}}$.

$\boxed{\mathbf{1.20}}$ Soit P_n avec $n \geq 1$, la relation définie par

$$\left(x_1, \ldots, x_n > 0 \text{ et } 1 = \prod_{k=1}^{n} x_k\right) \Rightarrow n \leq \sum_{k=1}^{n} x_k\,.$$

P_1 est vraie. A vérifier, pour tout entier $n \geq 1$: $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. En effet, soit $0 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n+1}$ avec

$$1 = \prod_{k=1}^{n+1} x_k\,.$$

Alors, $x_1 \leq 1$ et $x_{n+1} \geq 1$. D'où

$$1 = x_1 \cdots x_{n+1} = x_2 \cdots x_n \big(x_1 x_{n+1}\big)$$
$$\Rightarrow n \leq x_2 + \cdots + x_n + x_1 x_{n+1} \Rightarrow x_1 + \cdots + x_{n+1} \geq n + x_1 + x_{n+1} - x_1 x_{n+1}$$
$$= n + x_{n+1}\big(1 - x_1\big) + \big(x_1 - 1\big) + 1 = n + 1 + \big(1 - x_1\big)\big(x_{n+1} - 1\big) \geq n + 1\,.$$

On a ainsi démontré, par récurrence, que la relation P_n est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

1.21 En posant $x_k = \dfrac{a_k}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}$ et en utilisant le résultat de l'exercice précédent, on a

$$n \leq \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}} \Rightarrow \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

D'autre part, en posant $y_k = \frac{1}{a_k}$ et en utilisant le résultat précédent :

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}} = \sqrt[n]{y_1 \cdots y_n} \leq \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} = \frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}.$$

1.22 *Rappel* : $\forall\, a, b \in \mathbb{R} : 2ab \leq a^2 + b^2$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^2 &= \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 2x_1x_2 + \cdots + 2x_{n-1}x_n}{n^2} \\ &\leq \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2 + \left(x_1^2 + x_2^2\right) + \cdots + \left(x_{n-1}^2 + x_n^2\right)}{n^2} \\ &= \frac{n\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)}{n^2} = \frac{\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)}{n}.\end{aligned}$$

1.23 $0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow a^2 - ab + b^2 \geq ab$

$\Rightarrow a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) \geq ab(a+b)$

$\Rightarrow (a+b)^3 = \left(a^3 + b^3\right) + 3ab(a+b) \leq 4\left(a^3 + b^3\right).$

1.24 D'une part, en utilisant l'exercice précédent, on obtient

$$4\left(a^3 + b^3\right) + 4\left(a^3 + c^3\right) + 4\left(b^3 + c^3\right) \geq \left(a+b\right)^3 + \left(a+c\right)^3 + \left(b+c\right)^3$$

ou encore

$$9\left(a^3 + b^3 + c^3\right) \geq 3\left(a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2\right).$$

D'autre part, en utilisant l'exercice 1.21, on a

$$abc = \sqrt[3]{a^3b^3c^3} \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \Rightarrow 6abc \leq 2\left(a^3 + b^3 + c^3\right).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\left(a+b+c\right)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3ab^2 + 3bc^2 + 3ac^2 + 6abc \\ &\leq 3\left(a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + a^2c + b^2c + ab^2 + bc^2 + ac^2\right) \\ &\leq 9\left(a^3 + b^3 + c^3\right).\end{aligned}$$

1.25 Posons $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0,\ xy + xz + yz = 3\right\}$. En utilisant l'exercice 1.21, on a

$$\left(xyz\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(xy)(xz)(yz)} \leq \frac{xy + xz + yz}{3} = 1 \Rightarrow xyz \leq 1.$$

Comme de plus, pour $x = y = z = 1$ l'égalité a lieu, on peut écrire

$$\max_E (xyz) = 1\,.$$

A présent, montrons que $\inf\limits_E (xyz) = 0$. En effet, en posant

$$x = \alpha\,,\; y = \frac{3 - \sqrt{9 - 24\,\alpha^2}}{4\alpha} \text{ et } z = \frac{3 + \sqrt{9 - 24\,\alpha^2}}{4\alpha} \text{ avec } 0 < \alpha < \sqrt{\frac{3}{8}}\,,$$

on obtient $xy+xz+yz = x(y+z)+yz = 3$ et $0 < xyz < x(xy+xz+yz) = 3\alpha$.

$\boxed{\mathbf{1.26}}$ Posons $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z > 0,\; xy+xz+yz = 3\}$. Puisque, pour tout $a,b \in \mathbb{R}_+^* : a^2 + b^2 \geq 2ab$, on a

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+xz+yz) \\ &= \frac{1}{2}\left((x^2+y^2) + (x^2+z^2) + (y^2+z^2)\right) + 6 \geq 9 \\ \Rightarrow x+y+z \geq 3\,.&\end{aligned}$$

Comme de plus, pour $x = y = z = 1$ l'égalité a lieu, on peut écrire

$$\min_E (x+y+z) = 3\,.$$

A présent, montrons que $\sup\limits_E (x+y+z) = +\infty$. En effet, en posant

$$x = \alpha > 0\,,\; y = \frac{3}{2\alpha} \text{ et } z = \frac{3}{2\left(\alpha + \dfrac{3}{2\alpha}\right)}\,,$$

on obtient $xy + xz + yz = xy + z(x+y) = 3$ et $x+y+z > \alpha$.

$\boxed{\mathbf{1.27}}$ 1) La valeur maximale cherchée est $\frac{1}{4}$. En effet, pour tout $0 \leq x < y \leq 1$:

$$xy^2 - x^2y = y(xy - x^2) \leq xy - x^2 \leq x - x^2 \leq \frac{1}{4}$$

et il y a égalité pour $x = \frac{1}{2}$ et $y = 1$.

2) La valeur maximale cherchée est de nouveau $\frac{1}{4}$ car en posant $a = 1 - y$ et $b = 1 - x$, on obtient, en utilisant 1), que

$$\begin{aligned}xy^2 + x^2z + yz^2 - xz^2 - x^2y - y^2z &= (z-y)(y-x)(z-x) \\ &\leq (1-y)(y-x)(1-x) = ab(b-a) = ab^2 - a^2b \leq \frac{1}{4}\end{aligned}$$

et il y a égalité pour $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$ et $z = 1$.

$\boxed{\mathbf{1.28}}$ 1) Raisonnons par l'absurde et supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. Alors, il existe deux entiers $p, q > 0$ avec $\operatorname{pgcd}(p, q) = 1$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} p^2 = 2q^2 &\Rightarrow p^2 \text{ est divsible par } 2 \Rightarrow p \text{ est divsible par } 2 \\ &\Rightarrow p^2 \text{ est divsible par } 4 \Rightarrow q^2 \text{ est divsible par } 2 \\ &\Rightarrow q \text{ est divsible par } 2\,. \end{aligned}$$

Par conséquent $\operatorname{pgcd}(p, q) \geq 2$. D'où contradiction.
2) Le cas $y \neq 0$ est à exclure car sinon on aurait $\sqrt{2} = \frac{6-x}{y} \in \mathbb{Q}$; ce qui n'est pas possible d'après 1). Par conséquent l'unique solution est $x = 6$ et $y = 0$.

$\boxed{\mathbf{1.29}}$ On va supposer que $xy \neq 0$ (car sinon le résultat est évident). Alors,

$$x^5 + y^5 = 2x^2y^2 \Leftrightarrow \frac{x^5}{y^5} + 1 = 2\frac{x^2}{y^2}\frac{1}{y}\,.$$

Ainsi, en posant $t = \frac{x}{y}$, on obtient que $t \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, 0\}$ et

$$x = \frac{2t^3}{1+t^5} \text{ et } y = \frac{2t^2}{1+t^5}\,.$$

D'où $1 - xy = 1 - \dfrac{4t^5}{\left(1+t^5\right)^2} = \left(\dfrac{1-t^5}{1+t^5}\right)^2$.

$\boxed{\mathbf{1.30}}$ Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux irrationnels $a < b$ pour lesquels l'intervalle fermé $[a, b]$ ne contienne qu'un nombre fini de rationnels. En désignant par c le plus petit de ces rationnels, on obtient que $a < c < b$ et $]a, c[\cap \mathbb{Q} = \emptyset$. D'où contradiction.

$\boxed{\mathbf{1.31}}$ Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux rationnels $a < b$ pour lesquels l'intervalle fermé $[a, b]$ ne contienne qu'un nombre fini d'irrationnels. En désignant par c le plus petit de ces irrationnels, on obtient que $a < c < b$ et $]a, c[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$. D'où contradiction.

$\boxed{\mathbf{1.32}}$ *Existence.* Pour cela, on va d'abord supposer que $x \geq 0$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien , on sait que $\{n \in \mathbb{N} : n > x\} \neq \emptyset$; ce qui implique qu'il existe un entier $m \geq 1$ tel que $m - 1 \leq x < m$. Il suffit donc de prendre $[x] = m - 1$. Supposons à présent que $x < 0$. On vient de démontrer qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $k - 1 \leq -x < k$. Par conséquent, en posant

$$[x] = \begin{cases} -k & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \\ -k+1 & \text{si } x \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

on a $[x] \leq x < [x] + 1$.
Unicité. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un $x \in \mathbb{R}$ pour lequel on ait l'existence de deux entiers $p < q$ vérifiant

$$p \leq x < p + 1 \text{ et } q \leq x < q + 1\,.$$

Comme $q \geq p + 1$, on aurait $q \leq x < p + 1 \leq q$. D'où contradiction.

$\boxed{\textbf{1.33}}$ $\sup\{0{,}1; 0{,}11; 0{,}111; \ldots\} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-k} = -1 + \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{9}$.

$$\inf\{-0{,}1; -0{,}101; -0{,}10101; \ldots\} = -\sum_{k=0}^{+\infty} 10^{-(2k+1)} = -\frac{1}{10}\,\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = -\frac{10}{99}.$$

$\boxed{\textbf{1.34}}$ Posons $\alpha = \sup E$, $\beta = \inf(-E)$ et montrons que $\alpha = -\beta$. En effet, d'une part, $-\alpha \leq \beta$ car pour tout $x \in E : -x \geq -\alpha$ et β est le plus grand des minorants de $-E$. D'autre part, $\alpha \leq -\beta$ car pour tout $x \in E : x \leq -\beta$ et α est le plus petit des majorants de E.

$\boxed{\textbf{1.35}}$ Posons $E = \left\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\right\}$ et $\alpha = \sup E$. Puisque E est borné et $1 \in E$, $\alpha \in]0, +\infty[$. Il nous suffit donc de montrer que $\alpha^2 = 2$. Pour cela, on va éliminer les deux autres cas possibles, à savoir : $\alpha^2 < 2$ et $\alpha^2 > 2$. En effet,

1) $\alpha^2 < 2$. Alors,

$$\begin{aligned} \alpha - \sqrt{2} = \frac{\alpha^2 - 2}{\alpha + \sqrt{2}} < 0 &\Rightarrow \exists\ \beta \in \mathbb{Q} \text{ t.q } \alpha < \beta < \sqrt{2} \\ &\Rightarrow \beta \in \mathbb{Q} \text{ et } \beta^2 - 2 = \left(\beta - \sqrt{2}\right)\left(\beta + \sqrt{2}\right) < 0 \Rightarrow \beta \in E\,; \end{aligned}$$

ce qui est impossible.

2) $\alpha^2 > 2$. Alors,

$$\begin{aligned} \alpha - \sqrt{2} = \frac{\alpha^2 - 2}{\alpha + \sqrt{2}} > 0 &\Rightarrow \exists\ \mu \in E \text{ t.q } \sqrt{2} < \mu \leq \alpha \\ &\Rightarrow \mu \in E \text{ et } \mu^2 - 2 = \left(\mu - \sqrt{2}\right)\left(\mu + \sqrt{2}\right) > 0\,; \end{aligned}$$

ce qui est impossible.

Remarque : Cet exercice montre que dans $\mathbb{Q}$ la notion de supremum ne peut pas être définie. De même pour l'infimum.

$\boxed{\textbf{1.36}}$ *Unicité.* Raisonnons par l'absurde et supposons que a n'est pas unique. Alors, il existe deux éléments $a_1 < a_2$ de $\mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in E$ et $y \in F$: $x < a_1 < a_2 < y$; ce qui revient à dire, puisque $\mathbb{R} = E \cup F$, que $]a_1, a_2[\cap \mathbb{R} = \emptyset$. D'où contradiction.

Existence. Puisque tout élément de E est un minorant de F, et que $\inf F$ est le plus grand de ses minorants, on a que pour tout $x \in E : x \leq \inf F$; ce qui entraîne que E est donc majoré par $\inf F$. Comme $\sup E$ est le plus petit de ses majorants, on a $\sup E \leq \inf F$. Finalement, en constatant que

$$\mathbb{R} = E \cup F \subset \left]-\infty, \sup E\right] \cup \left[\inf F, +\infty\right[\,,$$

on doit obligatoirement avoir que $\sup E = \inf F$. Il suffit donc de prendre $a = \sup E = \inf F$.

$\boxed{\mathbf{1.37}}$ Soit P_n avec $n \geq 2$, la relation définie par

$$\left(x_1, \ldots, x_n \in I\,,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1] \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1\right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in I\,.$$

P_2 est vraie. A vérifier, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. En effet,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j} x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in I\,.$$

On a ainsi démontré, par récurrence, que la relation P_n est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

$\boxed{\mathbf{1.38}}$ Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une fonction surjective $\varphi : E \to \mathcal{P}(E)$ et posons $A = \big\{x \in E : x \notin \varphi(x)\big\}$. Ainsi, puisque $A \in \mathcal{P}(E)$ et φ surjective, il existe $a \in E$ tel que $A = \varphi(a)$ et, de plus,

$$a \in A \Rightarrow a \notin \varphi(a) = A \text{ et } a \notin A \Rightarrow a \in \varphi(a) = A\,.$$

Autrement dit, on a la double négation : ni $a \in A$ ni $a \notin A$; ce qui est impossible. D'où contradiction.

$\boxed{\mathbf{1.39}}$ Il suffit de prendre $f(k) = \{0, 1, \ldots, k\}$.

Solutions des exercices du chapitre 2

Suites numériques

2.1 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{2}{n}} = 1.$

2.2 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+1}{4n^2+5} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{4+\dfrac{5}{n^2}} = \dfrac{1}{4}.$

2.3 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+2}}{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{n^2}}}{2} = \dfrac{1}{2}.$

2.4 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos\sqrt{n}}{n} = 0.$

2.5 $\forall\, n \geq 1 : \left| n \sin \dfrac{1}{n^2} \right| \leq \dfrac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} n \sin \dfrac{1}{n^2} = 0.$

2.6 $\forall\, n \geq 1 : \left| n^2 \cos \dfrac{1}{n^4} \sin \dfrac{1}{n^3} \right| \leq \dfrac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \cos \dfrac{1}{n^4}\, \sin \dfrac{1}{n^3} = 0.$

2.7 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n+1)-\sin(n-1)}{\cos(n+1)+\cos(n-1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\cos n \sin 1}{2\cos n \cos 1} = \operatorname{tg} 1.$

2.8 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n+1)+\sin(n-1)}{\sin n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\sin n \cos 1}{\sin n} = 2\cos 1.$

2.9 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin\sqrt{n^3+n^2+1}}{n^3+n^2+1} = 0.$

2.10 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin n$ n'existe pas. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que

$$\lim_{n\to+\infty} \sin n = \ell\,.$$

Alors,

1) $\forall\, n \geq 0 :\ \sin(n+2) - \sin n = 2\sin 1 \cos(n+1)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \cos n = 0 \Rightarrow |\ell| = \lim_{n\to+\infty} |\sin n| = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{1-\cos^2 n} = 1\,.$$

2) $\forall\, n \geq 0 : \cos(n+2) - \cos n = -2\sin 1 \sin(n+1) \Rightarrow \ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \sin n = 0.$

D'où contradiction.

2.11 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+4}}{2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-3}{2\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+4}\right)} = 0.$

2.12 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{(n+3)(n+6)}\right)$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{-9-\dfrac{11}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{7}{n^2}}+\sqrt{\left(1+\dfrac{3}{n}\right)\left(1+\dfrac{6}{n}\right)}} = -\frac{9}{2}\,.$$

2.13 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{n^4+4n+5}-n^2\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n(4n+5)}{\sqrt{n^4+4n+5}+n^2} = 2.$

2.14 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3+1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}(n-1)}{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3+1}} = \dfrac{1}{2}.$

2.15 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{(n+1)^3}{7^{n+1}}}{\dfrac{n^3}{7^n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{7}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3 = \dfrac{1}{7} < 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{7^n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{7^n}\cos\sqrt{n} = 0\,.$$

2.16 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0.$

2.17 1) $0 < |a| \le 1$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{|a|^n} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{a^n}$ diverge.

2) $|a| > 1$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{\dfrac{n+1}{a^{n+1}}}{\dfrac{n}{a^n}}\right| = \dfrac{1}{|a|} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{|a|} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0\,.$

2.18 $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n\, e^{-3n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{e^3}\right)^n = 0.$

2.19 $\forall\, n \ge 1:\ \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(1+\tfrac{2}{n}\right)^n = e^2\,.$$

2.20 $\forall\, n \ge 2:\ \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{\left(\dfrac{n-1}{n}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}\,.$

2.21 $\forall\, n \ge 1:\ 1 < \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n = \left(\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{e}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(1+\tfrac{1}{n^2}\right)^n = 1\,.$$

$\boxed{\mathbf{2.22}}$ $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+n^2\right)}{\ln\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\left(4+2\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\ln n}\right)=4.$$

$\boxed{\mathbf{2.23}}$ *Rappel* : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1.$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\ln\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}}+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}\right)=2\,.$$

$\boxed{\mathbf{2.24}}$ *Rappel* : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1.$

Posons pour tout entier $n\geq 2$,

$$a_n=\frac{\ln(1+n)}{\ln n}-1=\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln n}>0\,.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}na_n=0\\
&\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{\ln(1+n)}{\ln n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(na_n\right)\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}\right)=0\\
&\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+n)}{\ln n}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{\ln(1+n)}{\ln n}\right)^n}=1\,.
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2.25}}$ *Rappel* : $\forall\,x>0$ et $p\in\mathbb{N}$: $e^x=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}>\frac{x^p}{p!}.$

$$\forall\,n\geq 1:0<e^{-\sqrt{n}}\ln\left(1+n+e^n\right)<\frac{4!}{n^2}\ln\left(3\,e^n\right)\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}e^{-\sqrt{n}}\ln\left(1+n+e^n\right)=0.$$

$\boxed{\mathbf{2.26}}$ *Rappel* : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}=0.$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n^2}{\sqrt{n}}+\cos^n\frac{1}{n}\right)=4\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\sqrt{n}}{\sqrt{n}}+e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}}=1\,.$$

$\boxed{\mathbf{2.27}}$ $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\sqrt{n}\right)}{\ln\left(1+n^2\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\ln n}}{2+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\ln n}}=\frac{1}{4}.$$

$\boxed{\textbf{2.28}}$ *Rappel* : $\forall\, x > 0$ et $p \in \mathbb{N} : e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} > \frac{x^p}{p!}$.

$$\forall\, n \geq 1 : 0 < \frac{\ln\left(n + e^n\right)}{e^n} < \frac{\ln\left(2\, e^n\right)}{e^n} = \frac{n + \ln 2}{e^n} < \frac{4}{n} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln\left(n + e^n\right)}{e^n} = 0.$$

$\boxed{\textbf{2.29}}$ *Rappel* : $\forall\, x > 0$ et $p \in \mathbb{N} : e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} > \frac{x^p}{p!} \Rightarrow \frac{1}{4^n} = e^{-n \ln 4} < \frac{2}{n^2 \ln^2 4}$.

$$\forall\, n \geq 1 : \; 0 < \frac{\ln\left(2^n + 3^n\right)}{4^n} < \frac{\ln 2 + n \ln 3}{4^n} < 2 \frac{\ln 2 + n \ln 3}{n^2 \ln^2 4}$$
$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln\left(2^n + 3^n\right)}{4^n} = 0\,.$$

$\boxed{\textbf{2.30}}$ *Rappels* :

1) $\forall\, x > 0$ et $p \in \mathbb{N} : e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} > \frac{x^p}{p!} \Rightarrow \frac{1}{5^n} = e^{-n \ln 5} < \frac{2}{n^2 \ln^2 5}$.

2) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

3) $\forall\, n > 1 : n! = n(n-1) \cdots 2 < n^n$.

$$\forall\, n > 1 : \; 0 < \frac{\ln(n!)}{5^n} < 2 \frac{\ln n}{n \ln^2 5} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n!)}{5^n} = 0\,.$$

$\boxed{\textbf{2.31}}$ *Rappels* :

1) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2) $\forall\, n > 1 : n! = n(n-1) \cdots 2 < n^n$.

$$\forall\, n > 1 : \; 0 < \frac{\ln n!}{n^2} < \frac{\ln n}{n} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n!)}{n^2} = 0\,.$$

$\boxed{\textbf{2.32}}$
$$\forall\, n \geq 2 : \; \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$
$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - 1} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{3}{4}\,.$$

$\boxed{\textbf{2.33}}$
$$\forall\, n \geq 1 : \; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2 + 3k + 2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$$
$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2 + 3k + 2} = 1\,.$$

2.34 $$\forall n \geq 1 : \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{k^3+4k^2+5k+2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{\big(k+1\big)^2(k+2)}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^3+4k^2+5k+2} = 1\,.$$

2.35 $$\forall n \geq 1 : \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2+3k+2}{k^4+7k^3+17\,k^2+17\,k+6} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+3}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2+3k+2}{k^4+7k^3+17\,k^2+17\,k+6} = \frac{3}{4}\,.$$

2.36 *Rappel* : $\forall n \geq 1 : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}\,.$$

2.37 *Rappel* : $\forall n \geq 1 : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} k^2\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6(n-1)(n-2)(n-3)!} = 0\,.$$

2.38 *Rappel* : $\forall n \geq 1 : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\big(n+1\big)^2}{4}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\big(n+1\big)^2}{4n^4} = \frac{1}{4}\,.$$

2.39 *Rappel* : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-2^x}{x} = -\ln 2$.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} 2^{\frac{k}{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1-2^{\frac{1}{n}}}\left(1 - 2^{\frac{n+1}{n}}\right) = \frac{1}{\ln 2}\,.$$

2.40 $$\forall n \geq 1 : 0 < \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leq \frac{n\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\right) = 0.$$

$\boxed{\mathbf{2.41}}$ *Rappel* : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{m} = 1$.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \sqrt[n]{m}\right)^m = 1\,.$$

$\boxed{\mathbf{2.42}}$ $\forall\, n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$:

$$\frac{k}{n^2}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1} \leq \sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1 = \frac{k}{n^2}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}+1} \leq \frac{k}{2n^2}\,.$$

Ainsi, puisque

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \frac{1}{4}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{4n^2} = \frac{1}{4}\,,$$

on peut conclure, grâce au théorème des deux gendarmes, que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right) = \frac{1}{4}\,.$$

$\boxed{\mathbf{2.43}}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $x_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $y_n = \sqrt{n}$.

1) (y_n) est strictement croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 2.$

Le théorème de Stolz, nous permet de conclure que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = 2\,.$$

$\boxed{\mathbf{2.44}}$ $\forall\, n \geq 2 :\; 1 \leq \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \leq \dfrac{1}{n!}\big(n! + (n-1)! + (n-2)(n-2)!\big)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k!\right) = 1\,.$$

2.45 *Rappels* : $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

$$\forall\, n \geq 2 : \sum_{k=2}^{n} \frac{n \sin \frac{2}{n}}{\log_k \sqrt[3]{n!}} = 6 \frac{\sin \frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{n \sin \frac{2}{n}}{\log_k \sqrt[3]{n!}} \right) = 6\,.$$

2.46 Puisque pour tout entier $n > 0$:

$$\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n^2} \ln \frac{1}{2^{k \sin \frac{2}{n}}} = -\frac{1}{n^3}\, \sin \frac{2}{n}\, \ln 2 \sum_{k=1}^{n^2} k = -\frac{\sin \frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} \ln 2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right),$$

on a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \ln \frac{1}{2^{k \sin \frac{2}{n}}} = -\ln 2.$

2.47 *Rappel* : $\forall\, t \neq 0 : |\sin t| < |t|$.
Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
&\left|\sin^2 \left(\pi\sqrt{n^2+n}\right) - 1\right| = \left|\sin^2 \left(\pi\sqrt{n^2+n}\right) - \sin^2 \left(\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)\right)\right| \\
&\leq 2 \left|\sin \left(\pi\sqrt{n^2+n}\right) - \sin \left(\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)\right)\right| \\
&\leq 4 \left|\sin \pi \left(\frac{\sqrt{n^2+n} - \left(n + \frac{1}{2}\right)}{2}\right)\right| \\
&< 2\pi \left|\sqrt{n^2+n} - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right| = \frac{\pi}{2\left(\sqrt{n^2+n} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\right)} < \frac{\pi}{2n+1}.
\end{aligned}$$

D'où $\lim_{n\to+\infty} \sin^2 \left(\pi\sqrt{n^2+n}\right) = 1.$

2.48 *Rappel* : $\forall\, t \neq 0 : |\sin| < |t|$.
Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
&\left|\cos \sqrt{2 + 4n^2\pi^2} - 1\right| = \left|\cos \sqrt{2 + 4n^2\, \pi^2} - \cos \sqrt{4n^2\pi^2}\right| \\
&\leq 2 \left|\sin \frac{\sqrt{2 + 4n^2\pi^2} - \sqrt{4n^2\pi^2}}{2}\right| \\
&< \left|\sqrt{2 + 4n^2\pi^2} - \sqrt{4n^2\pi^2}\right| = \frac{2}{\sqrt{2 + 4n^2\pi^2} + \sqrt{4n^2\pi^2}} < \frac{1}{n}\,.
\end{aligned}$$

D'où $\lim_{n\to+\infty} \cos \sqrt{2 + 4n^2\pi^2} = 1\,.$

$\boxed{\mathbf{2.49}}$ 1) En effet, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $p > n+1$:

$$0 < n!\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right) = \sum_{k=n+1}^{p}\frac{n!}{k!} = \sum_{k=1}^{p-n}\frac{n!}{(n+k)!} < \sum_{k=1}^{p-n}\frac{1}{\left(n+1\right)^k} < \frac{1}{n}\,,$$

on obtient, par passage à la limite, que pour tout entier $n > 0$:

$$0 < n!\left(e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right) = \lim_{p\to+\infty} n!\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right) \le \frac{1}{n}\,.$$

2) Raisonnons par l'absurde et supposons que $e \in \mathbb{Q}$. Alors, d'après 1), on peut trouver un entier $n > 1$ pour lequel

$$\alpha_n = n!\left(e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right) \in \mathbb{N} \text{ et } 0 < \alpha_n < 1\,;$$

ce qui est impossible. D'où contradiction.

Remarque : e est aussi transcendant (ex. 6.174).

$\boxed{\mathbf{2.50}}$ Soit $\varepsilon > 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell \Rightarrow \exists\, m > 1$ tel que $\forall\, k \ge m : |x_k - \ell| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout entier $n \ge m$:

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right) - \ell\right| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \ell)\right| \\ &\le \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{m-1}\left|x_k - \ell\right| + \sum_{k=m}^{n}\left|x_k - \ell\right|\right) \le \frac{M(m-1)}{n} + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

où $M = \max\left\{\left|x_k - \ell\right| : 1 \le k \le m-1\right\}$. Comme de plus

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{M(m-1)}{n} = 0\,,$$

il existe un entier $n_\varepsilon \ge m$ tel que pour tout entier $n \ge n_\varepsilon$: $\left|\frac{M(m-1)}{n}\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, pour tout entier $n \ge n_\varepsilon$:

$$\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right) - \ell\right| \le \varepsilon\,.$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right) = \ell\,.$

Remarque : La réciproque est fausse. Prendre comme contre-exemple $x_n = (-1)^n$.

$\boxed{\mathbf{2.51}}$ *Rappels* : $\forall\, n \geq 1 : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Soit $\varepsilon > 0$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell \Rightarrow \exists\; m > 1$ tel que $\forall\, k \geq m : \left|x_k - \ell\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Ainsi, pour tout entier $n \geq m$:

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} kx_k\right) - \ell\right| &\leq \frac{2}{n(n+1)}\left|\sum_{k=1}^{n} k\big(x_k - \ell\big)\right| \\ &\leq \frac{2}{n(n+1)}\left(\sum_{k=1}^{m-1} k\big|x_k - \ell\big| + \sum_{k=m}^{n} k\big|x_k - \ell\big|\right) \\ &\leq \frac{Mm(m-1)}{n(n+1)} + \frac{\varepsilon}{2}\,.\end{aligned}$$

où $M = \max\left\{\left|x_k - \ell\right| : 1 \leq k \leq m-1\right\}$. Comme de plus $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \tfrac{Mm(m-1)}{n(n+1)} = 0$, il existe un entier $n_\varepsilon \geq m$ tel que pour tout entier $n \geq n_\varepsilon$: $\left|\tfrac{Mm(m-1)}{n(n+1)}\right| \leq \tfrac{\varepsilon}{2}$.
Par conséquent, pour tout entier $n \geq n_\varepsilon$:

$$\left|\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} kx_k\right) - \ell\right| \leq \varepsilon$$

D'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} kx_k\right) = \ell.$

$\boxed{\mathbf{2.52}}$ Pour tout entier $n > 2$:

$$\begin{aligned}\sqrt{n} - 1 &= \big(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\big) + \big(\sqrt{n-1} - \sqrt{n-2}\big) + \cdots + \left(\sqrt{2} - 1\right) \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \\ &\Rightarrow x_n = -2\sqrt{n} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} > -2\,.\end{aligned}$$

De plus pour tout entier $n \geq 1$: $x_{n+1} - x_n = \dfrac{-1}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)^2} < 0.$

La suite $\left(x_n\right)$ étant strictement décroissante et minorée, elle converge.

$\boxed{\mathbf{2.53}}$ Si $a = 0$, il n'y a rien à démontrer.

1) $|a| > 1$. Alors, il existe un nombre $\zeta > 0$ tel que $|a| = 1 + \zeta$. D'où

$$\forall\, n \geq 1 : \; \left|a^n\right| = \left|a\right|^n = \big(1 + \zeta\big)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\zeta^k \geq 1 + n\zeta\,.$$

La suite $\left(x_n = a^n\right)$ n'étant pas bornée, elle diverge.

2) $0 < |a| < 1$. Alors, il existe un nombre $\gamma > 0$ tel que $\frac{1}{|a|} > 1 + \gamma$. D'où

$$\forall\, n \geq 1 : \ \left|a^n\right| \leq \frac{1}{1+n\gamma} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a^n = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{2.54}}$ *Résultats préliminaires :*

1) $\forall\, n \geq k \geq 2 : \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k} = \dfrac{1}{k!}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\dfrac{k-1}{n}\right)$.

2) $\forall\, n \geq 2 :$
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 1+1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right).$$

3) $\forall\, k \geq 1 : k! \geq 2^{k-1}$ (par récurrence).

Pour tout entier $n \geq 2$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)$$
$$\leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \leq 1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k} \leq 1+\frac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}} < 3\,.$$

Pour tout entier $n \geq 2$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)$$
$$< 1+1+\sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\right) = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

La suite (x_n) étant strictement croissante et majorée, elle converge. Par définition, sa limite vaut e.

$\boxed{\mathbf{2.55}}$ En utilisant l'exercice précédent, on obtient que pour tout entier $n \geq 3$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 < n \Rightarrow (n+1)^n = n^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n^{n+1}$$
$$\Rightarrow \sqrt[n+1]{n+1} = \sqrt[n(n+1)]{\left(n+1\right)^n} < \sqrt[n(n+1)]{n^{n+1}} = \sqrt[n]{n}\,.$$

La suite (x_n) étant strictement décroissante (pour $n \geq 3$) et minorée par 1, elle converge. Reste à démontrer que sa limite ℓ vaut 1. Puisque $\ell \geq 1$, il suffit d'éliminer le cas $\ell > 1$. En effet, si $\ell > 1$, il existerait un nombre $\beta > 0$ tel que $\ell = 1+\beta$ et l'on aurait, pour tout entier $n \geq 2$:

$$\sqrt[n]{n} > \ell = 1+\beta \Rightarrow n > \left(1+\beta\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta^k > \frac{n(n-1)}{2}\,\beta^2 \Rightarrow 1 > \frac{(n-1)}{2}\beta^2\,;$$

ce qui est impossible.

2.56 Pour tout entier $n \geq 1$:

$$
\begin{aligned}
&(1-a)x_n\\
&= (1-a)(1+a)\big(1+a^2\big)\cdots\big(1+a^{2^n}\big) = \big(1-a^2\big)\big(1+a^2\big)\cdots\big(1+a^{2^n}\big)\\
&= \big(1-a^4\big)\big(1+a^4\big)\cdots\big(1+a^{2^n}\big) = \ldots = \big(1-a^{2^n}\big)\big(1+a^{2^n}\big) = \big(1-a^{2^{n+1}}\big)\,.
\end{aligned}
$$

Puisque $0 < |a| < 1$ (ex. 2.53), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a} = \dfrac{1}{1-a}\,.$

2.57 *Rappel* : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1.$
Pour tout entier $n \geq 1$:

$$
\begin{aligned}
x_n - \sin a &= \cos\frac{a}{2}\,\cdots\cos\frac{a}{2^n} - 2\sin\frac{a}{2}\,\cos\frac{a}{2}\\
&= \cos\frac{a}{2}\left(\cos\frac{a}{2^2}\,\cdots\cos\frac{a}{2^n} - 2^2\sin\frac{a}{2^2}\,\cos\frac{a}{2^2}\right)\\
&= \ldots = \left(\cos\frac{a}{2}\,\cdots\cos\frac{a}{2^{n-1}}\right)\left(\cos\frac{a}{2^n} - 2^n\,\sin\frac{a}{2^n}\,\cos\frac{a}{2^n}\right)\\
&= x_n\left(1-2^n\sin\frac{a}{2^n}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \sin a = 2^n x_n \sin\frac{a}{2^n}\,.
$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sin a}{a}\;\dfrac{\frac{a}{2^n}}{\sin\frac{a}{2^n}}\right) = \dfrac{\sin a}{a}\,.$

2.58 Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout entier $n \geq 2$:

$$
x_n = \frac{1^2\cdots\big(n-1\big)^2}{(2^2-1)\cdots\big(n^2-1\big)}\,a = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1} k^2}{\prod\limits_{k=2}^{n}(k^2-1)}\,a = \frac{2a}{n(n+1)}\,.
$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0.$

2.59 Puisque pour tout entier $p \geq 2$:

$$
x_p - x_{p-1} = \frac{1}{2}\big(x_{p-1}+x_{p-2}\big) - x_{p-1} = -\frac{1}{2}\big(x_{p-1}-x_{p-2}\big) = \cdots = \left(\frac{-1}{2}\right)^{p-1},
$$

on a que pour tout entier $n \geq 2$:

$$
\begin{aligned}
x_n &= \big(x_n - x_{n-1}\big) + \big(x_{n-1}-x_{n-2}\big) + \cdots + \big(x_1 - x_0\big) + x_0\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n}{1+\dfrac{1}{2}}\,.
\end{aligned}
$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{2}{3}.$

$\boxed{\textbf{2.60}}$ Puisque pour entier $p \geq 2$:

$$x_p - x_{p-1} = \frac{1}{4}\left(5x_{p-1} - x_{p-2}\right) - x_{p-1} = \frac{1}{4}\left(x_{p-1} - x_{p-2}\right) = \cdots = \frac{1}{4^{p-1}}\,,$$

on a que pour tout entier $n \geq 2$:

$$x_n = \left(x_n - x_{n-1}\right) + \left(x_{n-1} - x_{n-2}\right) + \cdots + \left(x_1 - x_0\right) + x_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^{k-1}} = \frac{1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{4}}\,.$$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \dfrac{4}{3}$.

$\boxed{\textbf{2.61}}$ Puisque pour entier $n \geq 2$:

$$x_n - x_{n-1} = \left(5x_{n-1} - 4x_{n-2}\right) - x_{n-1} = 4\left(x_{n-1} - x_{n-2}\right) = \cdots = 4^{n-1}\,,$$

la suite $\left(x_n\right)$ n'est pas de Cauchy, elle diverge.

$\boxed{\textbf{2.62}}$ Puisque pour tout $x \in \left[0, \frac{5}{2}\right]$: $0 \leq \frac{3x - x^2 + 4}{3} \leq \frac{5}{2}$, il est facile de vérifier, par un simple raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq x_n \leq \frac{5}{2}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|x_n - 2\right| = \frac{1}{3}\left|x_{n-1} - 1\right|\left|x_{n-1} - 2\right| \leq \frac{1}{2}\left|x_{n-1} - 2\right| \leq \ldots \leq \frac{1}{2^n}\left|x_0 - 2\right| = \frac{1}{2^{n-1}}\,.$$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 2$.

$\boxed{\textbf{2.63}}$ Puisque pour entier $p \geq 2$:

$$x_p - x_{p-1} = \frac{3}{4}\left(x_{p-1} - x_{p-2}\right) = \cdots = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{p-1}\,,$$

on a que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} x_n &= \left(x_n - x_{n-1}\right) + \left(x_{n-1} - x_{n-2}\right) + \cdots + \left(x_1 - x_0\right) + x_0 \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \frac{1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n}{4\left(1 - \dfrac{3}{4}\right)}\,. \end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$.

2.64 Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{3}\left(x_n - 1\right)^2 \geq 0\,,$$

la suite $\left(x_n\right)$ est croissante donc minorée par $x_0 = \sqrt{2}$. Montrons à présent que la suite $\left(x_n\right)$ diverge. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'elle converge vers ℓ. Alors, $\ell \geq \sqrt{2}$ et $\ell = \frac{1}{3}(\ell^2 + \ell + 1)$ dont l'unique solution est $\ell = 1$; ce qui est impossible. D'où contradiction.

2.65 Puisque pour tout entier $p \geq 2$:

$$x_p - x_{p-1} = \frac{1}{3}\left(x_{p-1} - x_{p-2}\right) = \ldots = \frac{1}{3^{p-1}}\left(x_1 - x_0\right),$$

on a que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x_n = x_0 + \sum_{p=1}^{n}(x_p - x_{p-1}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{3^{p-1}}\,.$$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \dfrac{5}{4}$.

2.66 Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(x_n - y_n\right) = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} - y_{n-1}\right) = \cdots = \frac{1}{2^n}$$

et

$$\left(x_n + y_n\right) = \left(x_{n-1} + y_{n-1}\right) = \cdots = \left(x_0 + y_0\right) = 1\,,$$

on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $x_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ et $y_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$. D'où

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} y_n = \frac{1}{2}\,.$$

2.67 Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 < x_0 < x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n < y_0$. La suite $\left(x_n\right)$ est strictement croissante et majorée tandis que la suite $\left(y_n\right)$ est strictement décroissante et minorée. Elles sont donc convergentes. Posons

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x \text{ et } \lim_{n \to +\infty} y_n = y\,.$$

Alors, $2y = x + y$ ou encore $x = y$.

$\boxed{\mathbf{2.68}}$ Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 < y_n < x_n$. Ainsi, pour tout entier $n \geq 0$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{y_n - x_n}{2} < 0 \text{ et } y_{n+1} - y_n = \frac{y_n\left(x_n - y_n\right)}{x_n + y_n} > 0\,.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^* : 0 < y_n < y_{n+1} < x_{n+1} < x_n < x_0$. La suite $\left(x_n\right)$ est strictement décroissante et minorée tandis que la suite $\left(y_n\right)$ est strictement croissante et majorée. Elles sont donc convergentes. Posons

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \text{ et } \lim_{n\to+\infty} y_n = y\,.$$

Alors, $2x = x + y$ ou encore $x = y$. De plus, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x_n y_n = x_{n-1}y_{n-1} = \cdots = x_0 y_0\,,$$

on a $y^2 = xy = x_0y_0$ et $y \geq 0 \Rightarrow y = \sqrt{x_0y_0}$.

$\boxed{\mathbf{2.69}}$ *Rappel* : $\forall\, t \neq 0 : |\sin t| < |t|$.

Il est facile de vérifier que $0 < a < 1$. De plus, par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq x_n \leq 1$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\left|x_n - a\right| &= \left|\cos x_{n-1} - \cos a\right| = \left|-2\sin\frac{x_{n-1}-a}{2}\sin\frac{x_{n-1}+a}{2}\right| \\ &\leq \frac{\left|x_{n-1}+a\right|}{2}\left|x_{n-1}-a\right| \leq \left(\frac{1+a}{2}\right)\left|x_{n-1}-a\right| \leq \ldots \leq \left(\frac{1+a}{2}\right)^n\left|x_0 - a\right|.\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1+a}{2}\right)^n = 0$ (car $0 < a < 1$), on peut conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a\,.$$

$\boxed{\mathbf{2.70}}$ *Rappel* : $\forall\, 0 < t < 1 : 0 < \sin t < t < 1$.

Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < x_{n+1} < x_n < 1$. La suite $\left(x_n\right)$ est strictement décroissante et minorée, elle converge. Posons

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x\,.$$

Puisque $x = \sin x$ et $0 \leq x < 1$, on doit obligatoirement avoir $x = 0$.

$\boxed{\mathbf{2.71}}$ Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N} : 1 < x_{n+1} < x_n$. La suite $\left(x_n\right)$ est strictement décroissante et minorée, elle converge.

Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x = 2 - \frac{1}{x}$ ou encore $x = 1$.

$\boxed{\mathbf{2.72}}$ Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N} : x_n = 3\left(\frac{\alpha}{3}\right)^{2^n}$. Par conséquent, la suite $\left(x_n\right)$ converge vers 0 si $|\alpha| < 3$ et diverge si $|\alpha| > 3$. Pour $|\alpha| = 3$, elle converge vers 3.

$\boxed{\textbf{2.73}}$ Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{4} \leq x_n < x_{n+1} < \frac{1}{2}$. La suite $\left(x_n\right)$ est strictement croissante et majorée, elle converge.

Posons $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$. Alors, $x = \frac{1}{4} + x^2$ ou encore $x = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\textbf{2.74}}$ Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq x_n < \sqrt{2}$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\left(x_n - \sqrt{2}\right)^2}{2\sqrt{2}} > 0\,.$$

La suite $\left(x_n\right)$ est strictement croissante et majorée, elle converge.

Posons $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$. Alors, $x = \frac{x^2+2}{2\sqrt{2}}$ ou encore $x = \sqrt{2}$.

$\boxed{\textbf{2.75}}$ Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < x_{n+1} < x_n$. La suite $\left(x_n\right)$ est strictement décroissante et minorée, elle converge.

Posons $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$. Alors, $x = \frac{x^3+70}{39}$ et $0 \leq x < x_0 = 4$. D'où, $x = 2$.

$\boxed{\textbf{2.76}}$ Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq x_n < \frac{4}{3}$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{-3x_n + 4}{4} > 0\,.$$

La suite $\left(x_n\right)$ est strictement croissante et majorée, elle est donc convergente.
Posons $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$. Alors, $x = \frac{x+4}{4}$ ou encore $x = \frac{4}{3}$.

$\boxed{\textbf{2.77}}$ Puisque pour tout entier $p \geq 2$:

$$x_p - x_{p-1} = \frac{1}{2}\left(x_{p-1} - x_{p-2}\right) = \ldots = \frac{1}{2^{p-1}}\,,$$

on a que pour tout entier $n \geq 1$:

$$x_n = \left(x_n - x_{n-1}\right) + \cdots + \left(x_1 - x_0\right) + x_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} + x_0\,.$$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 3$.

$\boxed{\textbf{2.78}}$ Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n > 0$; ce qui entraîne que pour tout entier $n \geq 1$:

$$x_n - 1 = \frac{\left(x_{n-1} - 1\right)^2}{2x_{n-1}} \geq 0\,.$$

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1 - x_n^2}{2x_n} \leq 0\,.$$

La suite $\left(x_n\right)$ est décroissante et minorée, elle converge.

Posons $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$. Alors, $x \geq 0$ et $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ ou encore $x = 1$.

2.79 Pour commencer, considérons la fonction auxiliaire $f : \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ définie par $f\left(x\right) = \frac{x+1}{3x+1}$. Puisque pour tout $x > -\frac{1}{3}$:

$$f'(x) = \frac{-2}{\left(3x+1\right)^2} < 0\,,$$

la fonction f est strictement décroissante. Par conséquent, pour tout $x \geq 0$:

$$\frac{1}{3} < \frac{x+1}{3x+1} \leq 1\,.$$

En utilisant ce résultat, il est facile de démontrer, par un simple raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{3} < x_n \leq 1$; ce qui entraîne que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{3x_n+1} < \frac{1}{2}\,.$$

Ainsi, puisque pour tout entier $p \geq 2$:

$$\begin{aligned}\left|x_p - x_{p-1}\right| &= 2\frac{\left|x_{p-1} - x_{p-2}\right|}{\left(3x_{p-1}+1\right)\left(3x_{p-2}+1\right)}\\ &\leq \frac{1}{2}\left|x_{p-1} - x_{p-2}\right| \leq \ldots \leq \frac{1}{2^{p-1}}\left|x_1 - x_0\right| = \frac{1}{2^p}\,,\end{aligned}$$

on obtient que pour tout $m > n \geq 2$:

$$\begin{aligned}\left|x_m - x_n\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{m}\left(x_k - x_{k-1}\right)\right|\\ &\leq \sum_{k=n+1}^{m}\left|x_k - x_{k-1}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{m-n-1}\frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^n}\,.\end{aligned}$$

La suite $\left(x_n\right)$ est de Cauchy, elle est donc convergente.
Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x > 0$ et $x = \frac{x+1}{3x+1}$ ou encore $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2.80 Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout entier $n \geq 0$: $x_n > 0$. Désignons par ℓ l'unique solution positive de l'équation $x = \frac{1}{1+x}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|x_n - \ell\right| = \left|\frac{1}{1+x_{n-1}} - \frac{1}{1+\ell}\right| < \frac{\left|x_{n-1} - \ell\right|}{(1+\ell)} < \ldots < \frac{\left|x_0 - \ell\right|}{\left(1+\ell\right)^n} = \frac{\ell}{\left(1+\ell\right)^n}\,.$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

2.81 Soit $f : [0, +\infty[\; \to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$f(x) = \frac{3x}{1+3x}\,.$$

Puisque pour tout $x > 0$: $f'(x) = \frac{3}{(1+3x)^2} > 0$, la fonction continue f est strictement croissante. De plus, $f(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$. Ainsi, par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{2}{3} < x_{n+1} < x_n$. La suite $\big(x_n\big)$ est strictement décroissante et minorée, elle converge.

Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x = \frac{3x}{1+3x}$ et $x \geq \frac{2}{3}$. D'où, $x = \frac{2}{3}$.

$\boxed{\textbf{2.82}}$ Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout entier $n \geq 0$: $0 < x_n < x_{n+1} < 3$. La suite $\big(x_n\big)$ est strictement croissante et majorée, elle converge.

Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x > 0$ et $x^2 = 3x$ ou encore $x = 3$.

$\boxed{\textbf{2.83}}$ Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout entier $n \geq 0$: $0 < x_{n+1} < x_n$. La suite $\big(x_n\big)$ est strictement décroissante et minorée, elle converge.

$\boxed{\textbf{2.84}}$ *Rappel* : $\forall\, t \in \mathbb{R} : 1 + \cos t = 2\cos^2 \dfrac{t}{2}$.

1) Par un simple raisonnement par récurrence, on vérifie que pour tout entier $n \geq 0$:
$$x_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\,.$$

2) D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$.

$\boxed{\textbf{2.85}}$ 1) En constatant que $\frac{1}{\sqrt{2}} < x_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} < \sqrt{2}$, un simple raisonnement par récurrence, nous permet de montrer que pour tout entier $n \geq 1$:
$$\frac{1}{\sqrt{2}} < x_n < \sqrt{2}\,.$$

2) Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{aligned}\big|x_n - 1\big| &= \Big|\sqrt{2 - x_{n-1}} - 1\Big| = \frac{\big|x_{n-1} - 1\big|}{\sqrt{2 - x_{n-1}} + 1}\\ &< \frac{\big|x_{n-1} - 1\big|}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} < \ldots < \frac{\big|x_0 - 1\big|}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n} = \frac{1}{3\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}\,.\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

$\boxed{\textbf{2.86}}$ 1) $0 < \alpha < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dans ce cas, par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < x_n < x_{n+1} < 2$. La suite $\big(x_n\big)$ est strictement croissante et majorée, elle converge.

Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x > 0$ et $x^2 = 1 + x$ ou encore $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2) $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dans ce cas la suite est constante. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3) $\alpha > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dans ce cas, par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 < x_{n+1} < x_n$. La suite $\big(x_n\big)$ est strictement décroissante et minorée, elle converge. Sa limite vaut aussi $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2.87 Par un simple raisonnement par récurrence, on démontre que pour tout entier $n \geq 0$:

$$3 \leq x_n < x_{n+1} < 8\,.$$

La suite $\big(x_n\big)$ étant strictement croissante et majorée, elle converge.

Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x > 3$ et $x^2 - 7x + 8 = 0$ ou encore $x = \frac{7+\sqrt{17}}{2}$.

2.88 1) $|\alpha| \leq 2$. Dans ce cas, par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq x_n \leq \frac{4}{3}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\big|x_n - 1\big| &= \frac{1}{3}\,\big|x_{n-1} + 1\big|\big|x_{n-1} - 1\big| \\
&\leq \frac{7}{9}\,\big|x_{n-1} - 1\big| \leq \ldots \leq \left(\frac{7}{9}\right)^n \big|x_0 - 1\big| = \left(\frac{7}{9}\right)^n |\alpha - 1|\,.
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

2) $2 < |\alpha| < 4$. Dans ce cas, par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : -4 < x_n \leq \frac{4}{3}$. Posons $E = \{n \in \mathbb{N}^* : x_n \geq 1\}$. Pour commencer, supposons que $E \neq \emptyset$ et soit $m \in E$. Alors, la suite auxiliaire $\big(y_n = x_{n+m}\big)$ satisfait le cas $\big|y_0\big| \leq 2$. Par conséquent, elle converge vers 1 ; ce qui entraîne que la suite $\big(x_n\big)$ converge aussi vers 1. Supposons, à présent, que $E = \emptyset$. Alors, pour tout entier $n \geq 2$:

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{3}\big(x_{n-1} + 4\big)\big(x_{n-1} - 1\big) > 0\,.$$

La suite $\big(x_n\big)$ est strictement croissante (pour $n \geq 1$) et majorée, elle converge. Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x > x_1 > -4$ et $x = \frac{4-x^2}{3}$ ou encore $x = 1$.

3) $|\alpha| = 4$. Dans ce cas, la suite est constante (pour $n \geq 1$). D'où

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = -4\,.$$

4) $|\alpha| > 4$. Dans ce cas, par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : x_n < -4$. Alors, pour tout entier $n \geq 2$:

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{3}\,\big(x_{n-1} + 4\big)\big(x_{n-1} - 1\big) < 0\,.$$

La suite $\big(x_n\big)$ est strictement décroissante (pour $n \geq 1$). Malheureusement, elle diverge (ici $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$). En effet, raisonnons par l'absurde et supposons qu'elle converge. Alors, en posant $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, on devrait avoir $x < x_1 < -4$ et $x = \frac{4-x^2}{3}$; ce qui est impossible. D'où contradiction.

$\boxed{\textbf{2.89}}$ Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 < x_n < x_{n+1} < 3$: La suite $\big(x_n\big)$ est strictement croissante et majorée, elle converge.

Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x > 0$ et $x = \sqrt{3 + \frac{x^2}{2}}$ ou encore $x = \sqrt{6}$.

$\boxed{\textbf{2.90}}$ Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N} : 1 < x_{n+1} < x_n$. La suite $\big(x_n\big)$ est strictement décroissante et minorée, elle converge.

Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x \geq 1$ et $x = \sqrt[4]{2 + x_n^2}$ ou encore $x = \sqrt{2}$.

$\boxed{\textbf{2.91}}$ Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N} : 1 < x_{n+1} < x_n$. La suite $\big(x_n\big)$ est strictement décroissante et minorée, elle converge.

Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x \geq 1$ et $x = \sqrt[6]{1 + x_n^3}$ ou encore $x = \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

$\boxed{\textbf{2.92}}$ Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N} : \frac{1}{4} < x_{n+1} < x_n$. La suite $\big(x_n\big)$ est strictement décroissante et minorée, elle converge.

Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x = \sqrt{x} - \frac{1}{4}$ ou encore $x = \frac{1}{4}$.

$\boxed{\textbf{2.93}}$ Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$f(x) = x - \ln\big(1 + x^2\big)\,.$$

Puisque pour tout $x \in\ ]0,1[\ : f'(x) = \frac{(1-x)^2}{1+x^2} > 0$, la fonction continue f est strictement croissante. De plus, pour tout $x \in\ ]0,1[\ :$

$$0 = f(0) < f(x) < f(1) < 1\,.$$

Ainsi, par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 < x_{n+1} < x_n < 1$. La suite $\big(x_n\big)$ est strictement décroissante et minorée, elle converge.

Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $\ln(1 + x^2) = 0$ ou encore $x = 0$.

$\boxed{\textbf{2.94}}$ Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 < x_{n+1} < x_n$. La suite $\big(x_n\big)$ est strictement décroissante et minorée, elle converge.

Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x = \ln(\operatorname{ch} x)$ ou encore $x = 0$.

$\boxed{\textbf{2.95}}$ *Rappel* : $\forall\, t > 0 : |\sin t| < t$.

Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n > 0$; ce qui entraîne que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{2}\sin 2x_n\right) < x_n\,.$$

La suite (x_n) est strictement décroissante et minorée, elle converge.

Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x \geq 0$ et $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)$ ou encore $x = 0$.

2.96 En constatant que tout $n \in \mathbb{N} : x_n y_n = 1$, on a que tout $n \in \mathbb{N}^* : x_n = \frac{1}{e}$ et $y_n = e$. Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{e} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_n = e\,.$$

2.97 Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < x_{n+1} \leq x_n \leq 1 \text{ et } 0 < y_{n+1} < y_n \leq 1\,.$$

Les deux suites (x_n) et (y_n) sont décroissantes et minorées, elles convergent. Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$. Alors,

$$\left.\begin{array}{l} x = xy \\ y \leq y_1 = \sin 1 < 1 \\ y = \sin xy \end{array}\right\} \Rightarrow x = y = 0\,.$$

2.98 En constatant que pour tout entier $k > 2$:

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{k^2-1}\sum_{p=1}^{k-1} x_p = \frac{1}{k^2-1}\left(x_{k-1} + \sum_{p=1}^{k-2} x_p\right) \\ &= \frac{1}{k^2-1}\,\left(x_{k-1} + \left((k-1)^2-1\right)x_{k-1}\right) = \frac{k-1}{k+1}x_{k-1}\,, \end{aligned}$$

on peut écrire que pour tout entier $n > 2$:

$$x_n = \frac{n-1}{n+1}\,x_{n-1} = \frac{(n-1)\cdots 2}{(n+1)\cdots 4}\,x_2 = \frac{10}{n(n+1)}\,.$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

2.99 Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 < x_{n+1} \leq x_n \leq 1$. La suite (x_n) est décroissante et minorée, elle converge.

Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $0 \leq x \leq 1$ et $x = \frac{x\sqrt{\sin x}}{2}$ ou encore $x = 0$.

2.100 Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout entier $n \geq 1 : 1 < x_{n+1} < x_n < x_{n-1}$. La suite (x_n) est strictement décroissante et minorée, elle converge.

Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x \geq 1$ et $x = \sqrt[3]{2x}$ ou encore $x = \sqrt{2}$.

2.101 Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout entier $n \geq 1 : 1 < x_{n+1} < x_n < x_{n-1}$. La suite (x_n) est strictement décroissante et minorée, elle converge.

Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x = \sqrt[3]{x^2+4}$ ou encore $x = 2$.

2.102 1) $|a|<1$. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } 0<b<1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } b=1 \\ 0 & \text{si } b>1. \end{cases}$

2) $a=1$. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

3) $a=-1$. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\left(-1\right)^n}{1+b^n} = \begin{cases} \text{n'existe pas} & \text{si } 0<b\leq 1 \\ 0 & \text{si } b>1. \end{cases}$

4) $|a|>1$. Si $0<b\leq 1$, la suite $\left(x_n\right)$ diverge. Si $b>1$,

$$\forall\, n\in\mathbb{N}:\ x_n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \left(\frac{\dfrac{1}{a^n}-1}{\dfrac{1}{b^n}+1}\right).$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } |a|<b \\ \text{n'existe pas} & \text{si } |a|>b \\ \text{n'existe pas} & \text{si } a=-b \\ -1 & \text{si } a=b. \end{cases}$

2.103 *Rappel* : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{e}-1\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1\,.$$

2.104 1) $a>1$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et posons $c = \sqrt[n+1]{a}$. Alors, puisque $c>1$, on peut écrire

$$c-1 = \left(\sqrt[n]{c}-1\right)\left(1+\sqrt[n]{c}+\cdots+\sqrt[n]{c^{n-1}}\right) < nc\left(\sqrt[n]{c}-1\right).$$

Par conséquent, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $x_{n+1}-x_n = -nc\left(\sqrt[n]{c}-1\right)+(c-1)<0$. Comme de plus $x_1 = a-1 < a = x_0$ et que pour tout entier $n\geq 0$: $x_n>0$, la suite $\left(x_n\right)$ est strictement décroissante et minorée, elle converge.

2) Pour $a=1$, la suite $\left(x_n\right)$ est constante donc convergente. Supposons à présent, que $0<a<1$. Alors, en posant $b=\frac{1}{a}$, on obtient que $b>1$ et que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$x_n = -\frac{1}{\sqrt[n]{b}}\left(n\left(\sqrt[n]{b}-1\right)\right).$$

Ainsi, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b} = 1$, il résulte de 1. que la suite $\left(x_n\right)$ converge.

3) En effet, soit $\alpha,\beta>0$. Alors, pour tout entier $n\geq 1$:

$$n\left(\sqrt[n]{\alpha\beta}-1\right) = \frac{n}{2}\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right)\left(\sqrt[n]{\beta}+1\right)+\frac{n}{2}\left(\sqrt[n]{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[n]{\beta}-1\right);$$

ce qui entraîne, par passage à la limite, que $\ell(\alpha\beta) = \ell(\alpha)+\ell(\beta)$.

$\boxed{\textbf{2.105}}$ *Rappel* : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(2a^x - 1\right)}{x} = \ln a^2$.

$$\lim_{n\to+\infty} n \ln\left(2\sqrt[n]{a} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(2a^{\frac{1}{n}} - 1\right)}{\dfrac{1}{n}} = \ln a^2 \,.$$

Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2\sqrt[n]{a} - 1\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(2\sqrt[n]{a}-1)} = a^2$.

$\boxed{\textbf{2.106}}$ 1) $0 < \alpha \leq 2$. Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 1 \text{ et } \forall\, n \geq 0 :\ 2 < \sqrt[n]{2^n + \alpha^n} \leq 2\sqrt[n]{2}\,,$$

on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2\,.$

2) $\alpha > 2$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ et $\forall\, n \geq 0 : \alpha < \sqrt[n]{2^n + \alpha^n} < \alpha\sqrt[n]{2}$, on peut écrire

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha\,.$$

$\boxed{\textbf{2.107}}$ Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3} = 1$ et $\forall\, n \geq 0 : c < \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} < c\sqrt[n]{3}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = c\,.$$

$\boxed{\textbf{2.108}}$ En posant $y_n = \frac{x_n}{1+x_n}$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N} : x_n = \frac{y_n}{1-y_n}$. D'où

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{\ell}{1-\ell}\,.$$

$\boxed{\textbf{2.109}}$ Posons, pour tout entier $n \geq 0 : y_n = \frac{x_n - \alpha}{x_n + \alpha} \neq 1$ (car $\alpha \neq 0$).

1) $\ell \neq 1$. $\forall\, n \geq 0 :\ x_n = -\alpha\dfrac{y_n + 1}{y_n - 1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\alpha\dfrac{\ell + 1}{\ell - 1}\,.$

2) $\ell = 1$. Montrons que dans ce cas, la suite $\left(x_n\right)$ diverge. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'elle converge vers x. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N} : y_n\left(x_n + \alpha\right) = x_n - \alpha$; on aurait, par passage à la limite, que $x + \alpha = x - \alpha$ ou encore $\alpha = 0$; ce qui est impossible car par hypothèse $\alpha \neq 0$. D'où contradiction.

$\boxed{\textbf{2.110}}$ $\alpha = -1$. La suite $\left(x_n\right)$ diverge. En effet, si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, on aurait $x = x - 1$ ou encore $1 = 0$; ce qui est impossible.

$\alpha \neq -1$. On montre, par un simple raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x_n = \left(-\alpha\right)^n \beta + \alpha\,\frac{1 - (-\alpha)^n}{1 + \alpha}\,.$$

1) $|\alpha| < 1$. $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \dfrac{\alpha}{1+\alpha}$.

2) $\alpha = 1$. $x_n = \begin{cases} \beta & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\beta + 1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

   Par conséquent si $\beta = -\beta + 1$ ou encore $\beta = \frac{1}{2}$, la suite $\big(x_n\big)$ converge sinon elle diverge.

3) $|\alpha| > 1$. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x_n = (-\alpha)^n \left(\beta + \frac{\alpha}{1+\alpha}\left(\frac{1}{(-\alpha)^n} - 1\right)\right)$$

   et

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\beta + \frac{\alpha}{1+\alpha}\left(\frac{1}{(-\alpha)^n} - 1\right)\right) = \beta - \frac{\alpha}{1+\alpha},$$

   on a
   Si $\beta \neq \frac{\alpha}{1+\alpha}$; la suite $\big(x_n\big)$ n'est pas bornée, elle est donc divergente.
   Si $\beta = \frac{\alpha}{1+\alpha}$; $\forall n \geq 1$: $x_n = \dfrac{\alpha}{1+\alpha} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \dfrac{\alpha}{1+\alpha}$.

$\boxed{\textbf{2.111}}$ Pour commencer, on va étudier le nombre exact des racines du polynôme $x^3 - x - b = 0$. Pour cela, considérons la fonction auxiliaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - x - b$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 - 1$, la fonction f est strictement croissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$ et strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Comme de plus

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} - b, \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} - b$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

on peut affirmer que $x^3 - x - b = 0$ admet exactement

$$\begin{cases} \text{3 racines distinctes} & \text{si } -\dfrac{2}{3\sqrt{3}} < b < \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \\ \text{2 racines distinctes} & \text{si } b = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}} \text{ ou } \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \\ \text{1 racine} & \text{si } b \notin \left[-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}, \dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right]. \end{cases}$$

A) $b \notin \left[-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}, \dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right]$. Soit α l'unique solution de $x^3 - x - b = 0$.

1) $a < \alpha$. Dans ce cas, $a^3 - a - b < 0$ et l'on montre, par un simple raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n < x_{n+1} < \alpha$. La suite $\big(x_n\big)$ est strictement croissante et majorée, elle converge.
   Posons $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$. Alors, $x = \sqrt[3]{x+b}$ ou encore $x^3 - x - b = 0$.
   D'où $x = \alpha$.

2) $a = \alpha$. La suite $\big(x_n\big)$ est constante. Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$.

3) $a > \alpha$. Dans ce cas, $a^3 - a - b > 0$ et l'on montre, par un simple raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\alpha < x_{n+1} < x_n$. La suite $\big(x_n\big)$ est strictement décroissante et minorée, elle converge.
Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x = \sqrt[3]{x+b}$ ou encore $x^3 - x - b = 0$.
D'où $x = \alpha$.

B) $b = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.
Alors, l'équation $x^3 - x - b = 0$ admet exactement deux racines distinctes ; à savoir $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $x = \alpha < -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1) $a < \alpha$. Dans ce cas, $a^3 - a - b < 0$ et l'on montre, par un simple raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n < x_{n+1} < \alpha$. La suite $\big(x_n\big)$ est strictement croissante et majorée, elle converge.
Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x = \sqrt[3]{x+b}$ ou encore $x^3 - x - b = 0$.
D'où $x = \alpha$.

2) $a = \alpha$. La suite $\big(x_n\big)$ est constante. Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$.

3) $\alpha < a < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Dans ce cas, $a^3 - a - b > 0$ et l'on montre, par un simple raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\alpha < x_{n+1} < x_n$. La suite $\big(x_n\big)$ est strictement décroissante et minorée, elle converge.
Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x = \sqrt[3]{x+b}$ ou encore $x^3 - x - b = 0$.
D'où $x = \alpha$ car $x \leq x_0 = a < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

4) $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$. La suite $\big(x_n\big)$ est constante. Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

5) $a > \frac{1}{\sqrt{3}}$. Dans ce cas, $a^3 - a - b > 0$ et l'on montre, par un simple raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{\sqrt{3}} < x_{n+1} < x_n$. La suite $\big(x_n\big)$ est strictement décroissante et minorée, elle converge.
Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x = \sqrt[3]{x+b}$ ou encore $x^3 - x - b = 0$.
D'où, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

C) $b = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.
Alors, l'équation $x^3 - x - b = 0$ admet exactement deux racines distinctes ; à savoir $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $x = \alpha > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

1) $a < -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Dans ce cas, $a^3 - a - b < 0$ et l'on montre, par un simple raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n < x_{n+1} < -\frac{1}{\sqrt{3}}$. La suite $\big(x_n\big)$ est strictement croissante et majorée, elle converge.
Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x = \sqrt[3]{x+b}$ ou encore $x^3 - x - b = 0$.
D'où $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2) $a = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. La suite $\big(x_n\big)$ est constante. Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3) $-\frac{1}{\sqrt{3}} < a < \alpha$. Dans ce cas, $a^3 - a - b < 0$ et l'on montre, par un simple raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n < x_{n+1} < \alpha$. La suite (x_n) est strictement croissante et majorée, elle converge.
Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x = \sqrt[3]{x+b}$ ou encore $x^3 - x - b = 0$.
D'où $x = \alpha$ car $x > a > -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4) $a = \alpha$. La suite (x_n) est constante. Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$.

5) $a > \alpha$. Dans ce cas, $a^3 - a - b > 0$ et l'on montre, par un simple raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\alpha < x_{n+1} < x_n$. La suite (x_n) est strictement décroissante et minorée, elle converge.
Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x = \sqrt[3]{x+b}$ ou encore $x^3 - x - b = 0$.
D'où $x = \alpha$.

D) $-\dfrac{2}{3\sqrt{3}} < b < \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.
Alors, l'équation $x^3 - x - b = 0$ admet exactement trois racines distinctes $\alpha < -\frac{1}{\sqrt{3}} < \beta < \frac{1}{\sqrt{3}} < \gamma$

1) $a < \alpha$. Dans ce cas, $a^3 - a - b < 0$ et l'on montre, par un simple raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n < x_{n+1} < \alpha$. La suite (x_n) est strictement croissante et majorée, elle converge.
Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x = \sqrt[3]{x+b}$ ou encore $x^3 - x - b = 0$.
D'où $x = \alpha$.

2) $a = \alpha$. La suite (x_n) est constante. Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$.

3) $\alpha < a < \beta$. Dans ce cas, $a^3 - a - b > 0$ et l'on montre, par un simple raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\alpha < x_{n+1} < x_n$. La suite (x_n) est strictement décroissante et minorée, elle converge.
Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x = \sqrt[3]{x+b}$ ou encore $x^3 - x - b = 0$.
D'où $x = \alpha$ car $x < x_0 = a < \beta$.

4) $a = \beta$. La suite (x_n) est constante. Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \beta$.

5) $\beta < a < \gamma$. Dans ce cas, $a^3 - a - b < 0$ et l'on montre, par un simple raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n < x_{n+1} < \gamma$. La suite (x_n) est strictement croissante et majorée, elle converge.
Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x = \sqrt[3]{x+b}$ ou encore $x^3 - x - b = 0$.
D'où $x = \gamma$ car $x > x_0 = a > \beta$.

6) $a = \gamma$. La suite (x_n) est constante. Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \gamma$.

7) $a > \gamma$. Dans ce cas, $a^3 - a - b > 0$ et l'on montre, par un simple raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\gamma < x_{n+1} < x_n$. La suite (x_n) est strictement décroissante et minorée, elle converge.
Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x = \sqrt[3]{x+b}$ ou encore $x^3 - x - b = 0$.
D'où $x = \gamma$.

2.112 1) Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$y_n - x_n = \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}\big(y_{n-1} - x_{n-1}\big) = \cdots = \left(\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}\right)^n \big(y_0 - x_0\big) > 0\,,$$

on a que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,\big(y_n - x_n\big) > 0 \text{ et } y_{n+1} - y_n = \frac{-\alpha}{\alpha+\beta}\,\big(y_n - x_n\big) < 0\,.$$

2) Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $x_0 < x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n < y_0$. La suite $\big(x_n\big)$ est strictement croissante et majorée tandis que la suite $\big(y_n\big)$ est strictement décroissante et minorée. Ces deux suites sont donc convergentes. De plus, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(y_n - x_n\big) = 0$ (car $0 < \big(\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}\big) < 1$) elles convergent vers la même limite ℓ.

3) En constatant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $x_n + y_n = x_{n-1} + y_{n-1} = \cdots = x_0 + y_0$, on obtient, par passage à la limite, que $2\ell = x_0 + y_0$ ou encore $\ell = \frac{x_0+y_0}{2}$.

2.113 1) En effet, $|\sigma| = \dfrac{|\beta-\alpha|}{(1+\alpha)(1+\beta)} \leq \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+(1+\alpha\beta)} < 1$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n - y_n = \sigma\big(x_{n-1} - y_{n-1}\big) = \cdots = \sigma^n\big(x_0 - y_0\big)\,;$$

ce qui entraîne pour tout entier $n > 0$:

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{\alpha}{1+\alpha}\,\big(x_{n-1} - y_{n-1}\big) = -\frac{\alpha}{1+\alpha}\,\sigma^{n-1}\big(x_0 - y_0\big)\,.$$

3) Ainsi, puisque pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=1}^{n}\big(x_k - x_{k-1}\big) + x_0 = -\frac{\alpha}{1+\alpha}\,\big(x_0 - y_0\big)\sum_{k=1}^{n}\sigma^{k-1} + x_0 \\ &= -\frac{\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{1-\sigma^n}{1-\sigma}\,\big(x_0 - y_0\big) + x_0 \end{aligned}$$

et $|\sigma| < 1$, on obtient

$$x = \lim_{n\to+\infty} x_n = -\frac{\alpha}{(1+\alpha)(1-\sigma)}\,\big(x_0 - y_0\big) + x_0\,;$$

ce qui nous permet aussi d'écrire

$$y = \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty}\big(x_n - \sigma^n(x_0 - y_0)\big) = x\,.$$

2.114 1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et posons $E = \left\{j \in \mathbb{N} : a + (j+1)\dfrac{b-a}{2^n} > x\right\}$.

Puisque $2^n \in E$, E admet un plus petit élément noté k_n. Si $k_n > 0$, on peut écrire

$$a + k_n\frac{b-a}{2^n} \leq x < a + \big(k_n + 1\big)\frac{b-a}{2^n}\,.$$

Si $k_n = 0$, la deuxième inégalité reste valable (définition de k_n) tandis que la première provient de l'hypothèse $a < x$. On a ainsi démontré l'existence de k_n. Reste à montrer son unicité. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux entiers $0 < p < q$ vérifiant cette double inégalité. Alors, $q \geq p+1$ et l'on aurait

$$a + q\frac{b-a}{2^n} \leq x < a + \big(p+1\big)\frac{b-a}{2^n} \leq a + q\frac{b-a}{2^n}\,.$$

D'où contradiction.

2) En effet, il suffit de constater que pour tout entier $n \geq 0 : 0 \leq x - x_n < \dfrac{b-a}{2^n}$.

$\boxed{\textbf{2.115}}$ $n > 0$ pair. $\ln n! = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln k \geq \sum_{k=\frac{n}{2}}^{n} \ln k > \frac{n}{2}\ln\frac{n}{2}$.

$n = 1$. Evident.

$n > 1$ impair.

$$\begin{aligned}\ln n! &= \sum_{k=1}^{n} \ln k \\ &\geq \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n} \ln k > \left(n - \frac{n+1}{2} + 1\right)\ln\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2}\ln\frac{n+1}{2} > \frac{n}{2}\ln\frac{n}{2}\,.\end{aligned}$$

1) $\alpha \leq 1$. Pour commencer, montrons que la suite auxiliaire $\big(y_n = \frac{\ln n!}{n}\big)$ est strictement croissante. En effet, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}y_{n+1} - y_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} \ln k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln k \\ &= \frac{1}{n(n+1)}\left(-\sum_{k=1}^{n} \ln k + n\ln(n+1)\right) > 0\,.\end{aligned}$$

Ainsi, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $x_n = n^{1-\alpha}y_n$, la suite $\big(x_n\big)$ est aussi strictement croissante. De plus, elle n'est pas majorée car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x_n = \frac{\ln n!}{n^\alpha} > \frac{n^{1-\alpha}}{2}\ln\frac{n}{2}\,.$$

2) $\alpha > 1$. Puisque, pour tout entier $n \geq 1$:

$$0 \leq x_n = \frac{\ln n!}{n^\alpha} \leq \frac{n\ln n}{n^\alpha} = \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}} \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} = 0\,,$$

on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

$\boxed{\textbf{2.116}}$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, à chaque entier $n \geq 0$, on peut associer un rationnel a_n et un irrationnel b_n tels que $x < a_n$, $b_n < x + \frac{1}{n}$. Par construction, ces deux suites convergent vers x.

2.117 Soit $\varepsilon > 0$.

$$\lim_{n\to+\infty} x_{2n} = \ell \Rightarrow \exists\, n_1 > 0 \text{ tel que } \forall\, n \geq n_1 :\ \big|x_{2n} - \ell\big| \leq \varepsilon$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} x_{2n+1} = \ell \Rightarrow \exists\, n_2 > 0 \text{ tel que } \forall\, n \geq n_2 :\ \big|x_{2n+1} - \ell\big| \leq \varepsilon\,.$$

Ainsi, en posant $n_\varepsilon = \max\{2n_1, 2n_2+1\}$, on peut écrire que pour tout entier $n \geq n_\varepsilon$: $\big|x_n - \ell\big| \leq \varepsilon$. Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell\,.$$

2.118 Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N} : 1 \leq x_{2n} < x_{2n+2} < x_{2n+3} < x_{2n+1} \leq 2$. La sous-suite $\big(x_{2n}\big)$ est strictement croissante et majorée tandis que la sous-suite $\big(x_{2n+1}\big)$ est décroissante et minorée. Ces deux sous-suites convergent.

Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n} = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n+1} = b$. Alors,

$$1 \leq a\,,\ b \leq 2\,,\ \ a = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a}} \text{ et } b = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{b}} \ \ \Rightarrow a = b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Par conséquent, en utilisant l'exercice précédent, on sait que la suite $\big(x_n\big)$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

2.119 Si la suite $\big(x_n\big)$ n'est pas majorée, on obtient, en posant $n_0 = 0$ et pour chaque entier $p \geq 0$: $n_{p+1} = \min\big\{n \in \mathbb{N} : n > n_p,\ x_n > x_{n_p}\big\}$, que la sous-suite $\big(x_{n_p}\big)$ est strictement croissante.

Si la suite $\big(x_n\big)$ n'est pas minorée, on obtient, en posant $n_0 = 0$ et pour chaque entier $p \geq 0$:

$$n_{p+1} = \min\big\{n \in \mathbb{N} : n > n_p,\ x_n < x_{n_p}\big\}\,,$$

que la sous-suite $\big(x_{n_p}\big)$ est strictement décroissante.

Supposons à présent, que la suite $\big(x_n\big)$ est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on sait que de la suite $\big(x_n\big)$ on peut extraire une sous-suite $\big(x_{n_k}\big)$ qui converge.

Posons $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = \ell$. Alors, au moins un de ces trois sous-ensembles

$$E_1 = \big\{k \in \mathbb{N} : x_{n_k} = \ell\big\} \text{ ou } E_2 = \big\{k \in \mathbb{N} : x_{n_k} > \ell\big\} \text{ ou } E_3 = \big\{k \in \mathbb{N} : x_{n_k} < \ell\big\}$$

contient une infinité d'entiers naturels. (*Rappel* : la suite $\big(n_k\big)$ est strictement croissante.)

1) Pour commencer, supposons que ce soit E_1. Alors, en prenant pour k_0 le plus petit élément de E_1 et en posant pour chaque entier $j > 0$:

$$k_{j+1} = \min\bigl\{q \in E_1 : q > k_j\bigr\}\,,$$

on obtient que la sous-suite $\bigl(x_{n_{k_j}}\bigr)$ est constante.

2) Supposos à présent que ce soit E_2. Alors, en prenant pour k_0 le plus petit élément de E_2 et en posant pour chaque entier $j > 0$:

$$k_{j+1} = \min\bigl\{q \in E_2 : q > k_j,\ x_{n_q} < x_{n_{k_j}}\bigr\}\,,$$

on obtient que la sous-suite $\bigl(x_{n_{k_j}}\bigr)$ est strictement décroissante.

3) Pour terminer, supposons que ce soit E_3. Alors, en prenant pour k_0 le plus petit élément de E_3 et en posant pour chaque entier $j > 0$:

$$k_{j+1} = \min\bigl\{q \in E_3 : q > k_j,\ x_{n_q} > x_{n_{k_j}}\bigr\}\,,$$

on obtient que la sous-suite $\bigl(x_{n_{k_j}}\bigr)$ est strictement croissante.

2.120 1) Puisque $\bigl(x_n\bigr)$ est une suite de nombres réels positifs, on a ou bien $\ell > 0$ ou bien $\ell = 0$. Pour commencer, on va supposer que $\ell > 0$ et soit $\varepsilon > 0$ vérifiant $\ell - \varepsilon > 0$. Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell\,,$$

il existe un entier $m > 0$ tel que pour tout $n > m$:

$$\bigl(\ell-\varepsilon\bigr)^{n-m} x_m \leq \ldots \leq \bigl(\ell-\varepsilon\bigr)x_{n-1} \leq x_n \leq \bigl(\ell+\varepsilon\bigr)x_{n-1} \leq \ldots \leq \bigl(\ell+\varepsilon\bigr)^{n-m} x_m$$

ou encore

$$\sqrt[n]{\frac{x_m}{\bigl(\ell-\varepsilon\bigr)^m}}\,\bigl(\ell-\varepsilon\bigr) \leq \sqrt[n]{x_n} \leq \sqrt[n]{\frac{x_m}{\bigl(\ell+\varepsilon\bigr)^m}}\,\bigl(\ell+\varepsilon\bigr)\,.$$

D'autre part, comme

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{x_m}{\bigl(\ell-\varepsilon\bigr)^m}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{x_m}{\bigl(\ell+\varepsilon\bigr)^m}} = 1\,,$$

il existe un entier $k > m$ tel que pour tout $n \geq k$:

$$\sqrt[n]{\frac{x_m}{\bigl(\ell-\varepsilon\bigr)^m}} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{\ell-\varepsilon} \text{ et } \sqrt[n]{\frac{x_m}{\bigl(\ell+\varepsilon\bigr)^m}} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{\ell+\varepsilon}\,.$$

Finalement, pour tout entier $n \geq k$, on a $\ell - 2\varepsilon \leq \sqrt[n]{x_n} \leq \ell + 2\varepsilon$.
Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell$. Le cas $\ell = 0$ se traite de la même façon en partant de la double inégalité $0 \leq x_n \leq \varepsilon x_{n-1}$.

2) Non. Contre-exemple : $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2}$.

3) Prendre $x_n = \frac{n^n}{n!}$. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e\,.$$

2.121 1) Puisque (x_n) est bornée, il existe $M > 1$ tel que pour tout entier $k \geq 1$: $|x_k| \leq M$. Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\sqrt[k]{|x_k|} \leq \sqrt[k]{M}$.

(*Rappel* : la suite $(\sqrt[k]{M})$ est strictement décroissante et converge vers 1.)

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sup\{\sqrt[k]{|x_k|} : k \geq n\} \leq \sqrt[n]{M}$, ce qui donne, par passage à la limite, que

$$\lim_{n\to+\infty} \sup \sqrt[n]{|x_n|} \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{M} = 1\,.$$

2) Prenons $\rho < \sigma < 1$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup \sqrt[n]{|x_n|} = \rho$, il existe un entier $m > 0$ tel que pour tout entier $n \geq m$: $\sqrt[n]{|x_n|} < \sigma$ ou encore $|x_n| < \sigma^n$. D'où

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0\,.$$

3) Si $\rho = 1$, on ne peut rien conclure a priori. En effet,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup \sqrt[n]{1} = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \sup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

mais $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2.122 Non. En effet, en prenant $0 < a < b < 1$ et en posant

$$x_n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ b^n & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup \sqrt[n]{|x_n|} = b < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{2n+1}}{x_{2n}}\right| = +\infty$.

2.123 Si la suite (x_n) n'est pas majorée, on peut en extraire une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers $+\infty$ et, par définition, $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Supposons à présent que la suite (x_n) est majorée et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$y_n = \sup\{x_k : k \geq n\}\,.$$

Alors, à chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$, on peut associer un entier $p(n) \geq n$ tel que

$$y_n - \frac{1}{n} < x_{p(n)} \leq y_n\,.$$

Ainsi, en posant pour tout entier $k > 0$:

$$n_{k+1} = p(n_k + 1) \text{ et } n_1 = 1\,,$$

la suite récurrente $\big(n_k\big)$ est strictement croissante et de plus

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} y_{n_k} = \limsup_{n\to+\infty} x_n\,.$$

$\boxed{\mathbf{2.124}}$ Soit $\varepsilon > 0$. D'une part, puisque $l \neq 0$, il existe $b > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\big|x_n\big| \geq b$. D'autre part, la suite $\big(x_n\big)$ étant de Cauchy, il existe un entier $n_\varepsilon \geq 0$ tel que pour tout couple d'entiers $n > m \geq n_\varepsilon$:

$$\big|x_n - x_m\big| \leq b\,\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x_n}{x_m} - 1\right| \leq \frac{b\,\varepsilon}{\big|x_m\big|} \leq \varepsilon\,;$$

ce qui entraîne pour tout entier $m \geq n_\varepsilon$:

$$\big|\ell_m - 1\big| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_n}{x_m} - 1\right| \leq \varepsilon\,.$$

$\boxed{\mathbf{2.125}}$ Pour commencer, on remarquera, grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass, que $E \neq \emptyset$ et posons

$$\alpha = \sup E \text{ et } \beta = \lim_{n\to+\infty} \sup x_n\,.$$

Alors, $\beta \leq \alpha$ car de la suite $\big(x_n\big)$, on peut extraire une sous-suite qui converge vers β.

Montrons à présent l'inégalité inverse. En effet,

1) Posons pour tout entier $n \geq 0$:

$$y_n = \sup\big\{x_k : k \geq n\big\}\,.$$

Par définition, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \beta$.

2) Il existe une suite $\big(\alpha_p\big)$ d'éléments de E qui converge vers α.

3) A chaque entier $p \geq 0$ fixé, on peut associer une sous-suite $\big(x_{p_j}\big)$ de $\big(x_n\big)$ qui converge vers α_p.

Ainsi, en constatant que pour tout couple $\big(p, j\big) \in \mathbb{N}^2$: $y_{p_j} \geq x_{p_j}$, on a

$$\left(\forall\, p \in \mathbb{N} : \beta = \lim_{j\to+\infty} y_{p_j} \geq \lim_{j\to+\infty} x_{p_j} = \alpha_p\right) \Rightarrow \beta \geq \lim_{p\to+\infty} \alpha_p = \alpha\,.$$

$\boxed{\mathbf{2.126}}$ 1) Puisque pour tout entier $n \geq 0$: $a_0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_0$, la suite $\big(a_n\big)$ est croissante et majorée, elle converge vers $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

tandis que la suite $\big(b_n\big)$ est décroissante et minorée, elle converge vers $b = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. De plus, il découle de la définition de a et b que

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} I_n = [a, b] \,.$$

On remarquera que si $\lim\limits_{n \to +\infty} \big(b_n - a_n\big) = 0$, on a $a = b$.

2) D'une manière générale, ce résultat est faux si les I_n sont des intervalles ouverts. Comme contre-exemple, il suffit de prendre $I_n = \big]0, \frac{1}{e^n}\big[$.

2.127 1) Soit $\big(a_n\big)$ une suite d'éléments de $[0, 1]$. Pour commencer, on divise $[0, 1]$ en trois intervalles fermés de même longueur $\frac{1}{3}$ $\big([0, \frac{1}{3}], [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ et $[\frac{2}{3}, 1]\big)$ et l'on désigne par I_0 un de ces trois intervalles qui ne contient pas a_0. On recommence en divisant I_0 de nouveau en trois intervalles fermés de même longueur $\frac{1}{3^2}$ et on désigne par I_1 un de ces trois intervalles qui ne contient pas a_1 et ainsi de suite. Par construction, pour tout entier $n \geq 0$:

$$I_{n+1} \subset I_n \subset [0, 1] \,.$$

Par conséquent, le principe des intervalles emboîtés (ex. précédent) nous permet d'écrire

$$E = \bigcap_{n=0}^{+\infty} I_n \neq \emptyset \,.$$

Finalement, puisque pour tout entier $n \geq 0 : a_n \notin I_n$, on a $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cap E = \emptyset$; ce qui entraîne, E étant inclus dans $[0, 1]$, que

$$[0, 1] \neq \big\{a_n : n \in \mathbb{N}\big\} \,.$$

Remarque : Une des conséquences de ce résultat est que l'intervalle fermé $[0, 1]$ n'est pas dénombrable et a fortiori $\mathbb{R}$ non plus.

2) On peut prendre la fonction bijective $f : [0, 1] \to]0, 1[$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+2} & \text{si } x = \frac{1}{n} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^* \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nombres complexes

3.1 $\overline{z} = 1 + i$, $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = -\dfrac{\pi}{4}$ et $z^{-1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}$.

3.2 Puisque $z = (-2\cos a)\, e^{i\left(a - \frac{\pi}{2}\right)}$,
on a $|z| = -2\cos a$ et $\arg z = a - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.3 $(2+i)(3+i) = 5\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow (2+i)^8\,(3+i)^8 = 16 \cdot 5^8 = 6\,250\,000$.

3.4 $\left(\sqrt{3} - i\right)^{28} + \left(\sqrt{3} + i\right)^{28} = \left(2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}\right)\right)^{28} + \left(2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right)\right)^{28}$

$= 2^{28}\left(\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^{28} + \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{28}\right)$

$= 2^{28}\left(e^{-i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = 2^{29}\cos\dfrac{2\pi}{3} = -2^{28}$.

3.5 $0 = z^3 + 1 = (z+1)\big(z^2 - z + 1\big)$
$\Rightarrow 0 = z^2 - z + 1 = z(z-1) + 1 \Rightarrow z(z-1) = -1 \Rightarrow \big(z(z-1)\big)^{-2} = 1$.

3.6 Posons $z = x + iy$. Alors,

$$\begin{aligned} |z| - 9i = 3x - z &\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2x\right) + i\,(y - 9) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3\sqrt{3} \text{ et } y = 9 \end{aligned}$$

3.7 Posons $z = x + iy$. Alors,

$$\begin{aligned} |z - 1| = \sqrt{2}\,|z - 2| &\Leftrightarrow \big(x-1\big)^2 + y^2 = 2\big(x-2\big)^2 + 2y^2 \\ &\Leftrightarrow \big(x-3\big)^2 + y^2 = 2 \end{aligned}$$

(équation du cercle de centre $(3, 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$).

3.8 $z = 2i$.

3.9 $z^2 + z + 1 = \left(z + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} = \left(z + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= \left(z + \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow z = -\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3.10 $z^2+2z+5=\big(z+1\big)^2+4=\big(z+1\big)^2-\big(2i\big)^2$
$$=(z+1-2i)(z+1+2i)=0\Leftrightarrow z=-1\pm 2i\,.$$

3.11 $4z^2+2z+1=4\left(\left(z+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{3}{16}\right)$
$$=4\left(z+\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(z+\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=0\Leftrightarrow z=-\frac{1}{4}\pm i\frac{\sqrt{3}}{4}\,.$$

3.12 $z^2+2z+i=(z+1)^2-1+i=0$
$\Leftrightarrow (z+1)^2=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\Leftrightarrow z=-1+\sqrt[4]{2}\,e^{i(-\frac{\pi}{8}+k\pi)}\,,\ k=0,1\,.$

3.13 $z^3-z-6=(z-2)\big(z^2+2z+3\big)$
$$=(z-2)\left(z+1-i\sqrt{2}\right)\left(z+1+i\sqrt{2}\right)=0\Leftrightarrow z=2 \text{ ou } -1\pm i\sqrt{2}\,.$$

3.14 $z^3-4z^2+6z-4=(z-2)\big(z^2-2z+2\big)$
$$=(z-2)(z-1-i)(z-1+i)=0$$
$\Leftrightarrow z=2$ ou $1\pm i\,.$

3.15 $2z^3+14\,z^2+41\,z+68=2(z+4)\left(z^2+3z+\dfrac{17}{2}\right)$
$$=2(z+4)\left(z+\frac{3}{2}-i\frac{5}{2}\right)\left(z+\frac{3}{2}+i\frac{5}{2}\right)=0\Leftrightarrow z=-4 \text{ ou } -\frac{3}{2}\pm i\frac{5}{2}\,.$$

3.16 Posons $\theta=\operatorname{Arctg}\frac{1}{2}$. Alors
$$z^4=2+i=\sqrt{5}\,e^{i\theta}\Leftrightarrow z=\sqrt[8]{5}\,e^{i(\frac{\theta}{4}+k\frac{\pi}{2})}\,,\ k=0,1,2,3\,.$$

3.17 Posons $P(z)=z^4-2z^3+6z^2-2z+5$. Ainsi, en constatant que $P(i)=0$, on a aussi, les coefficients de ce polynôme étant réels, $P(-i)=0$; ce qui entraîne que $P(z)$ est divisible par $(z-i)(z+i)=z^2+1$. Par conséquent
$$P(z)=(z^2+1)(z^2-2z+5)=0\Leftrightarrow z=\pm i \text{ ou } 1\pm 2i\,.$$

3.18 $z^6+i=0\Leftrightarrow z^6=-i=e^{i\frac{3\pi}{2}}\Leftrightarrow z=e^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{3})}$, $k=0,1,2,3,4,5.$

3.19 Puisque $z^4+1=0\Leftrightarrow z_k=e^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})}$, $k=0,1,2,3$ et
$$z_0=\overline{z_3}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\quad z_1=\overline{z_2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$
on a
$$z^4+1=\left(z^2-\sqrt{2}z+1\right)\left(z^2+\sqrt{2}z+1\right).$$
Par conséquent
$$\begin{aligned}P(x)&=x^7+x^5+x^3+x=x(x^2+1)(x^4+1)\\&=x(x^2+1)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right).\end{aligned}$$

3.20 $\forall\, z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq 1$:

$$z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1 - z^9}{1 - z}\,.$$

Par conséquent

$$z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = e^{ik\frac{2\pi}{9}}\,, \quad k = 1, \ldots, 8.$$

3.21 Posons $P(z) = z^4 - 2z^3 - z^2 + 2z + 10$. Alors, puisque $P(z)$ est un polynôme à coefficients réels, on a

$$P(2 + i) = 0 \Rightarrow P(2 - i) = 0\,.$$

Par conséquent $P(z)$ est divisible par $(z - 2 - i)(z - 2 + i) = z^2 - 4z + 5$. D'où

$$\begin{aligned} P(z) &= \big(z^2 - 4z + 5\big)\big(z^2 + 2z + 2\big) \\ &= (z - 2 - i)(z - 2 + i)(z + 1 - i)(z + 1 + i) = 0 \Leftrightarrow z = 2 \pm i \text{ ou } -1 \pm i\,. \end{aligned}$$

3.22 $$\begin{aligned} z^3 + \left(\sqrt{3} - i\right) z^2 + \left(1 - i\sqrt{3}\right) z - i &= (z - i)\left(z^2 + \sqrt{3}z + 1\right) \\ &= (z - i)\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \Leftrightarrow z = i \text{ ou } -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}\,. \end{aligned}$$

3.23 En effet, il suffit d'écrire

$$z^2 + 2az + a(2 - b) + \ln a = \big(z + a\big)^2 + \big(\ln a + 2a - a^2 - ab\big)\,.$$

3.24 Désignons par a, b et c les trois racines du polynôme $P(z)$ avec $a = b + c$. Alors,

$$\begin{aligned} \forall\, z \in \mathbb{C} \,:\; P(z) = z^3 - 12\, z^2 + \alpha z - 150 &= (z - a)(z - b)(z - c) \\ &= (z - a)\big(z^2 - (b + c)z + bc\big) = z^3 - 2az^2 + \big(a^2 + bc\big)z - abc \\ &\Leftrightarrow -2a = -12\,,\;\; \alpha = a^2 + bc \text{ et } abc = 150 \\ &\Leftrightarrow a = 6\,,\;\; bc = 25 \text{ et } \alpha = 61\,. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $b + c = 6$ et $bc = 25$, b et c sont les deux racines du trinôme $z^2 - 6z + 25 = (z - 3)^2 - (4i)^2 = (z - 3 - 4i)(z - 3 + 4i)$. Par conséquent les trois racines du polynôme $P(z)$ sont

$$a = 6\,,\;\; b = 3 - 4i \text{ et } c = 3 + 4i\,.$$

3.25 $\dfrac{z - 2}{z - 1} = z \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = \big(z - 1\big)^2 + 1 = (z - 1 - i)(z - 1 + i) = 0$
$\Leftrightarrow z = 1 \pm i\,.$

3.26 $\dfrac{z + i}{z + 1} = z + 2i \Leftrightarrow z^2 + 2iz + i = \big(z + i\big)^2 + \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = 0$
$\Leftrightarrow \big(z + i\big)^2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}} \Leftrightarrow z = -i + \sqrt[4]{2}\, e^{i(\frac{5\pi}{8} + k\pi)}\,,\; k = 0, 1\,.$

3.27 $\left(\dfrac{z^2+2z+5}{z-1}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow z^2+z+6=0$ ou $z^2+3z+4=0$

$\Leftrightarrow z = -\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{23}}{2}$ ou $-\dfrac{3}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

3.28 $(1-z)^6 = (1+z)^6$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^6 = 1 \Leftrightarrow \frac{1-z}{1+z} = e^{ik\frac{\pi}{3}},\ \ k=0,\dots,5$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1-e^{ik\frac{\pi}{3}}}{1+e^{ik\frac{\pi}{3}}},\ \ k = \ 1,\,2,\,4,\,5.$$

3.29 Puisque

$$z^4+1=0 \Leftrightarrow z^4 = -1 = e^{i\pi} \Leftrightarrow z = e^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})},\ k=0,1,2,3$$

et que les deux racines $e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2})}$ sont complexes conjugués de même que $e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})}$ et $e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi)}$, on peut écrire que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z^4+1 = \left(z^2-\sqrt{2}z+1\right)\left(z^2+\sqrt{2}z+1\right).$$

En particulier, si $x \in \mathbb{R}$: $x^4+1 = \left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)$.

3.30 Puisque

$$z^6+1=0 \Leftrightarrow z^6 = -1 = e^{i\pi} \Leftrightarrow z = e^{i(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3})},\ k=0,1,2,3,4,5$$

et que les deux racines $e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{3})}$ sont complexes conjugués de même que $e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $e^{i\frac{3\pi}{2}}$ et que $e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})}$ et $e^{i(\frac{\pi}{6}+\pi)}$, on peut écrire que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z^6+1 = \left(z^2+1\right)\left(z^2-\sqrt{3}z+1\right)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right).$$

En particulier, si $x \in \mathbb{R}$: $x^6+1 = \left(x^2+1\right)\left(x^2-\sqrt{3}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{3}x+1\right)$.

3.31 Puisque

$$z^3+(3-i)z^2+(2-3i)z-2i = (z-i)(z+1)(z+2)$$

et

$$z^3+(1+i)z^2+(2+i)z+2 = (z-i)(z+2i)(z+1),$$

les solutions du système sont $z=-1$ ou i.

3.32 $z_1 = 3+2i$ et $z_2 = -1+i$.

$\boxed{\mathbf{3.33}}$ *Rappels :* $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.
a et b sont solutions du système proposé si et seulement si a et b sont les deux racines du binôme $z^2-2z-i=0$ ou du binôme $z^2-2z+i=0$. Ainsi, puisque

$$\begin{aligned} z^2-2z-i &= (z-1)^2 - \left(\sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1} + i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right) \\ z^2-2z+i &= (z-1)^2 - \left(\sqrt[4]{2}\,e^{-i\frac{\pi}{8}}\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1} - i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right), \end{aligned}$$

on a $(a,b) =$

$$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right), 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\right)$$
$$\text{ou } \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right), 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\right)$$
$$\text{ou } \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}-i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right), 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}-i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\right)$$
$$\text{ou } \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}-i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right), 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}-i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\right).$$

$\boxed{\mathbf{3.34}}$ $z = x+iy \neq i$. $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z^2}{i-z}\right) = \dfrac{2xy(1-y) - x\big(x^2-y^2\big)}{x^2+\big(1-y\big)^2}$.

$\boxed{\mathbf{3.35}}$ 1) En effet, $\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2} = \dfrac{(z_1+z_2)\big(\overline{z_1-z_2}\big)}{|z_1-z_2|^2} = \dfrac{|z_1|^2-|z_2|^2}{|z_1-z_2|^2} - 2i\dfrac{\mathrm{Im}\big(z_1\overline{z_2}\big)}{|z_1-z_2|^2}$.
2) Il suffit de constater que

$$|z_1-z_2|^2 = (z_1-z_2)\big(\overline{z_1-z_2}\big) = r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)$$

et d'utiliser l'égalité obtenue sous 1).

$\boxed{\mathbf{3.36}}$ $z = re^{i\theta} \neq 0$.

$$\mathrm{Re}\left(z-\frac{1}{z}\right) = \left(r-\frac{1}{r}\right)\cos\theta \text{ et } \mathrm{Im}\left(z-\frac{1}{z}\right) = \left(r+\frac{1}{r}\right)\sin\theta\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.37}}$ $z = e^{i\theta}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule de Moivre, on a

$$z^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin\theta \text{ et } \frac{1}{z^n} = e^{-in\theta} = \cos n\theta - i\sin n\theta\,.$$

Par conséquent $z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta$ et $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$.

3.38 $\left(\dfrac{z}{z-2}\right)^n = i \Rightarrow 1 = \left|\left(\dfrac{z}{z-2}\right)^n\right| = \left|\dfrac{z}{z-2}\right|^n \Rightarrow |z| = |z-2|.$

Cette égalité revient à dire que le point $\mathrm{P}_z = (x, y)$ d'affixe z est équidistant des deux points $\mathrm{O} = (0,0)$ et $\mathrm{A} = (2,0)$. D'où $x = \mathrm{Re}(z) = 1$.

3.39 $\forall\, n \geq 0 : \left|a^n b\right| = 12\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left|a^n b\right| = 0.$

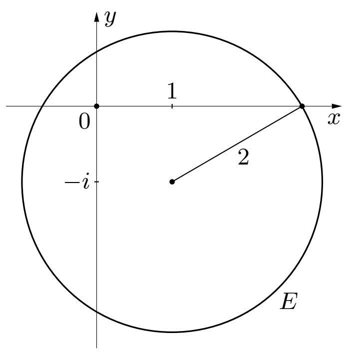
3.40 Pour démontrer 1) et 3), il suffit de constater qu'en écrivant $z_1 = \left|z_1\right| e^{i\theta_1}$ et $z_2 = \left|z_2\right| e^{i\theta_2}$:

$$\begin{aligned}\left|z_1+z_2\right|^2 &= \left(\left|z_1\right|\cos\theta_1 + \left|z_2\right|\cos\theta_2\right)^2 + \left(\left|z_1\right|\sin\theta_1 + \left|z_2\right|\sin\theta_2\right)^2 \\ &= \left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 + 2\left|z_1\right|\left|z_2\right|\cos\left(\theta_1-\theta_2\right).\end{aligned}$$

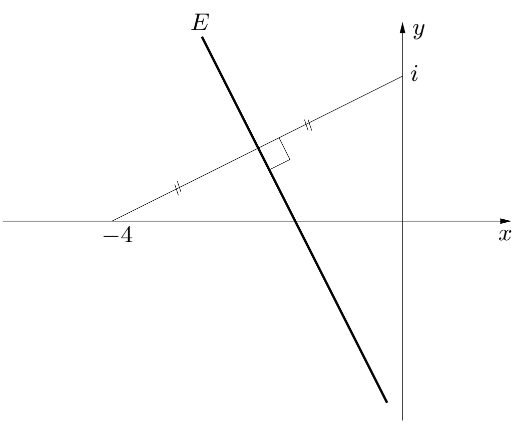
Pour établir 2), il suffit d'utiliser deux fois l'inégalité triangulaire :

$$\left.\begin{aligned}|z_1| &= \left|z_2 + \left(z_1 - z_2\right)\right| \leq |z_2| + |z_1 - z_2| \\ |z_2| &= \left|z_1 + \left(z_2 - z_1\right)\right| \leq |z_1| + |z_1 - z_2|\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left||z_1| - |z_2|\right| \leq |z_1 - z_2|\,.$$

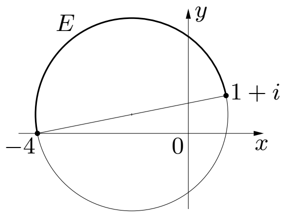
3.41



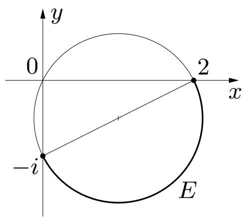
3.42



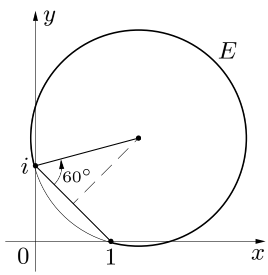
3.43



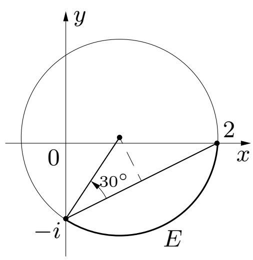
3.44



3.45



3.46



3.47 $z_{\mathrm{B}} = e^{i\frac{\pi}{3}} z_{\mathrm{A}} = \left(2 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\dfrac{3}{2} + 2\sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow \mathrm{B} = \left(2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\,,\ \frac{3}{2} + 2\sqrt{3}\right)$

ou

$z_{\mathrm{B}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} z_{\mathrm{A}} = \left(2 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\dfrac{3}{2} - 2\sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow \mathrm{B} = \left(2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} - 2\sqrt{3}\right).$

$\boxed{\mathbf{3.48}}$ $z_{\mathrm{B}} = z_{\mathrm{A}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} \big(z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}\big) = \dfrac{5}{2} - i\dfrac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{B} = \left(\dfrac{5}{2}\,, \dfrac{-1}{2}\right)$

et

$z_{\mathrm{D}} = z_{\mathrm{A}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \big(z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}\big) = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{D} = \left(\dfrac{1}{2}\,, \dfrac{1}{2}\right).$

$\boxed{\mathbf{3.49}}$ $z_{\mathrm{C}} = z_{\mathrm{B}} + e^{i\frac{\pi}{2}} \big(z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}}\big) = 4 + 2i \Rightarrow \mathrm{C} = (4, 2)$

ou

$z_{\mathrm{C}} = z_{\mathrm{B}} + e^{-i\frac{\pi}{2}} \big(z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}}\big) = 4i \Rightarrow \mathrm{C} = (0, 4)\,.$

$\boxed{\mathbf{3.50}}$ $z_{\mathrm{C}} = z_{\mathrm{A}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \big(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}\big) = \dfrac{3}{2} - i\dfrac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{C} = \left(\dfrac{3}{2}\,, \dfrac{-1}{2}\right)$

ou

$z_{\mathrm{C}} = z_{\mathrm{A}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} \big(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}\big) = \dfrac{7}{2} + i\dfrac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{C} = \left(\dfrac{7}{2}\,, \dfrac{1}{2}\right).$

$\boxed{\mathbf{3.51}}$ Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, en utilisant la formule de Moivre, on a

$$\begin{aligned}\cos 5\theta + i \sin 5\theta &= \big(\cos\theta + i\sin\theta\big)^5 \\ &= \cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta - 10\,i\cos^2\theta\sin^3\theta \\ &\quad + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta.\end{aligned}$$

D'où

$$\sin 5\theta = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta$$

et

$$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.52}}$ Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et posons $z = e^{i\theta}$. Alors, en utilisant l'exercice 3.37, on a

$$\begin{aligned}2^5 i\sin^5\theta &= \left(z - \frac{1}{z}\right)^5 = z^5 - 5z^3 + 10\,z - 10\frac{1}{z} + 5\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^5} \\ &= \left(z^5 - \frac{1}{z^5}\right) - 5\left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right) + 10\left(z - \frac{1}{z}\right) \\ &= 2i\sin 5\theta - 10\,i\sin 3\theta + 20\,i\sin\theta\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}2^5\cos^5\theta &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^5 = z^5 + 5z^3 + 10\,z + 10\frac{1}{z} + 5\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^5} \\ &= \left(z^5 + \frac{1}{z^5}\right) + 5\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + 10\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ &= 2\cos 5\theta + 10\cos 3\theta + 20\cos\theta\,.\end{aligned}$$

D'où

$$\sin^5\theta = \frac{1}{16}\,\sin 5\theta - \frac{5}{16}\,\sin 3\theta + \frac{5}{8}\,\sin\theta$$

et

$$\cos^5\theta = \frac{1}{16}\,\cos 5\theta + \frac{5}{16}\,\cos 3\theta + \frac{5}{8}\,\cos\theta\,.$$

3.53 Soit $\theta \neq 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule de Moivre et celle de la somme d'une progression géométrique, on a (exercices 1.16 et 1.17) :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta + i \sum_{k=0}^{n} \sin k\theta = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k \\
&= \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{1}{2}\left(1 + i \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}\right)\left(1 - e^{i(n+1)\theta}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \cos(n+1)\theta + \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} \sin(n+1)\theta\right) \\
&\quad + \frac{i}{2}\left(\left(1 - \cos(n+1)\theta\right) \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} - \sin(n+1)\theta\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}\right) + \frac{i}{2}\left(\operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} - \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}\right).
\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{n} \sin k\theta = \frac{1}{2}\left(\operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} - \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}\right)$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}\right).$$

3.54 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Soit $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Alors, en utilisant la formule de Moivre et celle du binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned}
&\cos(2n+1)t + i \sin(2n+1)t = \left(\cos t + i \sin t\right)^{2n+1} \\
&= \sin^{2n+1} t\left(\operatorname{cotg} t + i\right)^{2n+1} = \sin^{2n+1} t \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k \operatorname{cotg}^{(2n+1)-k} t.
\end{aligned}$$

D'où $\dfrac{\sin(2n+1)t}{\sin^{2n+1} t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} \operatorname{cotg}^{2(n-k)} t$.

2) D'après cette dernière égalité, les n racines du polynôme $P(x)$ sont

$$x_k = \operatorname{cotg}^2 \frac{k\pi}{2n+1}, \ k = 1, \ldots, n.$$

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotg}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{n(2n-1)}{3}.$

4) Soit $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. $0 < \sin^2\theta < \theta^2 < \operatorname{tg}^2\theta \Rightarrow \operatorname{cotg}^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \operatorname{cotg}^2\theta$.

5a) En utilisant l'égalité obtenue sous 3) et la double inégalités ci-dessus, on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{n(2n-1)}{3} &= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotg}^2\frac{k\pi}{2n+1}\\ &< \frac{\big(2n+1\big)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^{n}\left(1+\operatorname{cotg}^2\frac{k\pi}{2n+1}\right) = n + \frac{n(2n-1)}{3}\end{aligned}$$

ou encore

$$\frac{n(2n-1)\pi^2}{3\big(2n+1\big)^2} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{\big(2n+1\big)^2}\left(n+\frac{n(2n-1)}{3}\right)\ ;$$

ce qui donne, par passage à la limite, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5b) On va supposer que $n \geq 2$. Alors, en utilisant de nouveau 3) et 4), on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cotg}^4\frac{k\pi}{2n+1} &= \left(\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cotg}^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2 - 2\sum_{p\neq q=1}^{n} x_p x_q\\ &= \frac{n^2\big(2n-1\big)^2}{9} - 2\frac{\binom{2n+1}{5}}{\binom{2n+1}{1}}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cotg}^4\frac{k\pi}{2n+1} &< \frac{(2n+1)^4}{\pi^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4} < \sum_{k=1}^{n}\left(1+\operatorname{cotg}^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2\\ &< n + \frac{2n(2n-1)}{3} + \frac{n(2n-1)(4n^2+10\,n-9)}{45}\,.\end{aligned}$$

Par conséquent pour tout entier $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}&\frac{n(2n-1)(4n^2+10\,n-9)\pi^4}{45\,(2n+1)^4}\\ &\quad< \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4} < \frac{\pi^4}{(2n+1)^4}\left(n+\frac{2n(2n-1)}{3}+\frac{n(2n-1)(4n^2+10\,n-9)}{45}\right),\end{aligned}$$

ce qui donne, par passage à la limite que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

3.55 1a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors, en utilisant les formules de Moivre et du polynôme de Newton, on a

$$\begin{aligned}\cos(2n+1)t + i\sin(2n+1)t &= (\cos t + i\sin t)^{2n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k \sin^k t \cos^{2n+1-k} t\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\sin(2n+1)t &= \sin t \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} \sin^{2k} t \left(1 - \sin^2 t\right)^{n-k} \\ &= P_n(\sin^2 t)\sin t\,.\end{aligned}$$

1b) Puisque les n racines $t_k = \frac{k\pi}{2n+1}$, $k = 1, \ldots, n$ de la fonction $\sin(2n+1)t$ appartiennent tous à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, de 1), on déduit immédiatement que le polynôme $P_n(x)$ (de degré n) admet exactement n racines distinctes, à savoir :

$$x_k = \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}\,, \quad k = 1, \ldots, n\,;$$

ce qui entraîne pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$P_n(s) = c\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{s}{x_k}\right)$$

où c est une constante. De plus,

$$c = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \cdot \frac{1}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2 t}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}\right)}\right) = 2n+1.$$

Finalement, en prenant $t = \frac{x}{2n+1}$, on obtient

$$\begin{aligned}\sin x &= P_n\left(\sin^2 \frac{x}{2n+1}\right)\sin\frac{x}{2n+1} \\ &= (2n+1)\left(\sin\frac{x}{2n+1}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2 \dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2 \dfrac{k\pi}{2n+1}}\right).\end{aligned}$$

2) Soit $x \neq k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (pour $x = k\pi$, le résultat est évident) et posons pour tout couple d'entiers naturels n, m vérifiant $|x| < 2(m+1)$ et $n > m+1 > 2$:

$$\gamma_{m,n} = (2n+1)\left(\sin\frac{x}{2n+1}\right)\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{\sin^2 \dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2 \dfrac{k\pi}{2n+1}}\right)$$

et

$$\sigma_{m,n} = \prod_{k=m+1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2 \dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2 \dfrac{k\pi}{2n+1}} \right).$$

Alors, d'après 1b), $\sin x = \gamma_{m,n}\sigma_{m,n}$. De plus,

- $\forall\, k = m+1, \ldots, n : 0 < \dfrac{|x|}{2n+1} < \dfrac{k\pi}{2n+1} < \dfrac{\pi}{2}$;
- $\forall\, t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\, : \, \dfrac{2t}{\pi} < \sin t < t$;
- $\sigma_m = \lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_{m,n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin x}{\gamma_{m,n}} = \dfrac{\sin x}{x \prod\limits_{k=1}^{m} \left(1 - \dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right)}$.

Ainsi, puisque

$$\beta_m = \prod_{k=m+1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4k^2} \right) \leq \sigma_m \leq 1$$

et $\lim\limits_{m\to+\infty} \beta_m = 1$ (ex. 2.124 et 8.96), $\lim\limits_{m\to+\infty} \sigma_m = 1$. Par conséquent

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2} \right) = \lim_{m\to+\infty} \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2} \right) = \lim_{m\to+\infty} \frac{\sin x}{x\sigma_m} = \frac{\sin x}{x}.$$

Fonctions d'une variable

4.1 Soit $\varepsilon > 0$. Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\big|(4x+5)-13\big| = 4|x-2|$, il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.

4.2 Soit $\varepsilon > 0$. Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x+3| \leq 1$:

$$\begin{aligned}&\big|\big(|x| - x^3\big) - 30\big| \\ &\leq \big||x|-3|\big| + \big|x^3+27\big| \leq |x+3| + |x+3|\big(x^2-3x+9\big) \leq 38|x+3|\,,\end{aligned}$$

il suffit de prendre $\delta = \min\big\{1, \frac{\varepsilon}{38}\big\}$.

4.3 $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{5x^3+3x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^2+3}{6} = \frac{1}{2}.$

4.4 $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\big(x^{n-1} + \cdots + x + 1\big) = n.$

4.5
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\big(x+\alpha\big)^n - \alpha^n}{x} &= \lim_{x\to 0}\Big(\big(x+\alpha\big)^{n-1} + \alpha\big(x+\alpha\big)^{n-2} \\ &\qquad + \cdots + \alpha^{n-2}(x+\alpha) + \alpha^{n-1}\Big) = n\alpha^{n-1}\,.\end{aligned}$$

4.6 $\displaystyle \lim_{x\to 2+} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to 2+} \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} = 0.$

4.7 $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{4+x}+2} = \frac{1}{4}.$

4.8 $\displaystyle \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{2x+1} = \lim_{x\to -\infty} -\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{-1}{2}.$

4.9 $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}.$

4.10
$$\begin{aligned}&\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\ \operatorname{Arctg} x \\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{Arctg} x}{\sqrt{2+\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{\pi}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}\,.\end{aligned}$$

4.11 $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}}=\lim_{x\to 1}\frac{-\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{3}\right)}{2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{2x}\right)}=-\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

4.12 $$\lim_{x\to 2+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\frac{\dfrac{x-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}\,\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to 2+}\frac{1}{\sqrt{x+2}}\left(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}+1\right)=\frac{1}{2}\,.$$

4.13 $$\lim_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)}-1\right)$$
$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)-1\right)}{\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)}+1}=\frac{5}{2}\,.$$

4.14 $$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1.$$

4.15 $$\lim_{x\to +\infty}x^2\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}}$$
$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\left(1-\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^3}-1\right)^2}\right)}=\frac{1}{3}\,.$$

4.16 $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{1}{3}.$$

4.17 $$\lim_{x\to +\infty}\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^2+1}\right)$$
$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}+\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+1\right)}+\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}}$$
$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha^2(x)}+\sqrt[3]{\alpha(x)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2}}=\frac{1}{3}\,.$$

où $\alpha(x)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$.

4.18 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+x^2}-\sqrt[3]{x+2x^2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2x-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1+2x}}{1-\sqrt[3]{2-x}}=0.$$

4.19 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{2}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{2x^{n-2}}+\cdots+\sqrt[n]{2^{n-2}x}+\sqrt[n]{2^{n-1}}}$
$=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{2^{n-1}}}=\dfrac{\sqrt[n]{2}}{2n}\,.$

4.20 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{3}{2}.$

4.21 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-x^3+x^2-x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\left(x^2+1\right)}{x+1}=1.$

4.22 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+x^2+1}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=2.$

4.23 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 1}-\dfrac{x+2}{x^2+x+1}=-1.$

4.24 Cette limite n'existe pas. En effet, $\lim\limits_{x\to 0-}[x]=-1\neq 0=\lim\limits_{x\to 0+}[x].$

4.25 $\forall\, x\geq 1:\dfrac{[x]}{1+[x]}\leq\dfrac{x}{1+[x]}<1\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1+[x]}=1.$

4.26 $\forall\, x\in\mathbb{R}^*:\dfrac{1}{x}-1<\left[\dfrac{1}{x}\right]\leq\dfrac{1}{x}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1.$

4.27 Puisque pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$:

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x \text{ ou encore } \cos x<\frac{\sin x}{x}<1\,,$$

on a aussi que pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$:

$$\cos x=\cos(-x)<\frac{\sin(-x)}{(-x)}=\frac{\sin x}{x}<1\,.$$

Par conséquent, pour tout $0<|x|<\frac{\pi}{2}$: $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$. D'où

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\,.$$

4.28 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cos x=1.$

4.29 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

4.30 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\sin t}{t}=1.$

4.31 Cette limite n'existe pas. En effet,

$$\lim_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}}=1\neq 0=\lim_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{\dfrac{1}{2n\pi}}\,.$$

4.32 $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sin x}{x}\sqrt{x} = 0.$

4.33 $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{Arctg} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{t\to +\infty} \operatorname{Arctg} t = \dfrac{\pi}{2}.$

4.34 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x - \cos x}{x + \sin x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1 - \dfrac{\cos x}{x}}{1 + \dfrac{\sin x}{x}} = 1.$

4.35 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 5x} = \dfrac{2}{5} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x} \dfrac{5x}{\sin 5x} = \dfrac{2}{5}.$

4.36 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{x \sin 5x} = \dfrac{1}{5} \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^2 \dfrac{5x}{\sin 5x} = \dfrac{1}{5}.$

4.37 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x^2}{x^6 + 3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\dfrac{x^4}{3} + 1} \dfrac{\operatorname{tg} 3x^2}{3x^2} = 1.$

4.38 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x(x-1)\sin(x-1)}{x^3 - 3x + 2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x+2} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} = \dfrac{1}{3}.$

4.39 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 6x - \cos 8x}{x^2} = 14 \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \dfrac{\sin 7x}{7x} = 14.$

4.40 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 6x - \sin^2 4x}{\operatorname{tg}^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\operatorname{tg} x}\right)^2 \left(36 \left(\frac{\sin 6x}{6x}\right)^2 - 16 \left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)^2\right) = 20.$$

4.41 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin 2x - \sin 4}{x - 2} = 2 \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x-2)}{x-2} \cos(x+2) = 2\cos 4.$

4.42 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x - 1}{x^2} = -\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 = -1.$

4.43 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - 1}{\sin x^2} = -2 \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 \dfrac{x^2}{\sin x^2} = -2.$

4.44 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 - \cos x}}{|x|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \lim\limits_{x\to 0} \left| \dfrac{\sin \dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}} \right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

4.45 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^3 x \sin \frac{1}{x}}{1 - \cos x} = 2 \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^3 \left(\dfrac{\dfrac{x}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}}\right)^2 \left(x \sin \dfrac{1}{x}\right) = 0.$

4.46 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x^2 \operatorname{Arctg} \dfrac{1}{x^4}}{(1 - \cos x)^2} = 4 \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x^2}{x^2}\right)^2 \left(\dfrac{\dfrac{x}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}}\right)^4 \operatorname{Arctg} \dfrac{1}{x^4} = 2\pi.$

4.47 $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x\sin\alpha x}{1-\cos\beta x} = \frac{2\alpha}{\beta^2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\right) \left(\frac{\frac{\beta x}{2}}{\sin\frac{\beta x}{2}}\right)^2 = \frac{2\alpha}{\beta^2}.$

4.48 $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin\frac{1}{x}}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\operatorname{tg} x}\right)^2 \left(x\sin\frac{1}{x}\right) = 0.$

4.49 $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{tg}\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{\sqrt{x+1}-1}\right) \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}.$

4.50 $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{\sin^3 x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\sin x}\right)\sin^3 x}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\sin x}\right)} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^3 \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right) \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}\,.$$

4.51 $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\left(\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x\right)\operatorname{tg} x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 3x\,\cos x} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right) = 2.$

4.52 $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cotg} 4x - \operatorname{cotg} 3x}$

$$= -12 \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)\left(\frac{x}{\operatorname{tg} x}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right) = -12,.$$

4.53 $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\operatorname{tg}(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t\operatorname{tg} t}{1-\cos\frac{\pi}{2}t} = \frac{8}{\pi^2}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} t}{t}\right)\left(\frac{\frac{\pi}{4}t}{\sin\frac{\pi}{4}t}\right)^2 = \frac{8}{\pi^2}\,.$$

4.54 $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{1+\cos\pi x}{\sin^2 \pi x} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos\pi t}{\sin^2\pi t} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{2}t} = \frac{1}{2}.$

4.55 $\displaystyle \lim_{x\to\alpha} \frac{x^3-\alpha^3}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}x\right)}$

$$= -\frac{\alpha}{\pi}\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{\frac{\pi}{\alpha}(x-\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}(x-\alpha)\right)}\right)\left(x^2+\alpha x+\alpha^2\right) = -3\frac{\alpha^3}{\pi}\,.$$

4.56 $\displaystyle \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)\left(\frac{3t}{\sin 3t}\right)\left(\sin\frac{t}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{t}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

$\boxed{\mathbf{4.57}}$ $\lim\limits_{x\to\alpha}\sqrt{\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2\alpha}x\right)}{\alpha-x}}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2\alpha}}\lim\limits_{x\to\alpha}\sqrt{\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2\alpha}(x-\alpha)\right)}{\dfrac{\pi}{2\alpha}(x-\alpha)}}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2\alpha}}.$

$\boxed{\mathbf{4.58}}$ $\forall\, x>0:0<e^{-x^2}<\dfrac{6}{x^6}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}x^5e^{-x^2}=0.$

$\boxed{\mathbf{4.59}}$ $\forall\, x>0:0<5^{-x}<\dfrac{6}{x^3\ln^3 5}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}x^2 5^{-x}=0.$

$\boxed{\mathbf{4.60}}$ $\forall\, 0<t<1:0<\dfrac{e^t-1}{t}-1<\mathrm{et}\Rightarrow\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{e^t-1}{t}=1.$ D'où

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(e^{x+\frac{1}{x}}-e^x\right)\left(e^{-x+\frac{1}{x}}-e^{-x}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\right)^2=\lim_{t\to0+}\frac{e^t-1}{t}=1\,.$$

$\boxed{\mathbf{4.61}}$ $\forall\, 0<|x|<1:0<\dfrac{e^{-x^{-4}}}{\sin x^2}<\dfrac{x^4}{\sin x^2}\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x^{-4}}}{\sin x^2}=0.$

$\boxed{\mathbf{4.62}}$ $\forall\, 0<x<1:0<\dfrac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sin x}<24\dfrac{x^2}{\sin x}\Rightarrow\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sin x}=0.$

$\boxed{\mathbf{4.63}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\bigl(3x^3+1\bigr)-3\ln x}{x\sin\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(3+\dfrac{1}{x^3}\right)}{\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}=\ln 3.$

$\boxed{\mathbf{4.64}}$ $\lim\limits_{x\to0+}\ln x\ln(1-x)=\lim\limits_{x\to0+}(x\ln x)\dfrac{\ln(1-x)}{x}=0\,.$

$\boxed{\mathbf{4.65}}$ $\forall\, x>0:0<e^{-x}<\dfrac{26!}{x^{26}}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}x^{25}\,e^{-x}=0.$

$\boxed{\mathbf{4.66}}$ $\forall\, x>0:\ 0<x\,e^{-2x}<\dfrac{1}{2x}$ et $0<\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}<\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,e^{-2x}+\sqrt{x}\,e^{-\sqrt{x}}\right)=0\,.$

$\boxed{\mathbf{4.67}}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x+1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{1}{2}.$

$\boxed{\mathbf{4.68}}$ $\forall\, x>0:\ \dfrac{e^x}{x^\alpha}>\dfrac{x^{[\alpha]+1-\alpha}}{\bigl([\alpha]+1\bigr)!}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^\alpha}=+\infty.$

$\boxed{\mathbf{4.69}}$ 1) $\alpha=0$. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{-x^3}=-1.$

2) $\alpha\neq0$. Puisque α est une racine simple de

$$\alpha^3-x^3=(\alpha-x)(\alpha^2+\alpha x+x^2)=0\,,$$

on a

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{x^3+6\alpha x^6-7\alpha^4 x}{\alpha^3-x^3}\ \text{existe}$$
$$\Leftrightarrow 6\alpha^7-7\alpha^5+\alpha^3=0\Leftrightarrow \alpha=\pm 1 \text{ ou } \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\,.$$

$\boxed{\mathbf{4.70}}$ 1) $\alpha=-1$. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x\ln|x|}{x-1}=0$.

2) $\alpha=0$. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln|x|}{x-1}=0$.

3) $\alpha=1$. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln|x|}{x-1}=1$.

4) $\alpha\neq -1$, 0 ou 1. La limite n'existe pas.

$\boxed{\mathbf{4.71}}$ Puisque pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\mathrm{tg}^2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2}=1$, la limite proposée existe si et seulement si la limite $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{x^4-2\alpha x^3+4x^2}{(x-\alpha)^2}$ existe. Pour que cette dernière limite existe, il faut et il suffit que α soit au moins une racine double de $x^4-2\alpha x^3+4x^2=0$. Il y a exactement trois α qui ont cette propriété, à savoir : $\alpha=\pm 2$ et $\alpha=0$.

$\boxed{\mathbf{4.72}}$ Puisque pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\mathrm{tg}(x-\alpha)}{\sin(x-\alpha)}=1$, la limite proposée existe si et seulement si $\alpha^5\alpha^5-2\alpha^2\alpha^4+\alpha^2=\alpha^2\big(\alpha^4-1\big)^2=0$. Par conséquent les α cherchés sont $\alpha=0$ et $\alpha=\pm 1$.

$\boxed{\mathbf{4.73}}$ 1) $\alpha=0$. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{-\sin x^4}=-1$.

2) $\alpha\neq 0$. Puisque pour tout $\alpha\in\mathbb{R}^*$: $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\alpha^4-x^4}{\sin(\alpha^4-x^4)}=1$, la limite proposée existe si et seulement si la limite $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{x^4+\alpha x^3-8\alpha x}{\alpha^4-x^4}$ existe. Pour que cette dernière limite existe, il faut et il suffit que α soit racine de $x^4+\alpha x^3-8\alpha x=0$. Il y a exactement deux α qui satisfont cette propriété, à savoir : $\alpha=\pm 2$.

$\boxed{\mathbf{4.74}}$ Puisque pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{x-\alpha}{\mathrm{tg}(x-\alpha)}=1$, la limite proposée existe si et seulement si la limite $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{x^6-2\alpha x^5+(\alpha+1)x^4}{(x-\alpha)^2}$ existe. Pour que cette dernière limite existe, il faut et il suffit que α soit au moins une racine double de $x^6-2\alpha x^5+(\alpha+1)x^4=0$. Il y a exactement trois α qui ont cette propriété, à savoir : $\alpha=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ et $\alpha=0$.

$\boxed{\mathbf{4.75}}$ 1) $\beta=0$. $\lim\limits_{x\to 0}|x|\sin\dfrac{1}{x}+\alpha=\alpha$.

2) $\beta<0$. Ce cas est à exclure, car $x^2+\beta\left|\cos\frac{1}{x}\right|$ prend des valeurs négatives au voisinage de $x=0$. En effet, pour $x_n=\frac{1}{2n\pi}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}x_n^2+\beta\left|\cos\frac{1}{x_n}\right|=\beta<0\,.$$

3) $\beta > 0$.

- $\alpha \neq 0$. Dans ce cas, la limite n'existe pas. En effet, en prenant $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^2 \sin \dfrac{1}{x_n} + \alpha\left|x_n\right|}{\sqrt{x_n^2 + \beta\left|\cos \dfrac{1}{x_n}\right|}} = 0 \neq \alpha = \lim_{n\to+\infty} \frac{y_n^2 \sin \dfrac{1}{y_n} + \alpha\left|y_n\right|}{\sqrt{y_n^2 + \beta\left|\cos \dfrac{1}{y_n}\right|}}.$$

- $\alpha = 0$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$0 \leq \frac{x^2\left|\sin \dfrac{1}{x}\right|}{\sqrt{x^2 + \beta\left|\cos \dfrac{1}{x}\right|}} = \frac{|x|\left|\sin \dfrac{1}{x}\right|}{\sqrt{1 + \dfrac{\beta}{x^2}\left|\cos \dfrac{1}{x}\right|}} \leq |x|,$$

on a $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \dfrac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + \beta\left|\cos \dfrac{1}{x}\right|}} = 0.$

$\boxed{\textbf{4.76}}$ Pour que cette limite soit égale à 1, il faut et il suffit que

$$\left(\alpha^2 - 1\right)(\beta - 2) = 0 \text{ et } \alpha^2(\beta + 2) = 4$$

ou encore que $(\alpha, \beta) = (\pm 1, 2)$.

$\boxed{\textbf{4.77}}$ Puisque le dénominateur s'annule pour $x = 0$, pour que cette limite existe, il faut que le numérateur s'annule aussi pour $x = 0$. D'où $(\alpha^4-1)(\beta-4) = 0$ ou encore $\alpha = \pm 1$ ou $\beta = 4$.

$$1)\ \alpha = \pm 1 : \lim_{x\to 0} \frac{(\alpha^4 - 1)(\beta - 4) + 4\beta x + 6x^2}{\alpha^2(\beta + 2)x + (\alpha^2 + \beta^2)x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4\beta + 6x}{(\beta + 2) + (\alpha^2 + \beta^2)x} = \frac{4\beta}{(\beta + 2)} = 8 \Leftrightarrow \beta = -4.$$

$$2)\ \beta = 4 : \lim_{x\to 0} \frac{(\alpha^4 - 1)(\beta - 4) + 4\beta x + 6x^2}{\alpha^2(\beta + 2)x + (\alpha^2 + \beta^2)x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{16 + 6x}{6\alpha^2 + (\alpha^2 + 16)x} = \frac{8}{3\alpha^2} = 8 \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

En résumé, il y a exactement 4 solutions possibles, à savoir :

$$(\alpha, \beta) = (\pm 1, -4) \ \text{ ou } \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 4\right).$$

4.78 $g \circ f(x) = \begin{cases} 2x+7 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{si } -\sqrt{3} < x < 0 \\ 2x^2+1 & \text{si } x \leq -\sqrt{3} \end{cases}$

$f \circ g(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } x \geq 3 \\ x+3 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ x^2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

4.79 $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b) \Rightarrow g \circ f(a) \leq g \circ f(b)$.

4.80 $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b) \Rightarrow g \circ f(a) \leq g \circ f(b)$.

4.81 Puisque $f^{-1} = f$, toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cherchées sont celles dont la courbe C est symétrique par rapport à la première bissectrice.

4.82 Raisonnons par l'absurde et supposons que f ne s'annule pas en un point a de $\mathbb{R}$. Alors, $f(a) > 0$ et, puisque f est impaire, $f(-a) = -f(a) < 0$; ce qui est impossible car par définition f est non négative. D'où contradiction.

4.83 1) Raisonnons par l'absurde et supposons que la fonction f est croissante. Puisque C n'est pas la première bissectrice, il existe au moins un $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq a$; ce qui est impossible car

$$f(a) < a \Rightarrow a = f\big(f(a)\big) \leq f(a) \text{ et } f(a) > a \Rightarrow a = f\big(f(a)\big) \geq f(a).$$

D'où contradiction.

2) La fonction f est injective car

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = f\big(f(a)\big) = f\big(f(b)\big) = b.$$

Une fonction continue et injective est strictement monotone et donc, d'après 1), elle est strictement décroissante.

3) Prendre $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$

4.84 *Rappel* : L'image du point (r, s) par la symétrie de centre Ω est $(2a - r, 2b - s)$.

Pour que la courbe C admette Ω pour centre de symétrie il faut et il suffit que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(2a - x) = 2b - f(x)$. Par conséquent il nous faut démontrer

$$g \text{ impaire} \Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R} \ : \ f(2a - x) = 2b - f(x)\,.$$

En effet, si g est impaire, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(2a - x) &= f\big((-x + a) + a\big) = g(-x + a) + b = -g(x - a) + b \\ &= -\big(f(x) - b\big) + b = 2b - f(x)\,. \end{aligned}$$

Réciproquement, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g(-t) &= f(a - t) - b = f\big(2a - (t + a)\big) - b \\ &= 2b - f(t + a) - b = b - f(t + a) = -g(t)\,. \end{aligned}$$

4.85 *Rappel* : L'image du point (r, s) par la symétrie d'axe $x = a$ est $(2a-r, s)$. Pour que la courbe C admette la droite $x = a$ pour axe de symétrie il faut et il suffit que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(2a - x) = f(x)$. Par conséquent il nous faut démontrer

$$g \text{ paire} \Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R} : f(2a - x) = f(x)\,.$$

En effet, si g est paire, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(2a - x) = f\big(a + (a - x)\big) = g(a - x) = g(x - a) = f(x)\,.$$

Réciproquement, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$g(-t) = f(a - t) = f\big(2a - (t + a)\big) = f(t + a) = g(t)\,.$$

4.86 Puisque $\frac{2x}{x^2+25} = y \Leftrightarrow yx^2 - 2x + 25y = 0$, on a

1) $\operatorname{Im} f = \left[-\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{5}\right]$.
2) Non. Pour $0 < |y| < \frac{1}{5}$, l'équation $f(x) = y$ admet exactement deux solutions.

4.87 Puisque pour tout $y \in \,]0, 1[$, l'équation $\sqrt{1 - x^2} = y$ admet une et une seule solution dans $]-1, 0[$, à savoir : $x = -\sqrt{1 - y^2}$, la fonction f est bijective. Sa fonction réciproque est $f^{-1}(y) = -\sqrt{1 - y^2}$.

4.88 Puisque pour tout $y \in \,]0, +\infty[$:

$$\frac{e^x + 2}{e^{-x}} = y \Leftrightarrow e^{2x} + 2\,e^x - y = 0 \Leftrightarrow x = \ln\left(-1 + \sqrt{1 + y}\right),$$

la fonction f est bijective. De plus, $f^{-1}(y) = \ln\left(-1 + \sqrt{1 + y}\right)$.

4.89 Puisque pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{e^{2x} - 4}{e^x} = y \Leftrightarrow \left(e^x\right)^2 - y\,e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 16}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y + \sqrt{y^2 + 16}}{2}\right),$$

la fonction f est bijective. De plus, $f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y+\sqrt{y^2+16}}{2}\right)$.

4.90 Puisque que pour tout $x \geq 0$: $f(x) = \frac{2\,e^x}{1+e^{-x}}$, la fonction f est strictement croissante. Comme de plus f est continue, $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on a $\operatorname{Im} f = [1, +\infty[$.

La fonction f est donc bijective. Sa fonction réciproque est

$$f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y + \sqrt{y^2 + 8y}}{4}\right).$$

4.91 En constatant que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\big[f(x)\big] = [x]$ et $\big[g(x)\big] = [x]$, on vérifie facilement que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g \circ f(x) = x$ et $f \circ g(x) = x$. Par conséquent $g = f^{-1}$.

4.92 Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors,

$$f^{-1}(-y) = x \Leftrightarrow y = -f(x) = f(-x) \Leftrightarrow x = -f^{-1}(y)\,.$$

La fonction réciproque f^{-1} est donc aussi impaire.

4.93 Soit $|x| \leq 1$. Alors,

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x \leq \frac{3\pi}{2}$$

et

$$\begin{aligned}\sin(\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x) &= x^2 + \sin(\operatorname{Arccos} x)\cos(\operatorname{Arcsin} x)\\ &= x^2 + \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-x^2} = 1\,.\end{aligned}$$

Par conséquent, l'unique possibilité est $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}$.

4.94 Soit $x \in \mathbb{R}$ et posons $a = \operatorname{Arctg} x$ et $b = \operatorname{Arccotg} x$. Alors, puisque $\operatorname{tg} a = \operatorname{cotg} b$:

$$-\frac{\pi}{2} < a + b = \frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{3\pi}{2}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Par conséquent, l'unique possibilité est $\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arccotg} x = \dfrac{\pi}{2}$.

4.95 Soit $|x| \leq 1$ et posons $x = \sin\theta$ avec $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$. Alors,

$$\operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \operatorname{Arcsin}(\sin 2\theta)$$

$$= \begin{cases} -\pi - 2\theta & \text{si } \theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{4}\right] \\ 2\theta & \text{si } \theta \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right] \\ \pi - 2\theta & \text{si } \theta \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} = \begin{cases} -\pi - 2\operatorname{Arcsin} x & \text{si } x \in \left[-1, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ 2\operatorname{Arcsin} x & \text{si } x \in \left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ \pi - 2\operatorname{Arcsin} x & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]. \end{cases}$$

4.96 Soit $|x| \leq \frac{\pi}{2}$. Alors,

$$\operatorname{Arcsin}\sqrt{1-\cos^2 x} = \operatorname{Arcsin}|\sin x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right] \\ x & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

4.97 Soit $|x| < \pi$. Alors,

$$\operatorname{Arctg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \operatorname{Arctg}\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & \text{si } x \in]-\pi, 0] \\ \dfrac{x}{2} & \text{si } x \in [0, \pi[\,. \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{4.98}}$ Soit $x \in [0, 2\pi]$. Alors,

$$\operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \operatorname{Arcsin}\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x \in [0, \pi] \\ \pi - \dfrac{x}{2} & \text{si } x \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{4.99}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{\frac{1+\cos^4 x - \sin^4 x}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = |\cos x|\,,$$

on a

$$\operatorname{Arccos}\sqrt{\frac{1+\cos^4 x - \sin^4 x}{2}} = \operatorname{Arccos}|\cos x| = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{si } \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \\ x - \pi & \text{si } \pi < x \le \dfrac{3\pi}{2} \\ 2\pi - x & \text{si } \dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{4.100}}$ Soit $x \in [0, \pi]$. Alors,

$$\operatorname{Arccos}\left|\cos^2 x - \sin^2 x\right| = \operatorname{Arccos}\,|\cos 2x| = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \\ \pi - 2x & \text{si } x \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ 2x - \pi & \text{si } x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right] \\ 2\pi - 2x & \text{si } x \in \left[\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right]. \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{4.101}}$ Soit $|x| \le 1$ et posons $x = \sin\theta$ avec $|\theta| \le \frac{\pi}{2}$. Alors,

$$\begin{aligned} &\operatorname{Arccos}\left(1-2x^2\right) = \operatorname{Arccos}(\cos 2\theta) \\ &= \begin{cases} -2\theta & \text{si } \theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right] \\ 2\theta & \text{si } \theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} = \begin{cases} -2\operatorname{Arcsin} x & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 2\operatorname{Arcsin} x & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases} = 2\operatorname{Arcsin}|x|\,. \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{4.102}}$ Soit $x \in \mathbb{R}$ et posons $x = \operatorname{tg}\theta$ avec $|\theta| < \frac{\pi}{2}$. Alors,

$$\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \operatorname{Arcsin}(\sin 2\theta) + \operatorname{Arccos}(\cos 2\theta)$$

$$= \begin{cases} -\pi - 4\theta & \text{si } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \\ 0 & \text{si } \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right] \\ 4\theta & \text{si } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ \pi & \text{si } \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[. \end{cases}$$

Par conséquent $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 0]$.

4.103 Supposons que $x \neq 0$ est solution de l'équation à résoudre. Alors,

$$\begin{aligned} &\operatorname{Arcsin} 2x - \operatorname{Arcsin} \sqrt{3}\, x = \operatorname{Arcsin} x \\ &\Rightarrow 2\sqrt{1-3x^2} - \sqrt{3}\,\sqrt{1-4x^2} = 1 \Rightarrow 4\big(1-3x^2\big) = \left(1 + \sqrt{3}\,\sqrt{1-4x^2}\right)^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{1-4x^2} = 0\,. \end{aligned}$$

Finalement $\operatorname{Arcsin} 2x - \operatorname{Arcsin} \sqrt{3}x = \operatorname{Arcsin} x \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$ ou 0.

4.104 $\operatorname{Arcsin} \sqrt{5x - 7x^2} = \operatorname{Arccos} x$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \sqrt{5x-7x^2} = \sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2} \\ &\Leftrightarrow 5x - 7x^2 = 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ou } \frac{1}{2}\,, \end{aligned}$$

4.105 $\operatorname{Arctg}(1-2x) - \operatorname{Arctg}\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \operatorname{Arctg}(1-2x) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{Arctg}\left(x + \frac{1}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow 1 - 2x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arctg}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) = -\frac{1}{x + \frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,. \end{aligned}$$

4.106 Posons $x = \sin t$ avec $|t| < \frac{\pi}{4}$. Alors, pour tout $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctg}\left(\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}\right) &= \operatorname{Arctg}\left(\frac{2\sin t\cos t}{1-2\sin^2 t}\right) = \operatorname{Arctg}(\operatorname{tg} 2t) \\ &= 2t = 2\operatorname{Arcsin} x\,. \end{aligned}$$

Par conséquent la fonction f sera continue en 0 si et seulement si

$$\alpha = 2\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Arcsin} x}{x} = 2\,.$$

4.107 $x > 0$. $\dfrac{x}{3} = \log_x 4^x = \dfrac{x \ln 4}{\ln x} \Leftrightarrow \ln x = 3\ln 4 = \ln 4^3 \Leftrightarrow x = 64$.

4.108 $2^{2x} - 2^{x+1} + 1 = \left(2^x - 1\right)^2 \Leftrightarrow x = 0$.

4.109 $\dfrac{1}{4}\left(2^{2x}\right)^2 - 2^{2x} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} = 6 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 6}{\ln 4}$.

4.110 $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ \ln x^2+\ln y^2=2\ln 6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^2y^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow \left(x^2,y^2\right)=(4,9) \text{ ou } (9,4).$$

Rappel : x^2 et y^2 sont les deux racines de l'équation $t^2-13\,t+36=0$.

4.111 $x,y>0$. $\begin{cases} x^y=y^x \\ x^3=y^2 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(1,1) \text{ ou } \left(\frac{9}{4},\frac{27}{8}\right).$

4.112 En effet, soit $x\in\mathbb{R}$. Alors, il existe une suite $\left(a_n\right)$ de rationnels et une suite $\left(b_n\right)$ d'irrationnels qui convergent toutes les deux vers x. Mais, comme

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=a\neq b=\lim_{n\to+\infty} f(b_n)\,,$$

la fonction est dicontinue en x.

4.113 Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{x^n-1}{x^{2n}+1}=\begin{cases} -1 & \text{si } |x|<1 \\ 0 & \text{si } x=1 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } x=-1 \\ 0 & \text{si } |x|>1, \end{cases}$

la fonction f est discontinue aux points $|x|=1$ et continue ailleurs.

4.114 Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos^{2n}x}{1+\sin^{2n}x}=\begin{cases} 1 & \text{si } x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}, \end{cases}$

on peut écrire $\displaystyle\text{Arcsin}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos^{2n}x}{1+\sin^{2n}x}\right)=\begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$

La fonction f est donc discontinue aux points $k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ et continue ailleurs.

4.115 Pour commencer, supposons que x est irrationnel. Alors, puisque pour tout entier $m\geq 0$: $m!x\notin\mathbb{Z}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\cos^{2n}(m!\pi x)=0$ car $\left|\cos(m!\pi x)\right|<1$, on a

$$f(x)=\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\cos^{2n}(m!\pi x)=0\,.$$

Supposons à présent que x est rationnel. Alors, il existe $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$ tels que $x=\frac{p}{q}$. Ainsi, pour tout entier $m\geq q$: $m!x\in\mathbb{Z}$ et

$$\lim_{n\to+\infty}\cos^{2n}(m!\,\pi x)=1 \text{ car } \left|\cos(m!\,\pi x)\right|=1\,.$$

Par conséquent $\displaystyle f(x)=\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\cos^{2n}(m!\pi x)=1$. On a ainsi démontré

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\notin\mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}. \end{cases}$$

D'après l'exercice 4.112, on sait que cette fonction est discontinue en chacun de ses points.

$\boxed{\textbf{4.116}}$ Puisque

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{n+2}\left(1+\sin^{2n}x\right)}{\sqrt{x^{2n}+2^{2n}}}=\begin{cases}0 & \text{si } 0\le x<2\\ 2\sqrt{2} & \text{si } x=2\\ x^2 & \text{si } x>2 \text{ et } x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{N}^*\\ 2x^2 & \text{si } x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{N}^*,\end{cases}$$

la fonction f est discontinue aux points $x=2$ et $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{N}^*$ et continue ailleurs.

$\boxed{\textbf{4.117}}$ Puisque

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } 0\le x<5\\ \dfrac{125}{\sqrt[3]{2}} & \text{si } x=5\\ x^3 & \text{si } x>5 \text{ et } x\neq k\pi\\ 2k^3\pi^3 & \text{si } x=k\pi,\ k>1\end{cases}$$

la fonction est donc discontinue aux points $x=5$ et $x=k\pi$ avec $k\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ et continue ailleurs.

$\boxed{\textbf{4.118}}$ Puisque

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & \text{si } x\le -1\\ -(n+1)x^2 & \text{si } \dfrac{-1}{n}<x\le\dfrac{-1}{n+1},\ n\in\mathbb{N}^*\\ 0 & \text{si } x=0\\ nx^2 & \text{si } \dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\\ 0 & \text{si } x>1,\end{cases}$$

la fonction f est discontinue en tout point $|x|=\frac{1}{n}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ et continue ailleurs.

$\boxed{\textbf{4.119}}$ Pour commencer, supposons que $x\neq\frac{1}{2}$. Alors, il existe une suite $\left(a_n\right)$ de rationnels et une suite $\left(b_n\right)$ irrationnels qui convergent toutes les deux vers x. Mais, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}f(a_n)=1-x\neq x=\lim\limits_{n\to+\infty}f(b_n)$, la fonction f est discontinue en x.

Pour la continuité en $\frac{1}{2}$, il suffit de constater que $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=\left|x-\frac{1}{2}\right|$.

$\boxed{\textbf{4.120}}$ D'une part, $\forall\, x<0$: $\left|\dfrac{1}{x}\,e^{-\frac{1}{x^2}}\right|<|x|\Rightarrow\lim\limits_{x\to0-}f(x)=0\,.$

D'autre part, la fonction sinus étant bornée,

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}x\sin\left(\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right)=0\,.$$

Par conséquent $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$. Autrement dit, la fonction f est continue en 0.

$\boxed{\mathbf{4.121}}$ Non. Car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)^2}\right) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{(2n\pi)^2}\right)$.

$\boxed{\mathbf{4.122}}$ 1) $a \neq 1$. Ce cas est à exclure car

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}-a\right)-b+\frac{1-\cos(cx)}{x^2}\right)=\infty\,.$$

2) $a=1$. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1-b+\frac{c^2}{2}$ et

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^4+1}+x^2}-b+\frac{1-\cos(cx)}{x^2}\right)=-b\,.$$

Par conséquent la fonction f est continue en 0 et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -3$ si et seulement si $a=1$, $b=3$ et $|c|=2$.

$\boxed{\mathbf{4.123}}$ Raisonnons par l'absurde et supposons que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\delta(\varepsilon)\neq 0$.

Alors, d'une part, il existe un nombre $\beta>0$ et une suite (ε_k) d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ qui converge vers 0 tels que pour tout entier $k\geq 0$: $\delta(\varepsilon_k)\geq\beta$. D'autre part, la fonction f n'étant pas localement constante au voisinage du point a, il existe une suite (a_n) d'éléments de $E\setminus\{a\}$ qui converge vers a et telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $f(a_n)\neq\ell$. Ainsi, il existe un entier $m\geq 0$ tel que $0<|a_m-a|\leq\beta$; ce qui entraîne que pour tout entier $k\geq 0$: $0<|a_m-a|\leq\beta\leq\delta(\varepsilon_k)$ ou encore, d'après la propriété que vérifie la fonction δ, $\left|f(a_m)-\ell\right|\leq\varepsilon_k$. Par conséquent, puisque $\lim\limits_{k\to+\infty}\varepsilon_k=0$, on doit avoir $f(a_m)=\ell$. D'où contradiction.

$\boxed{\mathbf{4.124}}$ Puisque $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & \text{si } -1\leq x\leq 0\\ -x^2+2x & \text{si } 0\leq x\leq 1,\end{cases}$

la fonction f est continue. Elle atteint donc ses extrema et on a

$$\min_{-1\leq x\leq 1} f(x) = f(0) = 0 \text{ et } \max_{-1\leq x\leq 1} f(x) = f(-1) = 3\,.$$

$\boxed{\mathbf{4.125}}$ Puisque les deux fonctions $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sont continues, les trois fonctions f, g et $f+g$ atteignent leur maximum. Ainsi, si f atteint son maximum au point c de $[a,b]$, on peut écrire

$$\max_{a\leq x\leq b} f(x)+\min_{a\leq x\leq b} g(x)\leq f(c)+g(c)\leq\max_{a\leq x\leq b}\big(f(x)+g(x)\big)\,.$$

$\boxed{\mathbf{4.126}}$ En effet, soit $x\neq 0$. Alors, pour tout entier $n>0$: $f\left(\frac{x}{n}\right)\leq f(x)$. Ainsi, en utilisant la continuité de la fonction f en 0, on obtient, par passage à la limite, que

$$f(0)=\lim_{n\to+\infty} f\Big(\frac{x}{n}\Big)\leq f(x)\,.$$

4.127 Puisque la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, il existe $d \in [a,b]$ pour lequel

$$f(d) = \min_{a \leq x \leq b} f(x).$$

1) Si $a < d < b$, il suffit de prendre $c = d$.

2) Si $d = a$. Puisque f admet un maximum local en a, il existe $0 < \delta < b - a$ tel que pour tout $x \in [a, a+\delta]$, la fonction f est constante. Dans ce cas, on peut prendre $c = a + \frac{\delta}{2}$.

3) Si $d = b$. Puisque f admet un maximum local en b, il existe $0 < \delta < b - a$ tel que pour tout $x \in [b-\delta, b]$, la fonction f est constante. Dans ce cas, on peut prendre $c = b - \frac{\delta}{2}$.

4.128 Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ n'est pas continue au point c de $[a,b]$. Ainsi la fonction f étant croissante, on obtient, en posant

$$\beta = \begin{cases} f(a) & \text{si } c = a \\ \lim\limits_{x \to c-} f(x) = \sup\limits_{x \in [a,c[} f(x) & \text{si } c \neq a \end{cases}$$

et

$$\gamma = \begin{cases} \lim\limits_{x \to c+} f(x) = \inf\limits_{x \in]c,b]} f(x) & \text{si } c \neq b \\ f(b) & \text{si } c = b\,, \end{cases}$$

que $f(a) \leq \beta < \gamma \leq f(b)$ et $\big(]\beta, \gamma[\cap \mathrm{Imf}\big) \subset \big\{f(c)\big\}$; ce qui est impossible car $\mathrm{Imf} = \big[f(a), f(b)\big]$. D'où contradiction.

4.129 1) Si f est monotone, l'inégalité est évidente. Montrons à présent la réciproque. Pour commencer, on va démontrer le résultat pour $I = [a,b]$.

1a) Si $f(a) = f(b)$, on a pour tout $t \in [a,b]$: $f(t) = f(a)$. Autrement dit, f est constante.

1b) Maintenant, on va supposer que $f(a) \neq f(b)$. Pour simplifier la démonstration, on va faire l'hypothèse supplémentaire que $f(a) < f(b)$ (l'autre cas s'obtient en remplaçant f par $-f$) et montrons que f est croissante. En effet, soit $a \leq c < d \leq b$. Alors, si $u = c$ ou d :

$$\big(f(u) - f(a)\big)\big(f(u) - f(b)\big) \leq 0 \text{ et } f(a) < f(b) \Rightarrow f(u) \leq f(b)\,;$$

ce qui entraîne, puisque $\big(f(d) - f(c)\big)\big(f(d) - f(b)\big) \leq 0$, $f(c) \leq f(d)$.

Supposons à présent que I est un intervalle quelconque et montrons que la fonction f est monotone. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que f ne l'est pas. Alors, il existe quatre éléments $a_1 < b_1$ et $a_2 < b_2$ de I tels que $f(a_1) < f(b_1)$ et $f(a_2) > f(b_2)$; ce qui est impossible, car en posant $a = \min\{a_1, a_2\}$ et $b = \max\{b_1, b_2\}$, d'après 1), f est monotone sur $[a,b]$. D'où contradiction.

2) En effet, d'aprés 1), si f n'est pas monotone, il existe trois éléments $r < s < t$ de I pour lesquels on a

$$\big(f(s) - f(r)\big)\big(f(s) - f(t)\big) > 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{4.130}}$ Pour commencer, on va démontrer que la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est injective. Pour cela, on va raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe deux éléments $c < d$ de $[a, b]$ pour lesquels $f(c) = f(d)$. Puisque la fonction f est continue, il existe deux éléments r, s de $[c, d]$ tels que

$$f(r) = \min_{c \leq x \leq d} f(x) \text{ et } f(s) = \max_{c \leq x \leq d} f(x)\,.$$

La fonction f n'admettant pas d'extremum local dans $]a, b[$, on a que $f(r) \neq f(s)$. Comme de plus $f(c) = f(d)$, on doit obligatoirement avoir $c < r < d$ ou $c < s < d$. D'où contradiction.

La fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ étant à la fois injective et continue, elle est strictement monotone.

$\boxed{\mathbf{4.131}}$ En effet, soit $a \in \mathbb{R}$. Alors, il existe une suite $\big(a_n\big)$ de rationnels qui converge vers a. Comme les deux fonctions f et g sont continues en a et égales sur les rationnels, on peut écrire

$$f(a) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} g(a_n) = g(a)\,.$$

$\boxed{\mathbf{4.132}}$ La fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^5 + x^3 + x + \sqrt{x} - 1$ est continue et strictement croissante (somme d'une constante et de 4 fonctions continues et strictement croissantes). Comme de plus, $f(0) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, le théorème de la valeur intermédiaire nous permet de conclure que la fonction f admet une et une seule racine réelle

$\boxed{\mathbf{4.133}}$ La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 5x^7 + 3x^3 + 10\,x - 3$ est continue et strictement croissante (somme d'une constante et de 3 fonctions continues et strictement croissantes). Comme de plus, $f(0) = -3$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, le théorème de la valeur intermédiaire nous permet de conclure que la fonction f admet une et une seule racine réelle et que celle-ci est positive.

$\boxed{\mathbf{4.134}}$ Puisque pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la fonction $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \alpha^2 x^3 + x + \beta$$

est continue et strictement croissante, le théorème de la valeur intermédiaire dit que $f_{\alpha,\beta}$ s'annule une et une seule fois dans $[0, 1]$ si et seulement si

$$f_{\alpha,\beta}(0) = \beta \leq 0 \text{ et } f_{\alpha,\beta}(1) = \alpha^2 + 1 + \beta \geq 0\,.$$

4.135 Puisque pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_\alpha(x) = x^2 + \sqrt{x} - \alpha$$

est continue et strictement croissante, le théorème de la valeur intermédiaire dit que f_α s'annule une et une seule fois dans $[0,1]$ si et seulement si

$$f_\alpha(0) = -\alpha \leq 0 \text{ et } f_\alpha(1) = 2 - \alpha \geq 0$$

ou encore $0 \leq \alpha \leq 2$.

4.136 En effet, soit $y \in \mathbb{R}$. Puisque $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = +\infty$, il existe deux éléments $c < d$ de $]a,b[$ tels que $f(c) < y < f(d)$. Comme de plus, la fonction $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ est continue, le théorème de la valeur intermédiaire dit qu'elle prend toute valeur comprise $f(c)$ et $f(d)$.

4.137 Puisque la fonction $f : [0,5] \to \mathbb{R}$ est continue, on sait qu'elle atteint son minimum m, son maximum M et $\operatorname{Im} f = [m,M]$. Ainsi, en constatant que

$$m \leq \frac{13\, f(0) + 24\, f(5)}{37} \leq M\,,$$

il existe au moins un élément α de $[0,5]$ pour lequel $\frac{13\, f(0)+24\, f(5)}{37} = f(\alpha)$.

4.138 Désignons par $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ un tel polynôme et posons $\gamma = \frac{a_n}{|a_n|}$. Puisque

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\gamma\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} P(x) = \gamma\infty\,,$$

il existe $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $P(a) < 0 < P(b)$. Comme de plus la fonction polynomiale $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par le polynôme $P(x)$ est continue, le théorème de la valeur intémédiaire dit qu'elle prend toute valeur comprise entre $P(a)$ et $P(b)$. Autrement dit, le polynôme $P(x)$ s'annule au moins une fois dans l'intervalle ouvert $]a,b[$.

4.139 Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $g(x) = f(x+1) - f(x)$.

En constatant que $g(0) = f(1) - f(0) = -\big(f(2) - f(1)\big) = -g(1)$, le théorème de la valeur intémédiaire nous permet d'affirmer qu'il existe au moins un élément α de $[0,1]$ pour lequel $g(\alpha) = 0$ ou encore $f(\alpha) = f(\alpha+1)$.

4.140 Soit $\alpha \geq 0$ et $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par

$$h(x) = f(x) - \alpha\, g(x)$$

Puisque $h(0) = -\alpha \leq 0 < 1 = h(1)$, le théorème de la valeur intémédiaire nous permet d'affirmer qu'il existe au moins un élément x_α de $[0,1]$ pour lequel $h(x_\alpha) = 0$ ou encore $f(x_\alpha) = \alpha\, g(x_\alpha)$.

$\boxed{\textbf{4.141}}$ Soit $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $h(x) = f(x) - g(x)$. Etant donné que $h(a) = a - g(a) \leq 0 \leq b - g(b) = h(b)$, le théorème de la valeur intémédiaire nous permet d'affirmer qu'il existe au moins un élément c de $[a,b]$ pour lequel $h(c) = 0$ ou encore $f(c) = g(c)$.

$\boxed{\textbf{4.142}}$ Soit $h : [0,1] \to \left]-\infty, 0\right[$ la fonction définie par $h(x) = f(x) - g(x)$. Puisque la fonction h est continue, elle atteint son maximum en un point a de $[0,1]$ et l'on peut écrire que pour tout $x \in [0,1]$:

$$h(x) \leq \max_{0 \leq t \leq 1} h(t) = h(a) < 0\,.$$

Il suffit donc de prendre $c = \frac{h(a)}{2}$.

$\boxed{\textbf{4.143}}$ Il résulte des hypothèses que pour tout $x \in [0,1]$:

$$f(x) = \big|f(x) - f(0)\big| \geq |x| = x\,;$$

ce qui entraîne, entre autres, que $f(1) = 1$. Il reste à montrer que pour tout $a \in \left]0,1\right[$: $f(a) = a$. En effet, $f(a) \geq a$ et $1 - f(a) = \big|f(1) - f(a)\big| \geq |1 - a| = 1 - a$ ou encore $f(a) \leq a$.

$\boxed{\textbf{4.144}}$ 1) Puisque $f(b) \leq b$, $E = \big\{x \in [a,b] : f(x) \leq x\big\} \neq \emptyset$ et posons $c = \inf E$. Pour montrer que $f(c) = c$, il nous suffit d'éliminer les deux autres cas, à savoir : $f(c) < c$ et $f(c) > c$. En effet,

1a) $f(c) < c$. Soit $x \in \left]f(c), c\right[$. Alors, de la définition de c et du fait que la fonction f est croissante, on peut écrire que $f(c) \geq f(x) > x > f(c)$; ce qui est absurde. Ce cas est donc à rejeter.

1b) $f(c) > c$. Puisque la fonction f est croissante, on a que pour tout $x \in \left]c, f(c)\right[$: $f(x) \geq f(c) > x$. Par conséquent $E \cap \big[c, f(c)\big[= \emptyset$; ce qui est en contradiction avec la définition de c.

2) Il peut être faux. Contre-exemple :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{4.145}}$ Puisque la fonction $f : [a,b] \to [c,d]$ est surjective et que $c \leq a < b \leq d$, il existe $r, s \in [a,b]$ tels que $f(r) = a$ et $f(s) = b$. Considérons à présent, la fonction continue $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$. Ainsi, en constatant que $g(r) = a - r \leq 0 \leq b - s = g(s)$, le théorème de la valeur intémédiaire nous permet d'affirmer qu'il existe au moins un élément v de $[a,b]$ pour lequel $g(v) = 0$ ou encore $f(v) = v$.

$\boxed{\textbf{4.146}}$ Soit $g : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par

$$g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x) - 2\,.$$

Puisque $g(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = -g\left(\frac{1}{2}\right)$, le théorème de la valeur intémédiaire nous permet d'affirmer qu'il existe au moins un élément c de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ pour lequel $g(c) = 0$ ou encore $f\left(c + \frac{1}{2}\right) - f(c) = 2$.

4.147 La fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ étant continue, il existe $r, s \in [a, b]$ tels que

$$g(r) = \min_{a \le t \le b} g(t) \text{ et } g(s) = \max_{a \le t \le b} g(t)\ ;$$

ce qui entraîne, puisque $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$, que pour tout $x \in [a, b]$:

$$g(r) \le f(x) \le g(s)\,.$$

Ainsi, en désignant par $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par

$$h(x) = g(x) - f(x)\,,$$

on obtient que $h(r) = g(r) - f(r) \le 0 \le g(s) - f(s) = h(s)$; ce qui nous permet de conclure, grâce au théorème de la valeur intermédiaire, qu'il existe au moins un élément c de $[a, b]$ pour lequel $h(c) = 0$ ou encore $f(c) = g(c)$.

4.148 En effet, pour tout couple d'éléments x, y de $\left[0, \frac{1}{4}\right]$:

$$\left|f(x) - f(y)\right| = \frac{\left|x^2 - y^2\right|}{\left(4 + x^2\right)\left(4 + y^2\right)} \le \frac{(x + y)}{16}\,|x - y| \le \frac{1}{32}\,|x - y|\,.$$

4.149 1) *Existence.* Considérons la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$. La fonction $f : [a, b] \to [a, b]$ étant k-contractante, elle est continue. Par conséquent la fonction g l'est aussi et comme de plus

$$g(b) = f(b) - b \le 0 \le f(a) - a = g(a)\,,$$

le théorème de la valeur intémédiaire nous permet d'affirmer qu'il existe au moins un élément c de $[a, b]$ pour lequel $g(c) = 0$ ou encore $f(c) = c$.

Unicité. Raisonnons par l'absurde et supposons que $c_1 \neq c_2$ sont deux points fixes de la fonction f. Alors,

$$\left|c_1 - c_2\right| = \left|f(c_1) - f(c_2)\right| \le k\left|c_1 - c_2\right| < \left|c_1 - c_2\right|.$$

D'où contradiction.

2) Puisque pour tout $p > 1$:

$$\left|x_p - x_{p-1}\right| = \left|f\left(x_{p-1}\right) - f\left(x_{p-2}\right)\right| \le k\left|x_{p-1} - x_{p-2}\right| \le \ldots \le k^{p-1}\left|f(x_0) - x_0\right|,$$

on obtient que pour tout couple d'entiers $m > n \ge 1$:

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\le \left|(x_m - x_{m-1})\right| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\le (k^{m-1} + \cdots + k^n)\left|f(x_0) - x_0\right| \le \frac{k^n}{1-k}\left|f(x_0) - x_0\right|. \end{aligned}$$

3) Il résulte de 2) que la suite $\big(x_n\big)$ est de Cauchy, donc convergente et désignons par d sa limite. Comme de plus f est continue et $a \leq d \leq b$, on peut écrire

$$d = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(d)\,.$$

L'unicité du point fixe, nous permet de conclure que $c = d$.
4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors, en utilisant 2) et 3), on a

$$|x_n - c| = \lim_{m\to+\infty} |x_m - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k}\Big|f\left(x_0\right) - x_0\Big|\,.$$

4.150 1) En effet, pour tout $x \in [0,3]$:

$$0 < 1 \leq f(x) = -\frac{1}{4}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{16} \leq \frac{25}{16} < 3\,.$$

2) Pour tout couple d'éléments x, y de $[0,3]$:

$$\big|f(x) - f(y)\big| = \frac{1}{4}\,|x-y|\,|3-x-y| \leq \frac{3}{4}\,|x-y|\,.$$

3) La fonction $f : [0,3] \to [0,3]$ étant $\frac{3}{4}$-contractante, elle admet un unique point fixe c (exercice précédent). Alors, $c \in [0,3]$ et $c^2 + c - 4 = 0$ ou encore $c = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

4.151 En effet, soit $x \in [a-\alpha, a+\alpha]$. Alors,

$$\begin{aligned}&\big|f(x) - a\big| = \big|\big(f(x) - f(a)\big) + \big(f(a) - a\big)\big| \\ &\leq \big|f(x) - f(a)\big| + \big|f(a) - a\big| \leq k|x-a| + \big|f(a) - a\big| \leq k\alpha + \big|f(a) - a\big| = \alpha\,.\end{aligned}$$

Remarque : La fonction f admet un unique point fixe et ce point fixe appartient à $[a-\alpha, a+\alpha]$.

4.152 1) La continuité de la fonction $f : [0,+\infty[\; \to \mathbb{R}$ nous permet d'écrire

$$\big|f(0)\big| = \lim_{x\to 0+} \big|f(x)\big| \leq \lim_{n\to 0+} x = 0 \Rightarrow f(0) = 0\,.$$

2) Soit $0 < a < b$ et $g : [a,b] \to [0,1[$ la fonction définie par $g(x) = \frac{|f(x)|}{x}$. Cette fonction étant continue, il existe un élément c de $[a,b]$ pour lequel

$$g(c) = \max_{a\leq x\leq b} g(x)\,.$$

Puisque $0 \leq g(c) < 1$, il suffit de prendre $\rho = \frac{1+g(c)}{2}$.
3) D'une manière générale, il est faux. Comme contre-exemple, prenons $f(x) = \sin x$. Si un tel $\rho \in \,]0,1[$ existait, on aurait que pour tout $x \in \,]0,1[$:

$$\sin x = |\sin x| < \rho x\;;$$

ce qui impliquerait $1 = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sin x}{x} \leq \rho < 1$. D'où contradiction.

$\boxed{\textbf{4.153}}$ Cette fonction est continue sur $[0,1]$ donc uniformément continue. Par contre, elle n'est lipschitzienne. En effet, pour tout entier $k > 0$ et tout $x \in \left]0, \frac{1}{k^2}\right[$: $\left|f(x) - f(0)\right| = \sqrt{x} > kx$.

$\boxed{\textbf{4.154}}$ Pour commencer, on va supposer que la fonction f est uniformément continue et soit $\left(a_n\right)$ une suite d'éléments de $]a, b[$ qui converge vers a. Alors, la suite des images $\left(f(a_n)\right)$ est de Cauchy, donc convergente. Par conséquent $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ existe. De même pour $\lim\limits_{x \to b-} f(x)$.

Montrons à présent la réciproque. Puisque les deux limites existent, elle peut être prolongeée de manière continue à $[a, b]$ en posant

$$f(a) = \lim_{x \to a+} f(x) \text{ et } f(b) = \lim_{x \to b-} f(x)\,.$$

Ce prolongement étant uniformément continue sur $[a, b]$, la fonction f est uniformément continue sur $]a, b[$.

$\boxed{\textbf{4.155}}$ Puisque $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0$, la fonction f peut donc être prolongée par continuité sur tout l'intervalle fermé $[0,1]$. Par conséquent elle est uniformément continue sur $]0,1]$.

Reste à montrer qu'elle l'est aussi sur $[1, +\infty[$. En effet, pour tout $x, y \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - f(y)\right| &= \left|(x-y)\sin\frac{1}{x} + y\left(\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{y}\right)\right| \\
&\leq |x-y| + |y|\left|\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{y}\right| \\
&\leq |x-y| + |y|\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leq 2|x-y|.
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{4.156}}$ 1) En effet, pour tout couple d'éléments x, y de $]a, +\infty[$:

$$\left|f(x) - f(y)\right| = \frac{|x-y|}{xy} \leq \frac{1}{a^2}|x-y|\,.$$

2) Puisque $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$, l'exercice précédent nous permet de dire qu'elle n'est pas uniformément continue sur $]0, +\infty[$.

$\boxed{\textbf{4.157}}$ La fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ étant uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout couple d'éléments x, y de $[0, +\infty[$ vérifiant $|x-y| \leq \delta$: $\left|f(x) - f(y)\right| \leq 1$; ce qui entraîne que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\left|f(n\delta) - f(0)\right| \leq \left|f(n\delta) - f\big((n-1)\delta\big)\right| + \cdots + \left|f(\delta) - f(0)\right| \leq n\,.$$

Soit $x \in [0, +\infty[$ et posons $m = \left[\frac{x}{\delta}\right]$. Alors, $0 \leq x - m\delta < \delta$ et

$$\begin{aligned}
\left|f(x)\right| &\leq \left|f(x) - f(m\delta)\right| + \left|f(m\delta) - f(0)\right| + \left|f(0)\right| \\
&\leq 1 + m + \left|f(0)\right| \leq \frac{x}{\delta} + \big(1 + \left|f(0)\right|\big)\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent, il suffit de poser $\alpha = \frac{1}{\delta}$ et $\beta = 1 + \left|f(0)\right|$.

$\boxed{\textbf{4.158}}$ Soit $\varepsilon > 0$.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell_2 \Rightarrow \exists\, \beta > a$ t.q. $\forall\, t \geq \beta : \left|f(t) - \ell_2\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{4}$

$$\Rightarrow \forall\, x, y \geq \beta : \left|f(x) - f(y)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

2) Puisque $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \ell_1$, la fonction f peut être prolongée par continuité à droite en a ; ce qui entraîne que f est uniformément continue sur $]a, \beta]$ et qu'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in\,]a, \beta]$ avec $|x - y| \leq \delta$: $\left|f(x) - f(y)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

3) Pour tout $a < x \leq \beta \leq y$ avec $y - x \leq \delta$:

$$\left|f(x) - f(y)\right| \leq \left|f(x) - f(\beta)\right| + \left|f(y) - f(\beta)\right| \leq \varepsilon\,,$$

Par conséquent la fonction f est uniforment continue.

Remarque : Ce résultat reste valable si on remplace $]a, +\infty[$ par $]-\infty, b[$ ou $]-\infty, +\infty[$.

$\boxed{\textbf{4.159}}$ L'ensemble des rationnels non nuls $\mathbb{Q}^*$.

$\boxed{\textbf{4.160}}$ Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$g(x) = f\left(x + \frac{T}{2}\right) - f(x)\,.$$

Puisque g est continue et $g(0) = -g\left(\frac{T}{2}\right)$, on sait, d'après le théorème de la valeur intémédiaire, qu'il existe $a \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$ tel que $g(a) = 0$ ou encore $f(a) = f\left(a + \frac{T}{2}\right)$.

$\boxed{\textbf{4.161}}$ 1) En effet, soit $T \neq 0$ une période de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors,

$$\left|f(x + T)\right| = \left|f(x)\right|.$$

2) D'une manière générale non. Contre-exemple : $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$

$\boxed{\textbf{4.162}}$ En effet, soit $T > 0$ une période de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x + nT) = \ell$.

$\boxed{\textbf{4.163}}$ En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g \circ f(x+T) = g \circ f(x) \Leftrightarrow f(x+T) = f(x)$.

$\boxed{\textbf{4.164}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ la période de la fonction $\cos^2$ est π. Comme de plus la fonction Arcsin est bijective, la période de la fonction composée $\mathrm{Arcsin}\left(\cos^2\right)$ est la même que celle de $\cos^2$ donc π.

$\boxed{\textbf{4.165}}$ 1) Soit $T > 0$ une période de la fonction f. Cette fonction étant continue, elle atteint son minimum m et son maximum M sur $[0, T]$ et

$$f\big([0, T]\big) \subset [m, M]\,.$$

Soit à présent $x \in \mathbb{R}$. Alors, il existe $p \in \mathbb{Z}$ pour lequel $x = pT + r$ avec $r \in [0, T[$; ce qui nous permet d'écrire $f(x) = f(pT + r) = f(r) \in [m, M]$.

2) D'une manière générale, ce résultat est faux. Comme contre-exemple, il suffit de prendre

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{si } x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{4.166}}$ Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(t+8) &= \sqrt{2}f(t+7) - f(t+6) = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}f(t+6) - f(t+5)\right) - f(t+6) \\ &= f(t+6) - \sqrt{2}f(t+5) = -f(t+4)\,, \end{aligned}$$

on peut écrire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x+8) = -f(x+4) = -f\big((x-4)+8\big) = f\big((x-4)+4\big) = f(x)\,.$$

Par conséquent la fonction f admet $T = 8$ pour période.

Exemple d'une telle fonction : $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)$.

$\boxed{\mathbf{4.167}}$ 1) La suite (f_n) converge uniformément sur $]0,a[$ vers la fonction $f = 0$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sup\limits_{0<x<a} \left|f_n(x)\right| = a^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.

2) Si $a = 1$, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f = 0$ mais pas uniformément car pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sup\limits_{0<x<1} \left|f_n(x)\right| = 1$.

$\boxed{\mathbf{4.168}}$ Puisque pour tout entier $n \geq 0$ et tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2(n+1)}\,,$$

la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction $f : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$.

$\boxed{\mathbf{4.169}}$ 1) Pour tout $x \in \,]0,1[$: $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{\dfrac{1}{n} + x} = 1$.

2) La convergence n'est pas uniforme car pour tout entier $n > 0$:

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right| = \frac{1}{2}\,.$$

$\boxed{\mathbf{4.170}}$ Puisque pour tout entier $n \geq 3$ et tout $x \in [1,3]$: $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$, la suite (f_n) est décroissante. Comme de plus elle converge simplement vers la fonction continue $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x$, on sait, d'après le théorème de Dini, que la convergence est uniforme.

$\boxed{\mathbf{4.171}}$ Soit $\varepsilon > 0$. D'une part, la fonction f étant continue sur $[a, b]$, elle est uniformément continue sur cet intervalle. Par conséquent, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout couple u, v de $[a, b]$ vérifiant $|u - v| \leq \delta$:

$$\big|f(u) - f(v)\big| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, $\mathbb{R}$ étant archimédien, il existe un entier $m > 0$ tel que $\frac{b-a}{m} < \delta$ et posons $x_k = a + k\frac{b-a}{m}$ avec $k = 0, \ldots, m$. Ainsi, puisque la suite $\big(f_n\big)$ converge simplement vers la fonction f, à chaque entier $0 \leq k \leq m$, on peut associer un $n_k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_k$:

$$\big|f_n(x_k) - f(x_k)\big| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement, en posant $n_\varepsilon = \max\{n_1, \ldots, n_m\}$, on a que pour tout entier $0 \leq k \leq m$ et tout $n \geq n_\varepsilon$:

$$\big|f_n(x_k) - f(x_k)\big| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $x \in [a, b]$ et $n \geq n_\varepsilon$. Alors, il existe un entier $1 \leq p \leq m$ tel que $x_{p-1} \leq x \leq x_p$ et, la fonction f_n étant croissante, on a

$$f_n(x) - f(x) \leq f_n(x_p) - f(x) = \big(f_n(x_p) - f(x_p)\big) + \big(f(x_p) - f(x)\big) \leq \varepsilon$$

et

$$f_n(x) - f(x) \geq f_n(x_{p-1}) - f(x) = \big(f_n(x_{p-1}) - f(x_{p-1})\big) + \big(f(x_{p-1}) - f(x)\big) \geq -\varepsilon.$$

D'où $\big|f_n(x) - f(x)\big| \leq \varepsilon$.
Ce résultat étant valable quel que soit $x \in [a, b]$, on a ainsi démontré que pour tout entier $n \geq n_\varepsilon$:

$$\sup_{a \leq x \leq b} \big|f_n(x) - f(x)\big| \leq \varepsilon\,;$$

ce qui revient à dire que la convergence est uniforme.

$\boxed{\mathbf{4.172}}$ 1) Soit $x \in [0, 1]$. En constatant que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sqrt{x} - P_n(x) = \big(\sqrt{x} - P_{n-1}(x)\big)\left(1 - \frac{1}{2}\big(\sqrt{x} + P_{n-1}(x)\big)\right),$$

on montre, par un simple raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}\,.$$

2) La suite numérique $\big(P_n(x)\big)$ étant croissante et majorée, elle converge.
De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n(x) = \sqrt{x}$. On a ainsi démontré que la suite $\big(P_n\big)$ est croissante et qu'elle converge simplement vers la fonction continue $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$; ce qui entraîne, grâce au théorème de Dini, que la convergence est uniforme.

3) Il suffit de prendre $Q_n(x) = P_n(x^2)$.

4.173 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$1 = \big(x + (1-x)\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

(formule du binôme de Newton), on peut écrire que pour tout $x \in [0,1]$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(x) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f étant continue sur $[0,1]$, elle est uniformément continue sur cet intervalle et par conséquent il existe un nombre $\delta_\varepsilon > 0$ tel que pour $x, y \in [0,1]$ vérifiant $|x-y| \leq \delta_\varepsilon$:

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $x \in [0,1]$ et posons

$$E_- = \left\{k \in \mathbb{N} : \left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \delta_\varepsilon\right\} \quad \text{et} \quad E_+ = \left\{k \in \mathbb{N} : \left|\frac{k}{n} - x\right| > \delta_\varepsilon\right\}.$$

Alors, pour tout $k \in E_-$: $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et pour tout $k \in E_+$: $\frac{(k-nx)^2}{n^2\,\delta_\varepsilon^2} > 1$. Ainsi, en posant $M = \max\limits_{0 \leq t \leq 1} \big|f(t)\big|$,on obtient, en utilisant l'inégalité donnée à l'exercice 5.278, que

$$\begin{aligned}
\big|f(x) - B_n(f,x)\big| &\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in E_-} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{2M}{n^2\,\delta_\varepsilon^2} \sum_{k \in E_+} (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\,\delta_\varepsilon^2}.
\end{aligned}$$

Ce résultat étant valable pour tout $x \in [0,1]$,

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} \big|f(x) - B_n(f,x)\big| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta_\varepsilon^2}.$$

Finalement, puisque cette inégalité est vraie quel que soit l'entier $n > 0$, on peut conclure que la suite des polynômes de Bernstein $\big(B_n(f,\cdot)\big)$ converge uniformément vers f.

4.174 En effet, soit $\varepsilon > 0$ et considérons la fonction auxiliaire $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f\big(a + t(b-a)\big)$. D'après l'exercice précédent, on sait qu'il existe un polynôme de Bernstein $B_m(g,\cdot)$ tel que

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \big|g(t) - B_m(g,t)\big| \leq \varepsilon.$$

D'où, en posant $t = \frac{x-a}{b-a,}$, on a $\sup\limits_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - B_m\left(g, \dfrac{x-a}{b-a}\right) \right| \leq \varepsilon$.

Par conséquent il suffit de prendre $P_\varepsilon(x) = B_m\left(g, \dfrac{x-a}{b-a}\right)$.

Remarque : Le théorème d'approximation de Weierstrass revient à dire que toute fonction continue sur un intervalle fermé borné peut être approximée, à ε près, par un polynôme et ceci quel que soit $\varepsilon > 0$ ou encore, en prenant $\varepsilon = \frac{1}{n}$, qu'elle est la limite uniforme d'une suite de polynômes.

4.175 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{\left(x+1\right)^{2n+1} - x^{2n+1}}{\left(x^2+1\right)^{n+1} - x^{2n+2}} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n+1}{k} x^k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} x^{2k}} ;$$

ce qui entraîne que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x+1\right)^{2n+1} - x^{2n+1}}{\left(x^2+1\right)^{n+1} - x^{2n+2}} = \frac{\dbinom{2n+1}{2n}}{\dbinom{n+1}{n}} = \frac{2n+1}{n+1}$.

D'où $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x+1\right)^{2n+1} - x^{2n+1}}{\left(x^2+1\right)^{n+1} - x^{2n+2}} \right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$.

Il n'est pas possible d'intervertir les deux limites. En effet, soit $x \in \left]0, +\infty\right[$. Alors, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\left(x+1\right)^{2n+1} - x^{2n+1}}{\left(x^2+1\right)^{n+1} - x^{2n+2}} &= \frac{1 - \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2n+1}}{1 - \left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^{n+1}} \, \frac{\left(x+1\right)^{2n+1}}{\left(x^2+1\right)^{n+1}} \\
&= \frac{1 - \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2n+1}}{1 - \left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^{n+1}} \, \frac{x+1}{x^2+1} \left(1 + \frac{2x}{x^2+1}\right)^n
\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\left(x+1\right)^{2n+1} - x^{2n+1}}{\left(x^2+1\right)^{n+1} - x^{2n+2}} = +\infty.$

4.176 *Rappels* :

$$\forall\, \beta \in \left]0, +\infty\right[: \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\beta} = 0 \text{ et } \forall\, n > 1 : \frac{\ln n!}{n} > \frac{\ln \frac{n}{2}}{2} \text{ (ex. 2.115).}$$

Soit $x \in \left]1, +\infty\right[$. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 < \frac{\ln n!}{n^x} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln k}{n^x} \leq \frac{n \ln n}{n^x} = \frac{\ln n}{n^{x-1}} ,$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n!}{n^x}=0\,.$$

D'où $\displaystyle\lim_{x\to1+}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n!}{n^x}\right)=0.$

Il n'est pas possible d'intervertir les deux limites. En effet, puisque pour tout entier $n>1$:

$$\lim_{x\to1+}\frac{\ln n!}{n^x}=\frac{\ln n!}{n}$$

on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to1+}\frac{\ln n!}{n^x}\right)=+\infty.$

$\boxed{\mathbf{4.177}}$ En effet,

$$f(a)=\lim_{n\to+\infty}f_n(a)=\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a}f_n(x)\right)$$

et, f étant continue en a,

$$f(a)=\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\right).$$

$\boxed{\mathbf{4.178}}$ Puisque pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{x}{k(k+1)}&=\lim_{x\to0}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\dfrac{x}{k(k+1)}}{\dfrac{x}{k(k+1)}\,k\,(k+1)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\,,\end{aligned}$$

on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{x}{k(k+1)}=1\,.$

$\boxed{\mathbf{4.179}}$ Pour tout entier $n>0$:

$$x_n=n^2\max_{0\le x\le1}x^n(1-x)^n=\frac{n^2}{4^n}\,.$$

Ainsi, puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{4}$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}x_n=0$.

$\boxed{\mathbf{4.180}}$ 1) Puisque $\operatorname{Im}f\subset[0,1[$ et $x_0=1$, par un simple raisonnement par récurrence, on montre que la suite $\left(x_n\right)$ est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente.

2) Posons $a=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}x_n$. Alors $a\ge0$ et en utilisant la continuité de la fonction f, on peut écrire que $a=af(a)$; ce qui entraîne que $a=0$ car $f(a)\neq1$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum\limits_{k=0}^{n} x_k\big(1 - f(x_k)\big) = \sum\limits_{k=0}^{n} \big(x_k - x_{k+1}\big) = x_0 - x_{n+1}$. D'où

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k\big(1 - f(x_k)\big) = 1\,.$$

$\boxed{\textbf{4.181}}$ Soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to+\infty}\big(f(t+1) - f(t)\big) = \ell\\ &\Rightarrow \exists\ A > 0 \text{ tel que } \forall\, t \geq A :\ \big|f(t+1) - f(t) - \ell\big| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.\end{aligned}$$

A chaque nombre $x \geq A$, on peut associer un élément σ_x de $[A, A+1[$ et un entier $p_x \geq 0$ tels que $x = \sigma_x + p_x$. Ainsi, pour tout $x \in [A+1, +\infty[$:

$$\begin{aligned}\big|f(x) - f(\sigma_x) - p_x\ell\big| &= \big|f(\sigma_x + p_x) - f(\sigma_x) - p_x\ell\big|\\ &= \left|\sum_{k=1}^{p_x}\big(f(\sigma_x + k) - f(\sigma_x + k - 1) - \ell\big)\right|\\ &\leq \sum_{k=1}^{p_x}\big|f(\sigma_x + k) - f(\sigma_x + k - 1) - \ell\big| \leq p_x\frac{\varepsilon}{2}\ ;\end{aligned}$$

ce qui entraîne, puisque $1 \leq p_x \leq x$, que

$$\begin{aligned}\big|f(x) - x\ell\big| &= \big|\big(f(x) - f(\sigma_x) - p_x\ell\big) + \big(f(\sigma_x) + p_x\ell - x\ell\big)\big|\\ &\leq \big|f(x) - f(\sigma_x) - p_x\ell\big| + \big|f(\sigma_x) - (x - p_x)\ell\big|\\ &\leq p_x\frac{\varepsilon}{2} + \big|f(\sigma_x) - \sigma_x\ell\big| \leq x\frac{\varepsilon}{2} + \big|f(\sigma_x) - \sigma_x\ell\big|\end{aligned}$$

ou encore

$$\left|\frac{f(x)}{x} - \ell\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M + (A+1)|\ell|}{x} \quad \text{avec } M = \max_{A\leq t\leq A+1}\big|f(t)\big|\,.$$

De plus, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{M+(A+1)|\ell|}{x} = 0$, il existe un nombre $B \geq A+1$ tel que pour tout $x \in [B, +\infty[$: $0 \leq \frac{M+(A+1)|\ell|}{x} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Finalement, pour tout $x \in [B, +\infty[$:

$$\left|\frac{f(x)}{x} - \ell\right| \leq \varepsilon\,.$$

$\boxed{\textbf{4.182}}$ Raisonnons par l'absurde et supposons que cette fonction n'est pas constante. Alors, il existe deux éléments a, b de $\mathbb{R}$ tels que $f(a) < f(b)$. Puisque la fonction f est continue, on aurait, d'après le théorème de la valeur intermédiaire,

$$\big[f(a), f(b)\big] \subset \operatorname{Im} f \subset \mathbb{Z}\ ;$$

ce qui est impossible, car l'intervalle $\big[f(a), f(b)\big]$ contient au moins un irrationnel. D'où contradiction.

4.183 Raisonnons par l'absurde et supposons que cette fonction n'est pas constante. Alors, il existe deux éléments a, b de $\mathbb{R}$ tels que $f(a) < f(b)$. Puisque la fonction f est continue, on aurait, d'après le théorème de la valeur intermédiaire,

$$\big[f(a), f(b)\big] \subset \operatorname{Im} f \subset \mathbb{Q}\ ;$$

ce qui est impossible, car l'intervalle $\big[f(a), f(b)\big]$ contient au moins un irrationnel. D'où contradiction.

4.184 Pour commencer, supposons que $f(0) = 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{Q}$:

$$f(x) = f\big(x + f(0)\big) = f(x)\, f(0) = 0\,.$$

Dans la suite, on fera l'hypothèse que $f(0) = c \neq 0$. Alors, $c = f\big(-c + f(0)\big) = c\, f(-c)$ ou encore $f(-c) = 1$; ce qui entraîne que pour tout entier $n \geq 1$:

$$f(n) = f\big((n-1) + f(-c)\big) = f(n-1) = \cdots = f(0) = c$$

et

$$f(-n) = f\big(-n + f(-c)\big) = f(-n+1) = \cdots = f(0) = c\,.$$

On a ainsi démontré que pour tout $x \in \mathbb{Z}$: $f(x) = c$.

Montrons à présent que $c = 1$. En effet, puisque $c = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$:

$$c = f(p) = f(qc) = f\big((q-1)c + f(0)\big) = c\, f\big((q-1)c\big) = \cdots = c^{q+1}\,,$$

on doit obligatoirement avoir ou bien $c = -1$ ou bien $c = 1$. Le cas $c = -1$ est à éliminer car sinon, on aurait $1 = f(-c) = f(1) = c = -1$.

Pour finir, soit $a \in \mathbb{Q}^*$ et posons $b = f(a)$. Alors, il existe un entier $m > 0$ tel que $mb \in \mathbb{Z}$ et de plus

$$1 = f(mb) = f\big((m-1)b + f(a)\big) = f(a)\, f\big((m-1)b\big) = \cdots = \big(f(a)\big)^m\,.$$

Par conséquent on doit obligatoirement avoir ou bien $f(a) = -1$ ou bien $f(a) = 1$. Le premier cas est à éliminer car sinon, on aurait

$$1 = f(0) = f\big(1 + f(a)\big) = f(a) = -1\,.$$

4.185 Posons $x = 0$. Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f \circ f(y) = y + f(0) + y f(0) = f(0) + y\big(1 + f(0)\big)\ ;$$

ce entraîne, puisque $1 + f(0) \neq 0$, que pour tout couple u, v de $\mathbb{R}$:

$$f(u) = f(v) \Rightarrow f \circ f(u) = f \circ f(v) \Rightarrow u = v\,.$$

Autrement dit, la fonction f est injective. Il en résulte que $f(0) = 0$ (car $f \circ f(0) = f(0)$) ; ce qui entraîne que pour tout $y \in \mathbb{R}$: $f\big(x = f(y)\big) = y$. D'où, la surjectivité.

$\boxed{\textbf{4.186}}$ Soit $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ une telle fonction. Alors, pour $x = y = 0$, on a $4f^2(0) = 0$ ou encore $f(0) = 0$; ce qui implique, puisque $f \geq 0$, qu'en prenant $y = x$,

$$f(2x) = 2f(x)\,.$$

Ainsi, en prenant $y = -x$, on a $4f(x)f(-x) = -f^2(2x) = -4f^2(x)$. Par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(-x) = -f(x)$. La fonction f est donc impaire et non négative. Elle ne peut être qu'identiquement nulle (ex. 4.82).

$\boxed{\textbf{4.187}}$ Raisonnons par l'absurde et supposons qu'une telle fonction f existe. Pour commencer, notons que f est strictement décroissante. En effet, pour tout x, $y > 0$:

$$f^2(x) \geq f(x+y)\big(f(x)+y\big) > f(x+y)f(x) \Rightarrow f(x) > f(x+y)\,.$$

Considérons à présent la suite $\big(v_n\big)$ définie par

$$v_{n+1} = f(v_0 + \cdots + v_n) \text{ et } v_0 = 1$$

et posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

La fonction f étant strictement décroissante, la suite $\big(v_n\big)$ l'est aussi tandis que $\big(S_n\big)$ est strictement croissante car elle est la somme de termes positifs. Puisque pour tout $x > 0$:

$$f^2(x) \geq f\big(x + f(x)\big)\big(f(x) + f(x)\big) \Rightarrow \frac{f\big(x + f(x)\big)}{f(x)} \leq \frac{1}{2}\,,$$

on a que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{v_{p+1}}{v_p} = \frac{f(v_0 + \cdots + v_{p-1} + v_p)}{f(v_0 + \cdots + v_{p-1})} = \frac{f\big(S_{p-1} + f(S_{p-1})\big)}{f(S_{p-1})} \leq \frac{1}{2}\,,$$

ce qui entraîne que pour tout entier $n > 1$: $v_n \leq \frac{v_{n-1}}{2} \leq \cdots \leq \frac{v_1}{2^{n-1}}$. Par conséquent la suite $\big(v_n\big)$ converge vers 0 et la suite $\big(S_n\big)$ converge.

Posons $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. Alors, puisque la suite $\big(S_n\big)$ est strictement croissante et f strictement décroissante, on a que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1} = f(S_n) > f(S)\,.$$

Ainsi, $f(S) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = 0$; ce qui est impossible. D'où contradiction.

$\boxed{\textbf{4.188}}$ 1) En effet, il suffit de constater que, pour chaque $q \in \mathbb{N}^*$, il existe, au plus, un nombre fini de $p \in \mathbb{Z}$ de sorte que d'une part $\frac{p}{q} \in [a - \gamma, a + \gamma]$ et d'autre part il y a, au maximum, $[\frac{1}{\beta}]$ éléments $q \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\frac{1}{q} > \beta$.

2) Soit $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}^*$. Puisque l'intervalle fermé $[a-1, a+1]$ ne contient, au plus, qu'un nombre fini de rationnels $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\frac{1}{q} > \varepsilon$, il est possible de choisir un nombre $0 < \delta < 1$ tel que pour tout $x \in [a - \delta, a + \delta]$: $\big|f(x)\big| \leq \varepsilon$. D'où la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}^*$.

Supposons à présent que $a \in \mathbb{Q}^*$. Alors, on peut écrire a d'une façon unique sous la forme $a = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\operatorname{pgcd}(p,q) = 1$. Par définition, $f(a) = \frac{1}{q}$. Par plus, comme il existe une suite (a_n) d'éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}^*$ qui converge vers a et que $0 = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \neq f(a)$, on peut conclure que la fonction est discontinue sur $\mathbb{Q}^*$.

$\boxed{\textbf{4.189}}$ *Résultats préliminaires* :

$$f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 = f(0) = f\big(x + (-x)\big) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)\,.$$

1) Pour commencer, montrons que la fonction f est continue en 0. En effet, soit (x_n) une suite de nombres réels qui converge vers 0 ; ce qui entraîne que la suite $(y_n = x_n + a)$ converge vers a. Ainsi, en utilisant la continuité de la fonction f en a, on peut écrire

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \big(f(y_n) - f(a)\big) = 0 = f(0)\,.$$

Montrons à présent que la fonction f est continue en b. Pour cela, il suffit de constater que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\big|f(x) - f(b)\big| = \big|f(x-b)\big|$ et d'utiliser la continuité de la fonction f en 0.

2) Pour tout entier $n > 0$:

$$f(n) = f(n-1) + f(1) = \cdots = nf(1) \text{ et } f(-n) = -f(n) = -nf(1)\,.$$

On a ainsi démontré que pour tout $x \in \mathbb{Z}$: $f(x) = xf(1)$.
Montrons ce résultat pour $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. En effet,

$$pf(1) = f(p) = f\left(q\frac{p}{q}\right) = qf\left(\frac{p}{q}\right) = qf(x) \Rightarrow f(x) = xf(1)\,.$$

Pour finir, supposons que x est irrationnel. Alors, il existe une suite (x_n) de rationnels qui converge vers x. Ainsi, en utilisant la continuité de la fonction f, on peut écrire $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n f(1) = xf(1)$.

$\boxed{\textbf{4.190}}$ Si l'on considère $\mathbb{R}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, on sait qu'il existe un ensemble linéairement indépendant maximal Ω de nombres réels contenant 1 et tel que tout $x \in \mathbb{R}$ peut s'écrire de façon unique sous la forme

$$x = \sum_{r\in\Omega} \sigma_r(x)\, r$$

où seulement un nombre fini des coefficients rationnels $\sigma_r(x)$ sont non nuls. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Puisque

$$x + y = \sum_{r\in\Omega} \sigma_r(x+y)\, r = \sum_{r\in\Omega} \big(\sigma_r(x) + \sigma_r(y)\big) r\,,$$

on obtient, grâce à l'unicité, que pour tout $r \in \Omega$: $\sigma_r(x+y) = \sigma_r(x) + \sigma_r(y)$.

En particulier, pour $r = 1$, on a $\sigma_1(x+y) = \sigma_1(x) + \sigma_1(y)$. Comme de plus $\operatorname{Im}\sigma_1 \subset \mathbb{Q}$, il découle de l'exercice précédent que σ_1 est discontinue partout (car sinon $\forall\, t \in \mathbb{R} : \sigma_1(t) = t$). Par conséquent la fonction $f = \sigma_1$ répond à la question.

4.191 On sait (corrigé ex. 4.189) que pour tout $t \in \mathbb{Q} : f(t) = t$. Reste à démontrer le résultat pour $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pour cela, on va éliminer les deux autres cas possibles, à savoir : $f(a) < a$ et $f(a) > a$. En effet,

1) $f(a) < a \Rightarrow \exists\, b \in \mathbb{Q}$ tel que $f(a) < b < a \Rightarrow b = f(b) \leq f(a)$ car f est croissante ; ce qui est impossible.
2) $f(a) > a \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{Q}$ tel que $a < c < f(a) \Rightarrow f(a) \leq f(c) = c$ car f est croissante ; ce qui est impossible.

4.192 En prenant $y = 0$, on a que pour tout $x \in \mathbb{R} : f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)+f(0)}{2}$. Par conséquent, pour tout couple x, y de $\mathbb{R}$:

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y)+f(0)}{2}$$

ou encore $f(x) + f(y) = f(x+y) + f(0)$.
Considérons à présent la fonction auxiliaire $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = f(t) - f(0).$$

Ainsi, en constatant que pour tout couple x, y de $\mathbb{R}$: $g(x+y) = g(x) + g(y)$, on peut écrire, en utilisant l'exercice 4.189, que pour tout $t \in \mathbb{R} : g(t) = tg(1)$. D'où le résultat.

4.193 1) $0 \neq f(0) = f(0+0) = f^2(0) \Rightarrow f(0) = 1$.
2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque

$$1 = f(0) = f(x-x) = f(x)f(-x) \Rightarrow f(x) \neq 0$$

et

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f^2\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0\,,$$

on a bien que $f(x) > 0$.
3) En effet, soit $a \in \mathbb{R}$ et $\big(a_n\big)$ une suite qui converge vers a. Alors, la suite $\big(b_n = a - a_n\big)$ converge vers 0. Comme, par hypothèse, la fonction f est continue en 0, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(a)}{f(b_n)} = f(a)\,.$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$f(n) = f\big((n-1)+1\big) = f(n-1)f(1) = \cdots = \big(f(1)\big)^n = \alpha^n$$

et

$$f(-n) = \frac{1}{f(n)} = \alpha^{-n}\,.$$

On a ainsi démontré que pour tout $x \in \mathbb{Z}$: $f(x) = \alpha^x$. A présent, soit $x \in \mathbb{Q}$. Alors, $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. D'où

$$\alpha^p = f(p) = f(qx) = f\big((q-1)x + x\big) = f\big((q-1)x\big)\, f(x) = \cdots = \big(f(x)\big)^q$$

ou encore, puisque $f(x) > 0$, $f(x) = \alpha^{\frac{p}{q}} = \alpha^x$.
Pour finir, supposons que $x \in \mathbb{R}$ et soit $\big(x_n\big)$ une suite de rationnels qui converge vers x. Les deux fonctions f et exp étant continues, on peut écrire que

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \exp(x_n \ln \alpha) = \exp(x \ln \alpha) = \alpha^x\,.$$

$\boxed{\textbf{4.194}}$ 1) $0 \neq f(1) = f^2(1) \Rightarrow f(1) = 1$.
2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque

$$1 = f(1) = f\left(x\frac{1}{x}\right) = f(x)\, f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ et } f(x) = f\big(\sqrt{x}\,\sqrt{x}\big) = f^2\left(\sqrt{x}\right) \geq 0\,,$$

on a bien que $f(x) > 0$.
3) En effet, soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\big(a_n\big)$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ qui converge vers a. Alors, en utilisant la continuité de la fonction f en 1, on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(a) \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{a_n}{a}\right) = f(a)\, f(1) = f(a)\,.$$

4) Considérons la fonction auxiliaire $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = \ln f\big(e^t\big)$. Cette fonction est continue et de plus, pour tout couple r, s de $\mathbb{R}$: $g(r+s) = g(r) + g(s)$; ce qui nous permet d'écrire (exercice 4.189) que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $g(t) = tg(1)$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, il existe un unique réel t tel que $x = e^t$. Ainsi, puisque $g(t) = \ln f\big(e^t\big) = tg(1)$, on a

$$f(x) = f\big(e^t\big) = e^{tg(1)} = \big(e^t\big)^{g(1)} = x^\alpha\,.$$

$\boxed{\textbf{4.195}}$ 1) $f(1) = f(1) + f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $0 = f(1) = f\left(\frac{x}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

2) En effet, soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\big(a_n\big)$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ qui converge vers a. Alors, en utilisant la continuité de la fonction f en 1, on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(a) + \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{a_n}{a}\right) = f(a)\,.$$

3) Considérons la fonction auxiliaire $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f\big(e^t\big)$. Cette fonction est continue et de plus, pour tout couple r, s de $\mathbb{R}$: $g(r+s) = g(r) + g(s)$; ce qui nous permet d'écrire (exercice 4.189) que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $g(t) = tg(1)$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, il existe un unique réel t tel que $x = e^t$. Ainsi, puisque $g(t) = f\big(e^t\big) = tg(1)$, on a

$$f(x) = f\big(e^t\big) = tg(1) = \alpha \ln x\,.$$

Solutions des exercices du chapitre 5

Calcul différentiel

5.1 $f'(x) = \dfrac{1-3x^4}{\left(1+x^4\right)^2}$.

5.2 $f'(x) = \dfrac{2x\left(1-x^4\right)}{\left(1+x^2+x^4\right)^2}$.

5.3 $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1+x^2}} \sin\sqrt{1+x^2}$.

5.4 $f'(x) = \dfrac{x\left(1+2x^2\right)}{\sqrt{1+x^2+x^4}} \cos\sqrt{1+x^2+x^4}$.

5.5 $f'(x) = -\operatorname{tg} x$.

5.6 $f'(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

5.7 $f'(x) = \begin{cases} 2x[x] & \text{si } x \notin \mathbb{Z}^* \\ \text{n'existe pas} & \text{si } x \in \mathbb{Z}^*. \end{cases}$

5.8 $f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

5.9 $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

5.10 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \exp{}'(0) = 1$.

5.11 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2}\, x = 0$.

5.12 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}} = \cos'\frac{\pi}{2} = -1$.

5.13 Posons, pour $x>0$: $f(x) = x^x$. Alors,

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{x^x - \sqrt{2}^{\sqrt{2}}}{x-\sqrt{2}} = f'\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{2}\ln 2\right).$$

5.14 $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{x-\pi} = \sin' \pi = -1.$

5.15 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \sin' 0 = 1.$

5.16 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\cos x} = 0.$

5.17 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{Arctg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x^2} = 1.$

5.18 $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{Arctg} t}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{1+t^2} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{Arctg}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)}{x-1} = -\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{Arctg}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)}{\dfrac{1-x}{1+x}} \frac{1}{1+x} = -\frac{1}{2}.$$

5.19 $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha \ln x = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x^\alpha}{-\alpha} = 0.$

5.20 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$

5.21 $\lim\limits_{x\to +\infty} x \ln\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right) = \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\ln(1+\alpha t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\alpha}{1+\alpha t} = \alpha$

$$\Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{x\to +\infty} e^{x\ln(1+\frac{\alpha}{x})} = e^\alpha\,.$$

5.22 *Rappel* : $\forall\, x > 0$ et $k \in \mathbb{Z}$: $e^x > \dfrac{x^k}{k!}$. D'où $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty.$

5.23 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right)}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\ln(1+x)}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{(1+x)\cos x} = -1.$

5.24 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \operatorname{ch} x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{th} x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2\operatorname{ch}^2 x} = \dfrac{1}{2}$ et

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x} = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \ln \operatorname{ch} x}{\ln^3(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{\ln(1+x)}\right)^3 \dfrac{\ln \operatorname{ch} x}{x^2} = \dfrac{1}{2}\,.$

5.25 $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{1+t} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^3} = 1.$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ch} x = 1.$

D'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+x^3\right)}{\operatorname{sh}^3 x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^3}\right) \left(\frac{x}{\operatorname{sh} x}\right)^3 = 1\,.$$

5.26 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{\ln\operatorname{ch}x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+e^{-2x}}{2}\right)}=1.$$

5.27 $$\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{1+t}=1 \text{ et } \lim_{t\to0}\frac{\operatorname{sh}t}{t}=\lim_{t\to0}\operatorname{ch}t=1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{\ln\big(1+\operatorname{sh}x^2\big)}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln\big(1+\operatorname{sh}x^2\big)}{\operatorname{sh}x^2}\right)\left(\frac{\operatorname{sh}x^2}{x^2}\right)=1\,.$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{Arctg}x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x^2}=1.$$

D'où

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{x}{\operatorname{Arctg}x}}\sin^2x}{\ln\big(1+\operatorname{sh}x^2\big)}=\lim_{x\to0}e^{\frac{x}{\operatorname{Arctg}x}}\left(\frac{x^2}{\ln\big(1+\operatorname{sh}x^2\big)}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=e\,.$$

5.28 $$\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{1+t}=1\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{\ln\big(1+x^2\big)}{x^2}=1.$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{Arctg}x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x^2}=1.$$

D'où

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{Arctg}x\sin x}{\ln\big(1+x^2\big)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{Arctg}x}{x}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{x^2}{\ln\big(1+x^2\big)}\right)=1\,.$$

5.29 $$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x}=1 \text{ et}$$

$$\lim_{x\to0+}x\ln x=\lim_{x\to0+}\frac{\ln x}{x^{-1}}=\lim_{x\to0+}-x=0$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0+}\frac{\sin x^2\ln x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to0+}\left(\frac{\sin x^2}{x^2}\right)\left(\frac{x}{\ln(1+x)}\right)(x\ln x)=0.$$

5.30 $$\lim_{t\to0}\frac{\ln(1-t)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{-1}{1-t}=-1$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\dfrac{2}{\sqrt{x}}}{\ln\left(\sqrt{x}-1\right)-\ln\sqrt{x}}=\lim_{t\to0+}\frac{\sin 2t}{\ln(1-t)}$$

$$=\lim_{t\to0+}2\left(\frac{\sin 2t}{2t}\right)\left(\frac{t}{\ln(1-t)}\right)=-2\,.$$

5.31 $$\lim_{x\to1}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}{x-1}=\lim_{x\to1}-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)=-\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to1}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\sin(x-1)}{\big(x-1\big)^2}=\lim_{x\to1}\left(\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}{x-1}\right)\left(\frac{\sin(x-1)}{x-1}\right)=-\frac{\pi}{2}\,.$$

5.32 $$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x - \sin\dfrac{1}{x}}{e^x - e^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

5.33 $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1+\cos(x-\pi)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{x^2}{1-\cos x}\right) = 2\,.$$

5.34 $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch}^2 x - \cos x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} 2x + 2x\sin x}{2x} = 1.$$

5.35 $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^6}{x^{12}} = \frac{1}{2}.$$

5.36 $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x-x^3} - \sqrt[5]{x}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \left(\frac{2-3x^2}{2\sqrt{2x-x^3}} - \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}\right) = -\frac{7}{10}.$$

5.37 $$\lim_{x\to 0} x\ln|x| = \lim_{x\to 0} \frac{\ln|x|}{x^{-1}} = -\lim_{x\to 0} x = 0 \text{ et}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{1-x} = -1$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \ln|x|\,\ln(1-x) = \lim_{x\to 0} \bigl(x\ln|x|\bigr)\left(\frac{\ln(1-x)}{x}\right) = 0\,.$$

5.38 $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1 \text{ et}$$
$$\lim_{x\to 0} x\ln\bigl(e^x-1\bigr) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\bigl(e^x-1\bigr)}{x^{-1}} = -\lim_{x\to 0} \frac{x^2e^x}{e^x-1} = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \ln(1+x)\ln\bigl(e^x-1\bigr) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\bigl(x\ln\bigl(e^x-1\bigr)\bigr) = 0\,.$$

5.39 $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x) - 2\sin x + 2x^2}{4\ln(1+x) - \sin 4x + 2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2}{1+2x} - 2\cos x + 4x}{\dfrac{4}{1+x} - 4\cos 4x + 4x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{-4}{(1+2x)^2} + 2\sin x + 4}{\dfrac{-4}{(1+x)^2} + 16\,\sin 4x + 4} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{16}{(1+2x)^3} + 2\cos x}{\dfrac{8}{(1+x)^3} + 64\,\cos 4x} = \frac{1}{4}\,.$$

5.40 $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - 2\cos 6x + 1}{x} = \lim_{x\to 0}(-2\sin 2x + 12\sin 6x) = 0 \text{ et}$$
$$\lim_{x\to 0+} x\ln\sin x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln\sin x}{x^{-1}} = -\lim_{x\to 0+} \frac{x^2}{\operatorname{tg} x} = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0+} (\cos 2x - 2\cos 6x + 1)\ln\sin x = 0\,.$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0+}\big((\cos 2x - 2\cos 6x)\ln \operatorname{tg} x + \ln \sin 2x\big)\\
&= \lim_{x\to 0+}\big((\cos 2x - 2\cos 6x + 1)\ln \sin x - (\cos 2x - 2\cos 6x - 1)\ln \cos x + \ln 2\big)\\
&= \ln 2\,.
\end{aligned}$$

5.41 $\displaystyle \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{1+t} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln\big(1+x^2\big)}{x\sqrt{1-x}\,\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\big(1+x^2\big)}{x^2}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1\,.$$

5.42 $$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{\ln x} = \lim_{x\to 0+}\left(1-\frac{\ln\big(1+x^2\big)}{2\ln x}\right) = 1.$$

5.43 $$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)}{\ln x} = \lim_{x\to 0+}\left(2-\frac{\ln\big(1+x^2\big)}{\ln x}\right) = 2.$$

5.44 Puisque $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{3x} = -\frac{1}{3}$, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{-1+\cos 4x}{\ln\dfrac{\sin x}{x}} &= -4\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 4x\sin x}{x\cos x - \sin x}\\
&= -16\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3}{x\cos x - \sin x}\,\frac{\sin 4x}{4x}\,\frac{\sin x}{x}\right) = 48\,.
\end{aligned}$$

5.45 $\displaystyle \lim_{x\to 0+}\frac{\ln\sin x}{\ln x} = \lim_{x\to 0+}\frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$ et $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = -\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{2x} = \frac{-1}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0+}\frac{\ln\sin x\,\ln\cos x}{x^2\ln x} = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{\ln\sin x}{\ln x}\right)\left(\frac{\ln\cos x}{x^2}\right) = \frac{-1}{2}\,.$$

5.46 $$\lim_{x\to 0}\frac{(x-\operatorname{tg} x)\sin \pi x}{(1-\cos x)(1-\operatorname{ch} x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{\pi}{3}x^4 + \mathcal{R}_4(x)}{-\dfrac{x^4}{4} + \mathcal{R}_4(x)} = \frac{4\pi}{3}\,.$$

5.47 $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{ch} x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{th} x}{2x} = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{1+t} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{ch} x}{\ln\big(1+x^2\big)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\operatorname{ch} x}{x^2}\right)\left(\frac{x^2}{\ln\big(1+x^2\big)}\right) = \frac{1}{2}\,.$$

5.48 $\displaystyle \lim_{t\to 0}\frac{-t+\ln(1+t)}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{-1}{2(1+t)} = \frac{-1}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{-t+\ln(1+t)}{t^2}\right)\left(1+\sqrt{1-t^2}\right) = -1\,.$$

5.49 $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Argth} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x^2}=1$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0} 2\left(\frac{\operatorname{Argth} x}{x}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right)=2\,.$$

5.50 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x}+\cos x\right)=1\,.$$

5.51 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\ln\cos x}{1-\operatorname{ch} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg} x}{-\operatorname{sh} x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1-\big(\operatorname{tg} x\big)^2}{-\operatorname{ch} x}=0.$$

5.52 $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln\dfrac{\sin x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2\sin x}{x\cos x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+\mathcal{R}_3(x)}{-\dfrac{x^3}{3}+\mathcal{R}_3(x)}=-6$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Arctg}\big(x^2(1-\cos x)\big)}{\big(1-\sqrt{\cos x}\big)\ln\dfrac{\sin x}{x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{Arctg}\big(x^2(1-\cos x)\big)}{x^2(1-\cos x)}\right)\big(1+\sqrt{\cos x}\big)\left(\frac{x^2}{\ln\dfrac{\sin x}{x}}\right)=-12\,.$$

5.53 $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\,e^x-e^x+1}{x\big(e^x-1\big)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{2}+\mathcal{R}_2(x)}{x^2+\mathcal{R}_2(x)}=\frac{1}{2}.$$

5.54 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\big(\ln(1+x)\big)-\ln\big(1+\sin x\big)}{\big(1-\cos x\big)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^4}{12}+\mathcal{R}_4(x)}{\dfrac{x^4}{4}+\mathcal{R}_4(x)}=\frac{1}{3}.$$

5.55 $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{\sin 5x}-\frac{1}{5}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{20\,x^3+\mathcal{R}_3(x)}{25\,x^3+\mathcal{R}_3(x)}=\frac{4}{5}.$$

5.56 $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^4}{3}+\mathcal{R}_4(x)}{x^4+\mathcal{R}_4(x)}=\frac{1}{3}.$$

5.57 $$\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x-\cos 3x-3\operatorname{tg}^2 x-2}{\big(e^x-1\big)^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-21}{4}x^4+\mathcal{R}_4(x)}{x^4+\mathcal{R}_4(x)}=-\frac{21}{4}.$$

5.58 $$\lim_{x\to 0}\frac{6\sin x-6x+x^3}{x^3\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^5}{20}+\mathcal{R}_5(x)}{x^5+\mathcal{R}_5(x)}=\frac{1}{20}.$$

5.59 $$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\operatorname{sh} 4x}{x}-4}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{32}{3}x^2+\mathcal{R}_2(x)}{x\sin x}=\frac{32}{3}\,.$$

5.60 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{6\operatorname{sh}x-6x-x^3}{x^4\operatorname{sh}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^5}{20}+\mathcal{R}_5(x)}{x^5+\mathcal{R}_5(x)}=\frac{1}{20}.$

5.61 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\operatorname{tg}x}{x\big(1-\cos x\big)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{5}{6}x^3+\mathcal{R}_3(x)}{\dfrac{x^3}{2}+\mathcal{R}_3(x)}=-\frac{5}{3}.$

5.62 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^4\big(\operatorname{tg}x^2-\sin^2 x\big)}{1-\cos x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^8}{3}+\mathcal{R}_8(x)}{\dfrac{x^8}{2}+\mathcal{R}_8(x)}=\frac{2}{3}.$

5.63 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\operatorname{ch}x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sh}x}{\sin x}=-1$ et

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x\sin x}{\sin^2 x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^4}{6}+\mathcal{R}_4(x)}{x^4+\mathcal{R}_4(x)}=\frac{1}{6}.$$

D'où $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1-\operatorname{ch}x)(x^2-x\sin x)}{(1-\cos x)\sin^2 x^2}=-\frac{1}{6}\,.$

5.64 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-\cos x\right)^2}{x^2\cos x-\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{9}{4}x^4+\mathcal{R}_4(x)}{-\dfrac{x^4}{2}+\mathcal{R}_4(x)}=-\frac{9}{2}.$

5.65 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{6x^2+x^6-6\operatorname{Arcsin}x^2}{x^{10}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{9}{20}x^{10}+\mathcal{R}_{10}(x)}{x^{10}}=-\frac{9}{20}.$

5.66 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x^2}{12}+\mathcal{R}_2(x)}{x^2+\mathcal{R}_2(x)}=-\frac{1}{12}.$

5.67 $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{1-x+x^2}+\sqrt[3]{1+2x^2+x^3}\right)$

$$=\lim_{t\to 0-}\frac{-\sqrt{1-t+t^2}+\sqrt[3]{1+2t+t^3}}{t}=\lim_{t\to 0-}\frac{\dfrac{7}{6}t+\mathcal{R}_1(t)}{t}=\frac{7}{6}\,.$$

5.68 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln\big(1+\sin x\big)^2+x^2-2x}{\operatorname{tg}x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{3}+\mathcal{R}_3(x)}{\dfrac{x^3}{2}+\mathcal{R}_3(x)}=\frac{2}{3}.$

5.69 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\big(\ln\cos x\big)^2\sin x}{\big(e^x-1\big)^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^5}{4}+\mathcal{R}_5(x)}{x^5+\mathcal{R}_5(x)}=\frac{1}{4}.$

5.70 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(\operatorname{tg}x)+\ln(\cos x)}{x^2+\ln(1+x^2+x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{2}+\mathcal{R}_2(x)}{2x^2+\mathcal{R}_2(x)}=\frac{1}{4}\,.$

5.71 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg}x}-e^x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{3}+\mathcal{R}_3(x)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

5.72 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}-e^{\operatorname{ch}x}}{\cos x-\operatorname{ch}x}=\lim_{x\to 0}\frac{-ex^2+\mathcal{R}_2(x)}{-x^2+\mathcal{R}_2(x)}=e.$$

5.73 $$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x^2+x}-e^{2x}+\sin\pi x}{\cos\dfrac{\pi}{2}\,x}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+1)\,e^{x^2+x}-2\,e^{2x}+\pi\cos\pi x}{-\dfrac{\pi}{2}\,\sin\dfrac{\pi}{2}\,x}=\frac{2(\pi-e^2)}{\pi}.$$

5.74 $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{1}{\ln\sin x}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{2\ln\cos t+\sin^2 t}{\sin^2 t\ln\cos t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\dfrac{t^4}{2}+\mathcal{R}_4(t)}{-\dfrac{t^4}{2}+\mathcal{R}_4(t)}=1.$$

5.75 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^4+\ln^2\cos^2 x}{x^4+\sin x^4+x^2\operatorname{sh}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^4+\mathcal{R}_4(x)}{3x^4+\mathcal{R}_4(x)}=\frac{2}{3}.$$

5.76 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\operatorname{ch}x-\sin x}{x\ln\sqrt{1+x^2}+\operatorname{sh}^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{3}+\mathcal{R}_3(x)}{\dfrac{3}{2}x^3+\mathcal{R}_3(x)}=\frac{2}{9}.$$

5.77 $$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin x-\operatorname{Arcsin}x}{\operatorname{Arctg}^5 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{12}x^5+\mathcal{R}_5(x)}{x^5+\mathcal{R}_5(x)}=-\frac{1}{12}.$$

5.78 $$\lim_{x\to 0}\frac{6\operatorname{Arctg}x-6\sin x+x^3}{6\operatorname{tg}x-6\operatorname{Arcsin}x-x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{23}{20}\,x^5+\mathcal{R}_5(x)}{\dfrac{7}{20}\,x^5+\mathcal{R}_5(x)}=\frac{23}{7}.$$

5.79 $$\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{Arctg}\left(\dfrac{x}{2+2x+x^2}\right)-\sin x+x^2}{\operatorname{sh}^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{7}{12}x^3+\mathcal{R}_3(x)}{x^3+\mathcal{R}_3(x)}=\frac{7}{12}.$$

5.80 $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Argsh}x-\operatorname{Arcsin}x}{\operatorname{sh}x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x^3}{3}+\mathcal{R}_3(x)}{\dfrac{x^3}{3}+\mathcal{R}_3(x)}=-1.$$

5.81 $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Argth}x-\operatorname{Arctg}x}{\operatorname{sh}x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{3}x^3+\mathcal{R}_3(x)}{\dfrac{x^3}{6}+\mathcal{R}_3(x)}=4.$$

5.82 $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Arctg}(\operatorname{th}x)-x}{\operatorname{th}x-\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{2}{3}x^3+\mathcal{R}_3(x)}{-\dfrac{2}{3}x^3+\mathcal{R}_3(x)}=1.$$

5.83 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{th}x-\operatorname{sh}x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x^3}{2}+\mathcal{R}_3(x)}{x^3}=-\frac{1}{2}.$

5.84 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+\sin x)+x^2-2x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{3}+\mathcal{R}_3(x)}{x^3+\mathcal{R}_3(x)}=\frac{1}{3}.$

5.85 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}x^4+\ln^2\operatorname{ch}^2 x}{x^4+\sin^4 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^4+\mathcal{R}_4(x)}{17\,x^4+\mathcal{R}_4(x)}=\frac{2}{17}.$

5.86 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}^4 x+\ln\cos^2 x^2}{\sin x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^4+\mathcal{R}_4(x)}{x^4+\mathcal{R}_4(x)}=2.$

5.87 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg}x)}{\operatorname{Arctg}(\operatorname{Arcsin}x)-\operatorname{Arcsin}(\operatorname{Arctg}x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^7}{30}+\mathcal{R}_7(x)}{\dfrac{x^7}{30}+\mathcal{R}_7(x)}=1.$

5.88
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-e}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}\,e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x^2}{2}+\mathcal{R}_2(x)}{x^2}\,e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=-\frac{e}{2}\,.\end{aligned}$$

5.89 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x\cos x)-\operatorname{ch}(x\operatorname{ch}x)}{\sin(x\sin x)+\operatorname{sh}(x\operatorname{sh}x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+\mathcal{R}_2(x)}{2x^2+\mathcal{R}_2(x)}=-\frac{1}{2}.$

5.90 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\big(x+2^x\big)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2^x\ln 2}{x+2^x}=\ln 2$

$\displaystyle\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\big(x+2^x\big)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(x+2^x)}{x}}=2.$

5.91 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{2x}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\big(\cos x\big)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln\cos x}{x^2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$

5.92 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\big(1+\operatorname{tg}^2 x\big)-\operatorname{tg}x}{2x^2\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{3}\,x^3+\mathcal{R}_3(x)}{2x^3+\mathcal{R}_3(x)}=\frac{1}{3}$

$\displaystyle\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln(\frac{\operatorname{tg}x}{x})}{x^2}}=\sqrt[3]{e}\,.$

5.93 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x^3}{3}+\mathcal{R}_3(x)}{x^3+\mathcal{R}_3(x)}=-\frac{1}{3}$

$\displaystyle\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{1-\cos x}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\,.$

5.94 $$\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{t+2}\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\pi\sin\left(\dfrac{\pi}{t+2}\right)}{\big(t+2\big)^2}=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}x^2\ln\sin\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right)=\lim_{t\to 0+}\frac{\ln\sin\left(\dfrac{\pi}{t+2}\right)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{-\dfrac{\pi}{\big(t+2\big)^2}\cos\left(\dfrac{\pi}{t+2}\right)}{2t\sin\left(\dfrac{\pi}{t+2}\right)}=-\frac{\pi^2}{32}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}e^{x^2\ln\sin(\frac{\pi x}{2x+1})}=e^{-\frac{\pi^2}{32}}\,.$$

5.95 $$\lim_{x\to 0}\frac{\big(1+x\big)^5-1}{\operatorname{Arctg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x+\mathcal{R}_1(x)}{x+\mathcal{R}_1(x)}=5$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\big(e^{(1+)^5-1}\big)^{\frac{1}{\operatorname{Arctg}x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{(1+x)^5-1}{\operatorname{Arctg}x}}=e^5\,.$$

5.96 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\ln x}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\big(\ln x\big)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(\ln x)}{x}}=1\,.$$

5.97 $$\lim_{x\to 0+}\ln x\,\ln(1+x)=\lim_{x\to 0+}(x\ln x)\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0+}\big(1+x\big)^{\ln x}=\lim_{x\to 0+}e^{\ln x\,\ln(1+x)}=1\,.$$

5.98 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{Arctg}x\right)}{\ln x}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x}{1+x^2}}{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{Arctg}x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}=-1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctg}x)}{\ln x}}=\frac{1}{e}\,.$$

5.99 $$\lim_{x\to 0+}\ln x\,\sin x=\lim_{x\to 0+}(x\ln x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0+}x^{\sin x}=\lim_{x\to 0+}e^{\ln x\,\sin x}=1\,.$$

5.100 $$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\ln\left(\dfrac{\sqrt[3]{1+3t+2t^3}-\sqrt[3]{1+t^3}}{t}\right)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{-t+\mathcal{R}_1(t)}{t}=-1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)^x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln(\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}-\sqrt[3]{x^3+1})}=\tfrac{1}{e}\,.$$

$\boxed{\textbf{5.101}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\big((x+1)\,e^{\frac{1}{1+x}}-x\,e^{\frac{1}{x}}\big)$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{(t+1)\,e^{\frac{t}{t+1}}-e^t}{t}=\lim_{t\to 0+}\left(\frac{t+2}{t+1}\,e^{\frac{t}{t+1}}-e^t\right)=1\,.$$

$\boxed{\textbf{5.102}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)}{x}$

$$=\lim_{t\to 0+}t\ln\left(e-\big(1+t\big)^{\frac{1}{t}}\right)=\lim_{t\to 0+}\left(t\ln t+t\ln\left(\frac{e}{2}+\frac{\mathcal{R}_1(t)}{t}\right)\right)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(e-(1+\frac{1}{x})^x)}{x}}=1\,.$$

$\boxed{\textbf{5.103}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}+4^{\frac{1}{x}}}{3}\right)=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\ln\big(2^t+3^t+4^t\big)-\ln 3}{t}$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{2^t\ln 2+3^t\ln 3+4^t\ln 4}{2^t+3^t+4^t}=\frac{\ln 24}{3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}+4^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln(\frac{2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}+4^{\frac{1}{x}}}{3})}=2\sqrt[3]{3}\,.$$

$\boxed{\textbf{5.104}}$ La limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}+\frac{\mathcal{R}_2(x)}{x^2}}{x^{k-2}}$$

existe si et seulement si $k\le 2$.

$\boxed{\textbf{5.105}}$ $0=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^5}\left(\operatorname{ch}x-\dfrac{1+\alpha x^2}{1+\beta x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\big(1+\beta x^2\big)\operatorname{ch}x-\big(1+\alpha x^2\big)}{x^5(1+\beta x^2)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}-\alpha+\beta\right)x^2+\left(\frac{1}{24}+\frac{\beta}{2}\right)x^4+\left(\frac{1}{720}+\frac{\beta}{24}\right)x^6+\mathcal{R}_6(x)}{x^5\big(1+\beta x^2\big)}$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\frac{5}{12}\text{ et }\beta=-\frac{1}{12}\,.$$

$\boxed{\textbf{5.106}}$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{af(x)-xf(a)}{x-a}=a\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a)=af'(a)-f(a).$

$\boxed{\textbf{5.107}}$ *Remarque* : $f'(a)\neq 0$ et $f'\in\mathbf{C}^0\Rightarrow\exists\,\delta>0$ tel que pour tout $x\in[a-\delta,a+\delta]:f'(x)\neq 0\Rightarrow\forall\,x\in[a-\delta,a+\delta]:f(x)\neq f(a)$ (théorème de Rolle).

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{(x-a)\,f'(a)}\right)=-\lim_{x\to a}\frac{f''\big(a+\theta_{a,x}(x-a)\big)}{2f'(a)\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

$$=\frac{-f''(a)}{2\big(f'(a)\big)^2}\,.$$

5.108 1) Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $0 \leq \frac{f(x)-f(0)}{x} \leq x^2$, on a

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0\,.$$

2) Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Alors, il existe une suite $\big(a_n\big)$ de rationnels et une suite $\big(b_n\big)$ d'irrationnels qui convergent toutes les deux vers a et

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = a^3 \neq 0 = \lim_{n \to +\infty} f(b_n)\,.$$

Par conséquent, la fonction f est discontinue en a.

5.109 Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\sin x^k}{x} = \frac{\sin x^k}{x^k}\, x^{k-1}$, la fonction f est dérivable en 0 si et seulement si $k \geq 1$.

5.110 Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\frac{f(x)-f(0)}{x} = x^{k-1} \sin \frac{1}{x}$, la fonction f est dérivable en 0 si et seulement si $k > 1$.

5.111 En effet, $f'(x) = \begin{cases} 2x \cos \dfrac{1}{x} + \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

et $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ n'existe pas.

5.112
$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - xf'(0)}{x^2} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} = \frac{f''(0)}{2}\,. \end{aligned}$$

5.113 1) $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{n \to +\infty} n\left(f\left(\dfrac{1}{n}\right) - f(0)\right)$.

2) Pour $f(x) = |x|$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n\big(f\big(\frac{1}{n}\big) - f(0)\big) = 1$, mais elle n'est pas dérivable en 0.

5.114 1)
$$\begin{aligned} &\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \\ &\qquad = \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} \right) = f'(a)\,. \end{aligned}$$

2) Non. Contre-exemple : $f(x) = |x|$ et $a = 0$.

5.115 1) $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{x}{2} + x^2 \sin \dfrac{1}{x}}{x} = \dfrac{1}{2} > 0\,.$

2) En effet, il suffit de remarquer que pour tout entier $n > 0$ et tout $x \in \left[\frac{1}{2(n+1)\pi}, \frac{3}{(5+6n)\pi}\right]$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \cos \frac{1}{x} + 2x \sin \frac{1}{x} < 0\,.$$

5.116 La fonction f étant continue sur l'intervalle ouvert I, F est un intervalle ouvert et $f^{\,-1} : F \to I$ est continue. En particulier,

$$\lim_{y \to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(b) &= \lim_{y\to b}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b} = \lim_{y\to b}\frac{1}{\dfrac{y-b}{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}}\\ &= \lim_{y\to b}\frac{1}{\dfrac{f\left(f^{-1}(y)\right)-f(a)}{f^{-1}(y)-a}} = \frac{1}{f'(a)}\,.\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5.117}}$ Puisque pour tout $x \in \,]0,2[\, : \left|\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}-2\right| \leq |x-1|$, on a

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2 \neq 0\,.$$

Montrons à présent que la fonction f^{-1} n'est pas continue en $f(1)=1$, donc pas dérivable en ce point. En effet, soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{Q}\cap\,]1,2[$ qui converge vers $\sqrt{2}$. Alors, la suite $\left(y_n = \frac{2}{a_n^2}\right)$ converge vers 1 et pour tout $n\in\mathbb{N} : y_n \in \mathbb{Q}\cap\,]0,2[$ et $\sqrt{y_n}\notin\mathbb{Q}$. D'où

$$\lim_{n\to+\infty} f^{-1}(y_n) = \lim_{n\to+\infty} y_n + 2 = 3 \neq 1 = f^{-1}(1)\,.$$

$\boxed{\mathbf{5.118}}$ Posons,

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln\sqrt[3]{1+\cos^6\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{1+x+x^2}\right)}\\ &= \frac{1}{3}\ln\left(1+\cos^6\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{1+x+x^2}\right)\right), \quad x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -\frac{\pi}{4}\,\frac{\cos^5\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{1+x+x^2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{1+x+x^2}\right)}{1+\cos^6\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{1+x+x^2}\right)}\,\frac{1+2x}{\sqrt{1+x+x^2}}.$$

L'équation de la tangente à la courbe $y=f(x)$ au point $x=0$ est

$$y = f(0)+f'(0)x = \frac{1}{3}\left(2\ln 3 - 3\ln 2\right) - \frac{\pi}{36}\,x\,.$$

$\boxed{\mathbf{5.119}}$ Puisque pour tout $x\in\mathbb{R} : f'(x) = 3x^2+1 > 0$, la fonction f est strictement croissante donc injective. Comme de plus elle est continue et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,,$$

elle est aussi surjective. La fonction f est bijective et $f(1)=0$. Ainsi,

$$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}\,.$$

$\boxed{\textbf{5.120}}$ Puisque pour tout $x \in \,]0, +\infty[\, : f'(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x} > 0$, la fonction f est strictement croissante donc injective. Comme de plus elle est continue et

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,,$$

elle est aussi surjective. La fonction f est bijective et $f(1) = 0$. Ainsi,

$$\bigl(f^{-1}\bigr)'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}\,.$$

Par conséquent l'équation de la tangente à la courbe $y = f^{-1}(x)$ au point $x = 0$ est

$$y = f^{-1}(0) + x\bigl(f^{-1}\bigr)'(0) = 1 + \frac{x}{2}\,.$$

$\boxed{\textbf{5.121}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R} : f'(x) = 4 + 2\sin^2 x \sin 2x > 0$, la fonction f est strictement croissante donc injective. Comme de plus elle est continue et

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,,$$

elle est aussi surjective. La fonction f est bijective et $f(0) = 0$. Ainsi,

$$\bigl(f^{-1}\bigr)'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4}\,.$$

Par conséquent l'équation de la tangente à la courbe $y = f^{-1}(x)$ au point $x = 0$ est

$$y = f^{-1}(0) + x\bigl(f^{-1}\bigr)'(0) = \frac{x}{4}\,.$$

$\boxed{\textbf{5.122}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R} : f'(x) = e^x - \sin x + 2 > 0$, la fonction f est strictement croissante donc injective. Comme de plus elle est continue et

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,,$$

elle est aussi surjective. La fonction f est bijective et $f(0) = 2$. Ainsi,

$$\bigl(f^{-1}\bigr)'(2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}\,.$$

Par conséquent l'équation de la normale à la courbe $y = f^{-1}(x)$ au point $x = 0$ est

$$y = f^{-1}(2) - \frac{1}{\bigl(f^{-1}\bigr)'(2)}\,(x-2) = -3(x-2)\,.$$

$\boxed{\textbf{5.123}}$ Puisque pour tout $x \in \,]0, +\infty[\, : f'(x) = 1 + e^{x-1} + \frac{1}{x} > 0$, la fonction f est strictement croissante donc injective. Comme de plus elle est continue, $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, on a aussi, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$. Par conséquent la fonction f est bijective. Ainsi, puisque $f(1) = 0$ et $\bigl(f^{-1}\bigr)'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3}$, l'équation de la normale à la courbe $y = f^{-1}(x)$ au point $x = 0$ est $y = -3x + 1$.

5.124 Puisque pour tout $x > 0$: $f'(x) = 5x^4 + \frac{3x^2+1}{3(x^3+x+1)} > 0$, la fonction continue f est strictement croissante donc injective. Comme de plus $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, elle est aussi surjective. Par conséquent elle est bijective et $f(1) = 1 + \frac{\ln 3}{3}$. Ainsi, l'équation de la normale à la courbe $y = f^{-1}(x)$ au point $x = 1 + \frac{\ln 3}{3}$ est

$$\begin{aligned} y &= f^{-1}\left(1 + \frac{\ln 3}{3}\right) - f'(1)\left(x - 1 - \frac{\ln 3}{3}\right) \\ &= 1 - \frac{49}{9}\left(x - 1 - \frac{\ln 3}{3}\right) = -\frac{49}{9}x + \frac{58}{9} + \frac{49 \ln 3}{27} . \end{aligned}$$

5.125 Puisque pour tout $x \in]1, +\infty[$:

$$f'(x) = -\frac{3x^2}{\left(1+x^3\right)^2} - \frac{5x^4}{2\sqrt{\left(1+x^5\right)^3}} - 2\,e^{-2x} < 0 ,$$

la fonction f est strictement décroissante donc injective. Comme de plus elle est continue et $\lim\limits_{x \to -1+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, elle est aussi surjective. La fonction f est bijective et $f(0) = 3$. Ainsi,

$$\left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{2} .$$

Par conséquent l'équation de la normale à la courbe $y = f^{-1}(x)$ au point $x = 3$ est

$$y = f^{-1}(3) - \frac{1}{\left(f^{-1}\right)'(3)}\,(x - 3) = 2(x - 3) .$$

5.126 Soit $h : E \to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g\big(f(a)\big)}{y - f(a)} & \text{si } y \neq f(a) \\ g'\big(f(a)\big) & \text{si } y = f(a) . \end{cases}$$

Alors, pour tout $x \in E \setminus \{a\}$:

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a} = h\big(f(x)\big)\frac{f(x) - f(a)}{x - a} .$$

Ainsi, puisque h est continue en $f(a)$ et que la fonction f est dérivable en a (donc continue en ce point),

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} h\big(f(x)\big)\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= h\big(f(a)\big)f'(a) = g'\big(f(a)\big)f'(a) . \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5.127}}$ Puisque pour $x > 1$: $f'(x) = \frac{2}{x}(1+\ln x) > 0$, la fonction continue f est strictement croissante donc injective. Comme de plus $f(1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, elle est aussi surjective. La fonction f est donc bijective et $f(e) = 3$. Ainsi,

$$\big(f^{-1}\big)'(3) = \frac{1}{f'(e)} = \frac{e}{4}\,.$$

Par conséquent l'équation de la normale à la courbe $y = f^{-1}(x)$ au point $x = 3$ est

$$y = f^{-1}(3) - \frac{1}{\big(f^{-1}\big)'(3)}\,(x-3) = e - \frac{4}{e}(x-3)\,.$$

$\boxed{\mathbf{5.128}}$ Puisque $f(0) = 3$, $f'(0) = 2$ et $g'(3) = \frac{3}{41}$, on a

$$\big(g \circ f\big)'(0) = g'\big(f(0)\big)\, f'(0) = \frac{6}{41}\,.$$

$\boxed{\mathbf{5.129}}$ Puisque $f(0) = 1$, $f'(0) = 6$ et $g'(1) = \frac{1}{10}$, on a

$$\big(g \circ f\big)'(0) = g'\big(f(0)\big)\, f'(0) = \frac{3}{5}\,.$$

$\boxed{\mathbf{5.130}}$ Puisque $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$ et $g'(0) = 3$, on a

$$\big(g \circ f\big)'(0) = g'\big(f(0)\big)\, f'(0) = 6\,.$$

$\boxed{\mathbf{5.131}}$ La fonction f étant 2π-périodique et continue, on peut écrire, grâce au théorème de la valeur intermédiaire, que

$$\operatorname{Im} f = \left[\min_{-\pi\le x\le\pi} f(x)\,,\ \max_{-\pi\le x\le\pi} f(x)\right].$$

Ainsi, pour que la fonction $f : \mathbb{R} \to \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$ soit surjective, il nous suffit de montrer que

$$\min_{-\pi\le x\le\pi} f(x) = \frac{1}{2} \text{ et } \max_{-\pi\le x\le\pi} f(x) = \frac{5}{2}\,.$$

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{3 + 2\sin x}{\sqrt{2}\left(\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \left|\sin\frac{x}{2}\right|\right)}$$

ou encore, en posant $x = 2t$,

$$g(t) = \frac{3 + 2\sin 2t}{\sqrt{2}\big(|\cos t| + |\sin t|\big)}\,.$$

1) Puisque pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[: g'(t) = \dfrac{(\cos t + \sin t)(7 - 2\sin 2t)}{\sqrt{2}\big(\cos t - \sin t\big)^2}$,
$g'(t) < 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[$ et $g'(t) > 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[$. Par conséquent, g étant continue, elle est strictement décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$ et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$.

2) Puisque pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: g'(t) = \dfrac{(\cos t - \sin t)(1 + 2\sin 2t)}{\sqrt{2}\big(\cos t + \sin t\big)^2}$,
$g'(t) > 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et $g'(t) < 0$ sur $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$. Par conséquent, g étant continue, elle est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

En résumé, la fonction g est strictement décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Comme de plus $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ on peut écrire

$$\min_{-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}} g(t) = g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \text{ et } \max_{-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}} g(t) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{2}$$

ou encore

$$\min_{-\pi \le x \le \pi} f(x) = \frac{1}{2} \text{ et } \max_{-\pi \le x \le \pi} f(x) = \frac{5}{2}\,.$$

$\boxed{\mathbf{5.132}}$ Pour les besoins de la démonstration, on va supposer que l'extremum est un maximum (dans l'autre cas remplacer f par $-f$). Puisque pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\} : f'(x) \neq 0$, la fonction f garde un signe constant dans chacun des deux intervalles ouverts $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$ (ex. 5.280). f admettant un maximum local en a, $f'(x) > 0$ sur $]-\infty, a[$ et $f'(x) < 0$ sur $]a, +\infty[$. Par conséquent, la fonction continue f est strictement croissante dans $]-\infty, a]$ et strictement décroissante dans $[a, +\infty[$. Autrement dit, elle atteint son maximum (global) en a.

$\boxed{\mathbf{5.133}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R} : f'(x) = 3x^2 - 10\,x + 3$, les points stationnaires de la fonction f sont $x = \frac{1}{3}$ et $x = 3$. Comme de plus pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = 6x - 10$, on a

1) $x = \frac{1}{3}$. $f''\left(\frac{1}{3}\right) = -8 < 0 \Rightarrow f$ admet un maximum local en ce point.

2) $x = 3$. $f''(3) = 8 > 0 \Rightarrow f$ admet un minimum local en ce point.

$\boxed{\mathbf{5.134}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R} : f'(x) = 1 + \cos x - \sin x = 1 - \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, les points stationnaires de la fonction f sont $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $x = \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Comme de plus, pour tout $x \in \mathbb{R} : f''(x) = -\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, on a

1) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. $f''\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1 < 0 \Rightarrow f$ admet un maximum local en ces points.

2) $x = \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. $f''(\pi + 2k\pi) = 1 > 0 \Rightarrow f$ admet un minimum local en ces points.

$\boxed{\mathbf{5.135}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f'(x) = \frac{x^2 e^x - 1}{x^2}$, les zéros et le signe de la fonction f' sont les mêmes que ceux de la fonction auxiliaire $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2\, e^x - 1$. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = x(x+2)\, e^x$, on a que $g'(x) < 0$ sur $]-2, 0[$ et $g'(x) > 0$ sur $]-\infty, -2[\, \cup\,]0, +\infty[$. Par conséquent, la fonction g étant continue, elle est strictement décroissante sur $[-2, 0]$ et strictement croissante sur $]-\infty, -2]$ et sur $[0, +\infty[$.

1) Sur $]-\infty, 0]$, la fonction g atteint son maximum en -2 et $g(-2) = 4\, e^{-2} - 1 < 0$; ce qui entraîne que $g(x) < 0$ sur $]-\infty, 0]$. La fonction f n'admet donc pas de point stationnaire sur $]-\infty, 0[$.

2) Sur $[0, +\infty[$, puisque la fonction g est continue, strictement croissante et

$$g(0) = -1 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty\,,$$

il existe un unique nombre $\alpha > 0$ pour lequel $g(\alpha) = 0$. De plus, $g(x) < 0$ sur $[0, \alpha[$ et $g(x) > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$.

En conclusion, la fonction f possède un unique point stationnaire ($x = \alpha$) et en ce point, elle admet un minimum local.

$\boxed{\mathbf{5.136}}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = (1 + \sin x)\cos x = \cos x + \frac{1}{2}\sin 2x$,

1) Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x + \cos 2x = -\sin x + 1 - 2\sin^2 x \\ &= -2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)(\sin x + 1)\,, \end{aligned}$$

les points stationnaires de la fonction f sont $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ et $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Comme de plus pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = -\cos x - 2\sin 2x = -(1 + 4\sin x)\cos x\,,$$

on a

1a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. $f''(x) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0 \Rightarrow f$ admet un maximum local en ces points.

1b) $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. $f''(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2} > 0 \Rightarrow f$ admet un minimum local en ces points.

1c) $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. f n'admet pas d'extremum local en ces points, mais un point d'inflexion.

Remarque : La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étant continue et 2π-périodique, les extrema locaux ci-dessus sont aussi des extrema globaux. Autrement dit,

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ et } \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}\,.$$

2) Posons $\alpha = -\operatorname{Arcsin}\frac{1}{4}$. La fonction $f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et 2π-périodique. Comme de plus, $f''(x) > 0$ sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi-\alpha\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi+\alpha\right[$ et $f''(x) < 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\pi-\alpha, \frac{3\pi}{2}\right[\cup]2\pi+\alpha, 2\pi[$, la fonction f admet un point d'inflexion en

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,,\ \pi-\alpha+2k\pi\,,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi \text{ et } 2\pi+\alpha+2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}\,.$$

$\boxed{\mathbf{5.137}}$ Posons $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \mu x + \sigma$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \mu \text{ et } f''(x) = 6\alpha x + 2\beta\,.$$

Par conséquent pour que la courbe C admette un minimum local au point $(0,1)$ et un point d'inflexion en $(1,3)$ il faut que

$$f(0) = \sigma = 1 \text{ et } f'(0) = \mu = 0$$

et

$$f(1) = \alpha+\beta+\mu+\sigma = 3 \text{ et } f''(1) = 6\alpha + 2\beta = 0\,;$$

ce qui implique $\alpha = -1$, $\beta = 3$, $\mu = 0$ et $\sigma = 1$.

Finalement en constatant que $f''(0) = 6 > 0$ et $f'''(1) = 6\alpha = -6 \neq 0$, on peut conclure que la courbe C d'équation $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ répond à la question.

$\boxed{\mathbf{5.138}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P'(x) = 5x^3(x-4)$, la fonction P admet exactement deux points stationnaires, à savoir : $x = 0$ et $x = 4$. Comme de plus

$$P(-4) = -2\,302\,,\ P(0) = 2\,,\ P(4) = -254 \text{ et } P(6) = 1\,298\,,$$

la valeur minimale de P sur $[-4,6]$ vaut $-2\,302$ et sa valeur maximale vaut $1\,298$.

$\boxed{\mathbf{5.139}}$ Puisque pour tout $x \in \left]\frac{\pi}{2}, 2\pi\right[$: $f'(x) = \left(\operatorname{tg}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right)\cos\frac{1}{x} > 0$, la fonction continue $f : \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right] \to \mathbb{R}$ est strictement croissante. Par conséquent

$$\min_{x\in[\frac{\pi}{2},2\pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ et } \max_{x\in[\frac{\pi}{2},2\pi]} f(x) = f(2\pi)\,.$$

$\boxed{\mathbf{5.140}}$ Puisque pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 4\right]$: $f(x) = e^{-\ln^2 x}$, on a que pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}, 4\right[$:

$$f'(x) = \frac{-2\ln x}{x}\, e^{-\ln^2 x}\,;$$

ce qui entraîne que $f'(x) > 0$ sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ et $f'(x) < 0$ sur $]1,4[$. La fonction continue f est donc strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et strictement décroissante sur $[1,4]$. Comme de plus $f\left(\frac{1}{2}\right) > f(4)$, on a

$$\min_{x\in[\frac{1}{2},4]} f(x) = f(4) = e^{-\ln^2 4} \text{ et } \max_{x\in[\frac{1}{2},4]} f(x) = f(1) = 1\,.$$

$\boxed{\textbf{5.141}}$ Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$g(x) = \sin^2 x + 2\cos x + 1 = 3 - \big(\cos x - 1\big)^2 .$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{-10 + 2g(x)}{4 - g(x)} \text{ et } f'(x) = \frac{-2g'(x)}{\big(4 - g(x)\big)^2} = \frac{4(1 - \cos x)\sin x}{(4 - g(x))^2} .$$

Ainsi, $f'(x) > 0$ sur $]0, \pi[$ et $f'(x) < 0$ sur $]\pi, 2\pi[$; ce entraîne que la fonction continue f est strictement croissante sur $[0, \pi]$ et strictement décroissante sur $[\pi, 2\pi]$. Comme de plus elle est 2π-périodique (car g l'est), on a

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(0) = -4 \text{ et } \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(\pi) = -\frac{12}{5} .$$

$\boxed{\textbf{5.142}}$ Soit $g, h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ les deux fonctions auxiliaires définies respectivement par

$$g(x) = \frac{2}{\sqrt{3 + e^{x^2}}} \text{ et } h(x) = \frac{16 - 7x^2}{16 - 5x^2} .$$

D'une part, $\max\limits_{x \in [-1,1]} g(x) = g(0) = 1$.

D'autre part, pour tout $x \in \,]-1, 1[$: $h'(x) = \dfrac{-64\, x}{\big(16 - 5x^2\big)^2}$.

D'où $h'(x) > 0$ sur $]-1, 0[$ et $h'(x) < 0$ sur $]0, 1[$; ce qui entraîne que la fonction continue h est strictement croissante sur $[-1, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, 1]$. Par conséquent

$$\max_{x \in [-1,1]} h(x) = h(0) = 1 .$$

Finalement, en constatant que $f = g + h$, on a $\max\limits_{x \in [-1,1]} f(x) = f(0) = 2$.

$\boxed{\textbf{5.143}}$ La fonction $g : [0, +\infty[\, \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = \operatorname{th}\big(\ln\sqrt{1 + t}\big)$ étant strictement croissante, on a

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}} g\big(x^2\big) = g(0) = 0 .$$

$\boxed{\textbf{5.144}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{x^3 + 7x^2 + 2x + 2}{x^6 + 2x^2 + x + 1} = 2 + 3x^2 + \mathcal{R}_2(x) ,$$

on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 6 > 0$. Par conséquent la fonction f admet un minimum local en 0.

$\boxed{\textbf{5.145}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{x^2 + 14\,x + 4}{10\,x^4 + 8x^2 + 7x + 2} = 2 - \frac{15}{2}x^2 + \mathcal{R}_2(x)\,,$$

on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = -15 < 0$. Par conséquent la fonction f admet un maximum local en 0.

$\boxed{\textbf{5.146}}$ Puisque pour tout $x > -1$:

$$f(x) = \sin x - 2\ln\left(2 + \frac{x}{1+x^2}\right) = -2\ln 2 + \frac{x^2}{4} + \mathcal{R}_2(x)\,,$$

on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = \frac{1}{2} > 0$. Par conséquent la fonction f admet un minimum local en 0.

$\boxed{\textbf{5.147}}$ Puisque pour tout $x \in \left]-\infty, 1\right[$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 - 2x + 2x^2}}{1 - x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \mathcal{R}_2(x)\,,$$

on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 1 > 0$. Par conséquent la fonction f admet un minimum local en 0.

$\boxed{\textbf{5.148}}$ Puisque pour tout $|x| < \frac{\pi}{4}$:

$$f(x) = \frac{\operatorname{ch}^4 x - \operatorname{sh}^4 x}{\cos^4 x - \sin^4 x} = \frac{\operatorname{ch} 2x}{\cos 2x} = 1 + 4x^2 + \mathcal{R}_2(x)\,,$$

on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 8 > 0$. Par conséquent la fonction f admet un minimum local en 0.

$\boxed{\textbf{5.149}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{2 - \cos x}{\left(1 + \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 x\right)\left(1 + \operatorname{th}^2 x\right)} = 1 - \frac{5}{2}\,x^2 + \mathcal{R}_2(x)\,,$$

on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = -5 < 0$. Par conséquent la fonction f admet un maximum local en 0.

$\boxed{\textbf{5.150}}$ Puisque pour tout $|x| < \frac{\pi}{2}$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{\cos x}}{1 + x^2} = 1 - \frac{5}{4}\,x^2 + \mathcal{R}_2(x)\,,$$

on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = -\frac{5}{2} < 0$. Par conséquent la fonction f admet un maximum local en 0.

$\boxed{\textbf{5.151}}$ Puisque pour tout $|x| < \frac{\pi}{4}$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}}{1 + \sin^2 x} = \frac{\sqrt{\cos 2x}}{1 + \sin^2 x} = 1 - 2x^2 + \mathcal{R}_2(x)\,,$$

on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = -4 < 0$. Par conséquent la fonction f admet un maximum local en 0.

$\boxed{\mathbf{5.152}}$ Puisque pour tout $|x| < \frac{\pi}{4}$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{\cos^4 x - \sin^4 x}}{\cos x + \sin^2 x} = \frac{\sqrt{\cos 2x}}{\cos x + \sin^2 x} = 1 - \frac{3}{2}\,x^2 + \mathcal{R}_2(x)\,,$$

on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = -3 < 0$. Par conséquent la fonction f admet un maximum local en 0.

$\boxed{\mathbf{5.153}}$ Puisque pour tout $|x| < \frac{\pi}{4}$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{\cos^4 x - \sin^4 x}}{x^2 + \cos^2 x} = \frac{\sqrt{\cos 2x}}{x^2 + \cos^2 x} = 1 - x^2 + \mathcal{R}_2(x)\,,$$

on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = -2 < 0$. Par conséquent la fonction f admet un maximum local en 0.

$\boxed{\mathbf{5.154}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{1 + x^2 + \operatorname{sh}^2 x}{\sqrt{\operatorname{ch}^4 x - \operatorname{sh}^4 x}}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{x^2}{2} + \mathcal{R}_2(x)\,,$$

on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 1 > 0$. Par conséquent la fonction f admet un minimum local en 0.

$\boxed{\mathbf{5.155}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \frac{x^2 + \sqrt{1 + x^2}}{2 + \cos^2 x} = \frac{1}{3} + \frac{11}{18}\,x^2 + \mathcal{R}_2(x)\,,$$

on a $g'(0) = 0$ et $g''(0) = \frac{11}{9} > 0$. Par conséquent la fonction g admet un minimum local en 0 ; ce qui entraîne, la fonction $\operatorname{Arctg} t^3$ étant strictement croissante, que la fonction f admet aussi un minimum local en 0.

$\boxed{\mathbf{5.156}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{2}\,\ln\!\left(x^2 + \frac{2 + x^6}{1 + x^2 + x^4}\right) = \frac{\ln 2}{2} - \frac{x^2}{4} + \mathcal{R}_2(x)\,,$$

on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = -\frac{1}{2} < 0$. Par conséquent la fonction f admet un maximum local en 0.

$\boxed{\mathbf{5.157}}$ Puisque pour tout $|x| < 1$:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,\ln \operatorname{ch} x - \ln\bigl(1 + x^2 + x^3\bigr)\right) = -\frac{3}{8}\,x^2 + \mathcal{R}_2(x)\,,$$

on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = -\frac{3}{4} < 0$. Par conséquent la fonction f admet un maximum local en 0.

$\boxed{\textbf{5.158}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}\left(\ln\left(x^2 + \cos^2 x\right) - \ln \operatorname{ch}(2x)\right)}{1 + \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 x} = -x^2 + \mathcal{R}_2(x)\,,$$

on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = -2 < 0$. Par conséquent la fonction f admet un maximum local en 0.

$\boxed{\textbf{5.159}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2 + x^4}{1 + x^2} + \operatorname{sh} x^2} = \sqrt{2} - \frac{x^2}{2\sqrt{2}} + \mathcal{R}_2(x)\,,$$

on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$. Par conséquent la fonction f admet un maximum local en 0.

$\boxed{\textbf{5.160}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2 + \sqrt{1 + x^2}}}{1 + 2\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{2} - \frac{x^4}{16} + \mathcal{R}_4(x)\,,$$

on a $f'(0) = f''(0) = f'''(0)$ et $f^{(4)}(0) = -\frac{3}{2} < 0$. Par conséquent la fonction f admet un maximum local en 0.

$\boxed{\textbf{5.161}}$ Puisque pour tout $|x| < \frac{\pi}{4}$:

$$f(x) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{1 + \operatorname{Arctg} x^2}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}}\right) = \frac{\pi}{4} + x^2 + \mathcal{R}_2(x)\,,$$

on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 2 > 0$. Par conséquent la fonction f admet un minimum local en 0.

$\boxed{\textbf{5.162}}$ Puisque pour tout $|x| < \frac{\pi}{4}$:

$$f(x) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{\operatorname{Argsh} x + \operatorname{Argth} x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}}\right) = 2x - \frac{x^3}{2} + \mathcal{R}_3(x)\,,$$

on a $f''(0) = 0$ et $f'''(0) = -3 \neq 0$. Par conséquent la fonction f admet un point d'inflexion en 0.

$\boxed{\textbf{5.163}}$ Puisque pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$:

$$f(x) = 3x^2 + 8\sqrt{\cos x + \sin x} = 8 + 4x + \frac{5}{6}x^3 + \mathcal{R}_3(x)\,,$$

on a $f''(0) = 0$ et $f'''(0) = 5 \neq 0$. Par conséquent la fonction f admet un point d'inflexion en 0.

$\boxed{\textbf{5.164}}$ Puisque pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$f(x) = 2 + x + \frac{x^3}{3} + \mathcal{R}_3(x)\,,$$

on a $f''(0) = 0$ et $f'''(0) = 2 \neq 0$. Par conséquent f admet un point d'inflexion en 0.

$\boxed{\textbf{5.165}}$ Puisque pour tout $x > -1$:

$$f(x) = 1 + \frac{x^3}{6} + \mathcal{R}_3(x)\,,$$

on a $f''(0) = 0$ et $f'''(0) = 1 \neq 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un point d'inflexion en 0.

$\boxed{\textbf{5.166}}$ Puisque pour tout $x > -\frac{1}{2}$:

$$f(x) = \frac{\ln 2}{3} + \frac{2x}{3} - \frac{4x^3}{9} + \mathcal{R}_3(x)\,,$$

on a $f''(0) = 0$ et $f'''(0) = -\frac{8}{3} \neq 0$. Par conséquent la fonction f admet un point d'inflexion en 0.

$\boxed{\textbf{5.167}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{R}_3(x)\,,$$

on a $f''(0) = 0$ et $f'''(0) = -2 \neq 0$. Par conséquent la fonction f admet un point d'inflexion en 0.

$\boxed{\textbf{5.168}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = e^{-\frac{\sin^2 x}{2}} \sin x = x - \frac{2}{3}\,x^3 + \mathcal{R}_3(x)\,,$$

on a $f''(0) = 0$ et $f'''(0) = -4 \neq 0$. Par conséquent la fonction f admet un point d'inflexion en 0.

$\boxed{\textbf{5.169}}$ 1) Sur $\mathbb{R}/\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$: $x + 2x^2 > 0$ donc $x + 2x^2 + \cos^2 x > 0$.
Sur $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$:

$$\begin{aligned} x + 2x^2 + \cos^2 x &\geq \min_{-\frac{1}{2} \leq x \leq 0} x + 2x^2 + \min_{-\frac{1}{2} \leq x \leq 0} \cos^2 x \geq -\frac{1}{8} + \cos^2 \frac{1}{2} \\ &> -\frac{1}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{3}{8} > 0\,. \end{aligned}$$

2) Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{\sin 2x - 2\,\mathrm{sh}\, x}{\sqrt{x + 2x^2 + \cos^2 x}} = -\frac{5}{3}\,x^3 + \mathcal{R}_3(x)\,,$$

on a $f''(0) = 0$ et $f'''(0) = -10 \neq 0$. Par conséquent, la fonction f admet un point d'inflexion en 0.

$\boxed{\mathbf{5.170}}$ Puisque pour tout $|x| < \frac{\pi}{2}$:

$$f(x) = \frac{\ln \cos x}{1 + \sin x} - \cos x = -1 + \frac{x^3}{2} + \mathcal{R}_3(x)\,,$$

on a $f''(0) = 0$ et $f'''(0) = 3 \neq 0$. Par conséquent la fonction f admet un point d'inflexion en 0.

$\boxed{\mathbf{5.171}}$ Puisque pour tout $|x| < \frac{\pi}{4}$:

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - \sin x + \cos x}{\sqrt{\cos^4 x - \sin^4 x}}\right) = \ln 2 + x^2 + \mathcal{R}_2(x)\,,$$

on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 2 > 0$. Par conséquent la fonction f admet un minimum local en 0.

$\boxed{\mathbf{5.172}}$ Puisque pour tout $|x| < \frac{\pi}{2}$:

$$f(x) = \frac{1 - \operatorname{ch} x^2 + \ln\sqrt{1 + x^2}}{\sin x^2 + \sqrt{\cos x}} = \frac{x^2}{2} + \mathcal{R}_2(x)\,,$$

on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 1 > 0$. Par conséquent la fonction f admet un minimum local en 0.

$\boxed{\mathbf{5.173}}$ Soit $h : \left]-125, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$h(t) = \ln\left(5 + \sqrt[3]{t}\right).$$

Puisque que, pour tout $t > -125$ avec $t \neq 0$:

$$h'(t) = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}\,\left(5 + \sqrt[3]{t}\right)} > 0\,,$$

la fonction continue h est strictement croissante. Par conséquent la fonction f admet un minimum local en 0 si et seulement si la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = 5x^2 + \frac{4 + x^4}{2 + x^2 + x^4} = 2 + 4x^2 + \mathcal{R}_2(x)$$

en possède un en ce point ; ce qui est le cas car $g'(0) = 0$ et $g''(0) = 8 > 0$.

$\boxed{\mathbf{5.174}}$ D'une part, la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln\bigl(1 + |x|\bigr)$ atteint son minimum en 0. D'autre part, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = \ln\bigl(1 + \operatorname{Arctg} x^2\bigr) - \frac{1}{4}\ln\bigl(1 + \sin^2 x\bigr) = \frac{3}{4}\,x^2 + \mathcal{R}_2(x)\,,$$

on a $h'(0) = 0$ et $h''(0) = \frac{3}{2} > 0$; ce qui entraîne que la fonction h admet un minimum local en 0. Par conséquent la fonction $f = g + h$ admet un minimum local en 0.

5.175 Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{\alpha + \ln\bigl(1+x^2\bigr)}{\sqrt{\operatorname{ch} x + \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 x}} = \alpha + \left(1 - \frac{5\alpha}{4}\right) x^2 + \mathcal{R}_2(x)\,,$$

on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 2\left(1 - \frac{5\alpha}{4}\right)$. Par conséquent

1) $\alpha < \frac{4}{5}$. $f''(0) > 0 \Rightarrow f$ admet un minimum local en 0.

2) $\alpha > \frac{4}{5}$. $f''(0) < 0 \Rightarrow f$ admet un maximum local en 0.

3) $\alpha = \frac{4}{5}$. Dans ce cas, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{\dfrac{4}{5} + \ln\bigl(1+x^2\bigr)}{\sqrt{\operatorname{ch} x + \sin x^2 + \operatorname{sh}^2 x}} = \frac{4}{5} - \frac{x^4}{40} + \mathcal{R}_4(x)\,,$$

on a $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ et $f^{(4)}(0) = -\frac{3}{5}$; ce qui entraîne que la fonction f admet un maximum local en 0.

5.176 En désignant par x la longueur d'un des côtés de la base carrée de la boîte et par y sa hauteur et en tenant compte que $x^2 y = 4$, le prix de revient de la boîte est

$$\alpha x^2 + 4\alpha xy + 4\beta(x+y) = \alpha x^2 + \frac{16\,\alpha}{x} + 4\beta x + \frac{16\,\beta}{x^2}\,.$$

Par conséquent ce problème revient à trouver le minimum de la fonction $g : \,]0,+\infty[\, \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \alpha x^2 + 4\beta x + \frac{16\,\alpha}{x} + \frac{16\,\beta}{x^2}\,.$$

Ainsi, puisque pour tout $x \in \,]0,+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{2\bigl(\alpha x + 2\beta\bigr)\bigl(x^3 - 8\bigr)}{x^3}\,,$$

$g'(x) < 0$ sur $]0,2[$ et $g'(x) > 0$ sur $]2,+\infty[$; ce qui entraîne que la fonction continue g est strictement décroissante sur $]0,2]$ et strictement croissante sur $[2,+\infty[$. D'où la fonction g atteint son minimum en 2 et le coût minimal de la boîte est $g(2) = 12\,(\alpha+\beta)$.

5.177 Le nombre a cherché est le point où la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{\bigl(x-1\bigr)^2 + 9} + \sqrt{\bigl(x-8\bigr)^2 + 16}$$

atteint son minimum. Un tel minimum existe car la fonction f est continue et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Comme de plus la fonction f est de classe $\mathbf{C}^1$, a est un point stationnaire de f. Ainsi, puisque

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+9}} + \frac{x-8}{\sqrt{(x-8)^2+16}} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+9} = \frac{(x-8)^2}{(x-8)^2+16} \Rightarrow 16\,(x-1)^2 = 9(x-8)^2 \\ &\Rightarrow x = -20 \text{ ou } x = 4 \end{aligned}$$

et $f(-20) > f(4)$, le nombre a cherché est 4.

$\boxed{\mathbf{5.178}}$ Soit $r > 0$ et posons

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\right\}, \quad \mathrm{A} = (-r, 0) \text{ et } \mathrm{B} = (r, 0)\,.$$

Etant donné que $P = (x,y) \in \Omega$, ce problème revient à trouver l'élément x de $[-r,r]$ où la fonction $f : [-r,r] \to \mathbb{R}$ défine par $f(x) = \sqrt{r+x} + \sqrt{r-x}$ atteint son maximum. Puisque pour tout $x \in \left]-r,r\right[$:

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}\left(\sqrt{r+x}+\sqrt{r-x}\right)}\,,$$

on a $f'(x) > 0$ sur $]-r,0[$ et $f'(x) < 0$ sur $]r,0[$; ce qui entraîne que la fonction continue f est strictement croissante sur $[-r,0]$ et strictement décroissante sur $[0,r]$. Par conséquent la fonction f atteint son maximum en 0. D'où $P = (0,r)$ ou $P = (0,-r)$.

$\boxed{\mathbf{5.179}}$ Puisque t_α a pour équation $y = -2\alpha(x-\alpha) + \left(3-\alpha^2\right)$, on a

$$\mathrm{A} = \left(\frac{\alpha^2+3}{2\alpha}, 0\right) \text{ et } \mathrm{B} = \left(0, \alpha^2+3\right).$$

Le nombre α cherché est le point où la fonction $f : \left]0,+\infty\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\left(x^2+3\right)^2}{x}$$

atteint son minimum. Un tel minimum existe car la fonction f est continue et

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Comme de plus la fonction f est de classe $\mathbf{C}^1$, α est un point stationnaire de f. Ainsi, puisque

$$f'(x) = \frac{3\left(x^2+3\right)\left(x^2-1\right)}{x^2}\,,$$

on a $\alpha = 1$.

$\boxed{\textbf{5.180}}$ Puisque $\mathrm{A} = (\alpha, 0)$, $\mathrm{B} = (\alpha, \alpha)$, $\mathrm{C} = \left(6 - \frac{\alpha}{2}, \alpha\right)$ et $\mathrm{D} = \left(6 - \frac{\alpha}{2}, 0\right)$ avec $0 < \alpha < 4$, l'aire du rectangle ABCD est donnée par de la fonction $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ définie par $f(\alpha) = \frac{3}{2}\,\alpha(4-\alpha)$. Cette fonction atteint son maximum au point $\alpha = 2$. D'où l'aire maximale du rectangle ABCD vaut $f(2) = 6$.

$\boxed{\textbf{5.181}}$ Pour commencer, montrons que pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$: $\sin t > \frac{2t}{\pi}$. En effet, soit $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \sin t - \frac{2t}{\pi}$. Puisque pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$: $f'(t) = \cos t - \frac{2}{\pi}$ et que la fonction cosinus est strictement décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $f'(t) > 0$ sur $\left]0, \operatorname{Arccos}\frac{2}{\pi}\right[$ et $f'(t) < 0$ sur $\left]\operatorname{Arccos}\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right[$; ce qui entraîne que la fonction continue f est strictement croissante sur $\left[0, \operatorname{Arccos}\frac{2}{\pi}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\operatorname{Arccos}\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right]$. Comme de plus $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, on a finalement que pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$: $f(t) > 0$.

Par conséquent, du fait que les trois angles α, β et θ sont ceux d'un triangle et qu'ils sont aigus, on peut écrire

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\theta > \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{2\beta}{\pi} + \frac{2\theta}{\pi} = 2\,.$$

$\boxed{\textbf{5.182}}$ En posant $\alpha = 2\cos t$ et $\beta = 2\sin t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'inégalité à démontrer revient à trouver le maximum de la fonction $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{\sin 2t}{1 + \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}\,.$$

Pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$f'(t) = \frac{2\left(1 + \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right)\cos 2t - \sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\sin 2t}{\left(1 + \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2}\,.$$

Etudions le signe de f'. Pour cela, considérons la fonction auxiliaire $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = 2\left(1 + \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right)\cos 2t - \sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\sin 2t\,.$$

Puisque pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$: $g'(t) = -\left(4 + 3\sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right)\sin 2t < 0$, la fonction continue g est strictement décroissante.Comme de plus $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, on a $g(t) > 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ et $g(t) < 0$ sur $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Le signe de f' étant le même que celui de g, la fonction continue f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$; ce qui entraîne que f atteint son maximum pour $t = \frac{\pi}{4}$.

Par conséquent, pour tout couple $\alpha, \beta \geq 0$ vérifiant $\alpha^2 + \beta^2 = 4$, on a

$$\frac{\alpha\beta}{2 + \alpha + \beta} \leq \max_{t \in [0, \frac{\pi}{2}]} f(t) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1\,.$$

$\boxed{\textbf{5.183}}$ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale définie par

$$f(x) = 4x^4 + x^2 - 3x + 1$$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 16\,x^3 + 2x - 3$ et $f''(x) = 48\,x^2 + 2 > 0$, la fonction dérivée f' et strictement croissante et comme de plus $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, on a $f'(x) < 0$ sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ et $f'(x) > 0$ sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$; ce qui entraîne que la fonction continue f est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Par conséquent la fonction f atteint son minimum en $\frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant l'égalité $7\alpha^2 + 3\alpha\beta + 3\beta^2 = 1$. Alors,

$$\begin{aligned}
&0 \le f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = 4\frac{\alpha^4}{\beta^4} + \frac{\alpha^2}{\beta^2} - 3\frac{\alpha}{\beta} + 1 = 4\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 1\right)^2 - \frac{1}{\beta^2} \\
&\Rightarrow 0 \le \beta^4\left(4\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 1\right)^2 - \frac{1}{\beta^2}\right) = 4\big(\alpha^2 + \beta^2\big)^2 - \beta^2 \Rightarrow \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta}\right)^2 \ge \frac{1}{4} \\
&\Rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} \ge \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{5.184}}$ Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Ainsi, puisque pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}\,,$$

$f'(x) < 0$ sur $]0, 1[$ et $f'(x) > 0$ sur $]1, +\infty[$; ce qui entraîne que la fonction continue f est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Par conséquent la fonction f atteint son minimum en 1 et $f(1) = 2$. Soit $\alpha, \beta, \mu > 0$ trois nombres vérifiant $\alpha\beta\mu\big(\alpha + \beta + \mu\big) = 1$. Alors,

$$1 = \alpha\beta\mu\big(\alpha + \beta + \mu\big) = \alpha\mu\left(\beta^2 + \big(\alpha + \mu\big)\beta\right) \Rightarrow \beta^2 + \big(\alpha + \mu\big)\beta = \frac{1}{\alpha\mu}\,.$$

D'où $(\alpha + \beta)(\beta + \mu) = \beta^2 + (\alpha + \mu)\beta + \alpha\mu = \frac{1}{\alpha\mu} + \alpha\mu = f(\alpha\mu) \ge f(1) = 2$.

$\boxed{\textbf{5.185}}$ 1) $|x| = 1$. Alors, $|\sin x| = |\sin 1| < 1 = |x|$.

2) $|x| > 1$. Alors, $|\sin x| \le 1 < |x|$.

3) $0 < x < 1$. Soit $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = t - \sin t$.

Puisque pour tout $t \in]0, 1[$: $f'(t) = 1 - \cos t > 0$, la fonction continue f est strictement croissante et comme de plus $f(0) = 0$, on a que pour tout $t \in]0, 1[$: $f(t) > 0$. D'où $|\sin x| = \sin x < x = |x|$.

4) $-1 < x < 0$. Alors, $|\sin x| = -\sin x = \sin(-x) < -x = |x|$.

$\boxed{\textbf{5.186}}$ Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Alors, on sait, grâce à la formule de MacLaurin, qu'il existe $\theta_{x,y} \in]0, 1[$ tel que $\sin x - \sin y = \cos\big(y + \theta_{x,y}(x - y)\big)(x - y)$. D'où $|\sin y - \sin x| \le |x - y|$.

$\boxed{\mathbf{5.187}}$ Soit $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Alors, on sait, grâce à la formule de MacLaurin, qu'il existe $\theta_x \in]0,1[$ tel que $\operatorname{tg} x = \frac{x}{\cos^2(\theta_x x)}$. D'où $|\operatorname{tg} x| > |x|$.

$\boxed{\mathbf{5.188}}$ Soit $0 < |x| < \frac{\pi}{4}$. Alors, on sait, grâce au théorème des accroissements finis, qu'il existe un nombre $0 < \theta < 1$ tel que

$$\operatorname{tg} x - \sin x = \big(\operatorname{tg}^2\theta x + (1 - \cos\theta x)\big)x\,.$$

Ainsi, puisque $0 < |\theta x| < \frac{\pi}{4}$: $0 < \operatorname{tg}^2\theta x < 1$ et $0 < 1 - \cos\theta x < 1$, on a

$$|\operatorname{tg} x - \sin x| = \big(\operatorname{tg}^2\theta x + (1 - \cos\theta x)\big)|x| < 2|x|\,.$$

$\boxed{\mathbf{5.189}}$ Soit $x > 0$. On sait, grâce à la formule de MacLaurin, qu'il existe $0 < \theta_x, \overline{\theta}_x < 1$ tels que

$$x - x^3 < x - \frac{\overline{\theta}_x\, x^3}{\left(1 + \overline{\theta}_x^2\, x^2\right)^2} = \operatorname{Arctg} x = \frac{x}{1 + \theta_x^2\, x^2} < x\,.$$

$\boxed{\mathbf{5.190}}$ 1) $x \geq 1$. Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie $f(x) = x - \ln x$. Puisque pour tout $x \in]1, +\infty[$: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$, la fonction continue f est strictement croissante et comme de plus $f(0) = 1$, on a que pour tout $x \in [1, +\infty[$: $f(x) > 0$ ou encore $\ln x < x$.

2) $0 < x < 1$. Alors, $\ln x < 0 < x$.

$\boxed{\mathbf{5.191}}$ 1) $0 < x \leq 1$. En utilisant l'exercice précédent, on peut écrire

$$|\ln x| = -\ln x = 2\ln\frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{2}{\sqrt{x}}\,.$$

2) $x > 1$. De nouveau, en utilisant l'exercice précédent, on a

$$\ln x = 2\ln\sqrt{x} < 2\sqrt{x}\,.$$

$\boxed{\mathbf{5.192}}$ D'après le théorème des accroissements finis, on sait qu'à tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut associer un nombre $\theta_n \in\ ]0,1[$ tel que

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1 + \dfrac{\theta_n}{n}}\,\frac{1}{n} = \frac{1}{n + \theta_n}\,.$$

Par conséquent, pour tout entier $n > 1$:

$$\frac{1}{1 + n^2} < \frac{1}{1 + n} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

$\boxed{\mathbf{5.193}}$ Soit $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x - \ln(1 + x)$. Ainsi, puisque pour tout $x \in]-1, +\infty[$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x} = \frac{x}{1 + x}\,,$$

$f'(x) < 0$ sur $]-1, 0[$ et $f'(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$; ce qui entraîne que la fonction continue f est strictement décroissante sur $]-1, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Comme de plus $f(0) = 0$, on a que pour tout $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$: $f(x) > 0$ ou encore $\ln(1 + x) < x$.

$\boxed{\textbf{5.194}}$ Soit $x > 0$. Alors, on sait, grâce au théorème des accroissements finis, qu'il existe $\theta_x \in]0, 1[$ tel que

$$\ln(1 + x) = \frac{x}{1 + \theta_x x} > \frac{x}{1 + x}\,.$$

$\boxed{\textbf{5.195}}$ Soit $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \ln x - 2\frac{x-1}{x+1}$. Puisque pour tout $x \in\ ]0, 1[$:

$$f'(x) = \frac{(x - 1)^2}{x(x + 1)^2} > 0\,,$$

la fonction continue f est strictement croissante sur $]0, 1]$. Comme de plus $f(1) = 0$, on a que pour tout $0 < x < 1$: $f(x) < 0$. D'où

$$\ln\sqrt{x} < \frac{x - 1}{x + 1}\,.$$

$\boxed{\textbf{5.196}}$ Soit $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$. Alors, on sait, grâce à la formule de MacLaurin, qu'il existe $\theta_x \in]0, 1[$ tel que $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} \cos(\theta_x x)$. La fonction cosinus étant strictement décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut écrire

$$x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} \cos x\,.$$

$\boxed{\textbf{5.197}}$ Soit $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = 2x - \sin 2x - \operatorname{tg} x$. Ainsi, puisque que pout tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2 - 2\cos 2x - \frac{1}{\cos^2 x} = 4\sin^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \frac{-1}{\cos^2 x}\left(1 - \sin^2 2x\right) = -\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}\,, \end{aligned}$$

$g'(x) < 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$; ce qui entraîne que la fonction continue g est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Comme de plus $g(0) = 0$, on a que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$: $g(x) < 0$ ou encore $2x < \sin 2x + \operatorname{tg} x$.

$\boxed{\textbf{5.198}}$ Soit $x > 0$. Alors, on sait, grâce à la formule de MacLaurin, qu'il existe $\theta_x, \overline{\theta}_x \in]0, 1[$ tels que

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8\sqrt{\left(1 + \theta_x x\right)^3}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16\sqrt{\left(1 + \overline{\theta}_x x\right)^5}}\,.$$

Par conséquent $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1 + x} < 1 + \frac{x}{2}$.

5.199 Pour tout $x > \sqrt{2}$: $\ln\bigl(x^2-1\bigr) > 0 \Rightarrow x < x + \ln\bigl(x^2-1\bigr)$.

Montrons à présent la deuxième inégalité. Pour cela, considérons la fonction $f : \left]\sqrt{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -x + \ln\bigl(x^2-1\bigr)$. Ainsi, puisque pour tout $x > \sqrt{2}$:

$$f'(x) = \frac{-x^2+2x+1}{x^2-1}\,,$$

$f'(x) > 0$ sur $\left]\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right[$ et $f'(x) < 0$ sur $\left]1+\sqrt{2}, +\infty\right[$; ce qui entraîne que la fonction continue f est strictement croissante sur $\left]\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[1+\sqrt{2}, +\infty\right[$. Comme de plus $f\left(1+\sqrt{2}\right) < 0$, on obtient que pour tout $x > \sqrt{2}$: $f(x) < 0$ ou encore $x + \ln\bigl(x^2-1\bigr) < 2x$.

5.200 1) Puisque pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}\bigl(x - \operatorname{tg} x\bigr) < 0\,,$$

la fonction continue f est strictement décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Soit $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. Alors,

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = f(\alpha) > f(\beta) = \frac{\sin\beta}{\beta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

et

$$0 < \frac{\beta}{\sin\beta} = \frac{1}{f(\beta)} < \frac{1}{f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha\frac{\beta}{\sin\beta} < \alpha\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \frac{\alpha\pi}{2\beta}\,.$$

5.201 On sait, grâce à la formule de MacLaurin, qu'à chaque $t \in]-1, +\infty[$, on peut associer un élément θ_t de $]0, 1[$ tel que

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2\bigl(1+\theta_t t\bigr)^2}\,.$$

Par conséquent pour tout $|x| < \frac{1}{2}$:

$$\bigl|\ln(2-8x^4) + 4x^4 - \ln 2\bigr| = \frac{8x^8}{\bigl(1-4\theta_{(-4x^4)}x^4\bigr)^2} < \frac{1}{18}\,.$$

5.202 Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg}\frac{1}{x}$. Puisque pour tout $x \in]0, +\infty[$: $f'(x) = 0$, la fonction continue f est constante. D'où pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg}\frac{1}{x} = f(1) = \frac{\pi}{2}\,.$$

$\boxed{\mathbf{5.203}}$ $\mathcal{P}_4(x) = 1 + 2x - \dfrac{x^4}{2}$.

$\boxed{\mathbf{5.204}}$ $\mathcal{P}_6(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{41}{240}\,x^5$

$\boxed{\mathbf{5.205}}$ $\mathcal{P}_5(x) = -\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{(x-1)^2}{2} - \dfrac{5}{24}(x-1)^3 - \dfrac{(x-1)^4}{8} + \dfrac{49}{160}\,(x-1)^5$.

$\boxed{\mathbf{5.206}}$ $\mathcal{P}_5(x) = \ln 5 + \dfrac{x}{5} - \dfrac{x^2}{50} + \dfrac{9}{250}\,x^3 - \dfrac{53}{7\,500}\,x^4 + \dfrac{6\,149}{375\,000}\,x^5$.

$\boxed{\mathbf{5.207}}$ $\mathcal{P}_6(x) = \cos 1 + \dfrac{\sin 1}{2}\,x^2 - \left(\dfrac{\cos 1}{8} + \dfrac{\sin 1}{24}\right)x^4 + \left(\dfrac{\cos 1}{48} - \dfrac{7\sin 1}{360}\right)x^6$.

$\boxed{\mathbf{5.208}}$ $\mathcal{P}_6(x) = 1 - \dfrac{x^4}{32} - \dfrac{x^6}{384}\,.$

$\boxed{\mathbf{5.209}}$ $\mathcal{P}_4(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^4}{24}\,.$

$\boxed{\mathbf{5.210}}$ $\mathcal{P}_5(x) = e - \dfrac{e}{4}\,x^2 + \dfrac{e}{48}\,x^4\,.$

$\boxed{\mathbf{5.211}}$ $\mathcal{P}_{100}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{50} (-1)^n x^{2n}\,.$

$\boxed{\mathbf{5.212}}$
$$\begin{aligned}\mathcal{P}_5(x) = {} & 169\,978 + 795\,661\,(x-2) + 168\,3946\,(x-2)^2 \\ & +2\,120\,481\,(x-2)^3 + 1\,758\,418\,(x-2)^4 + 1\,002\,941\,(x-2)^5.\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5.213}}$ $\alpha_0 = -15$, $\alpha_1 = 21$, $\alpha_2 = 115$, $\alpha_3 = 283$, $\alpha_4 = 420$, $\alpha_5 = 420$, $\alpha_6 = 294$, $\alpha_7 = 144$, $\alpha_8 = 48$, $\alpha_9 = 10$ et $\alpha_{10} = 1$.

$\boxed{\mathbf{5.214}}$ Pour que $1 = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{-\dfrac{x^3}{6} + \mathcal{R}_3(x)}\,,$

il faut et il suffit que $\mathcal{P}_3(x) = -\frac{x^3}{6}$.

$\boxed{\mathbf{5.215}}$ Grâce à la formule de MacLaurin, on sait qu'à chaque entier $n > 0$, on peut associer un élément θ_n de $]0,1[$ tel que

$$e^{0{,}2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(0{,}2)^k}{k!} + e^{\theta_n(0{,}2)}\,\frac{(0{,}2)^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Ainsi, puisque $0 < e^{\theta_n(0{,}2)} < 3$, on obtient en prenant $n = 5$, que

$$e^{0{,}2} = 1{,}221402 \text{ à } 10^{-6} \text{ près}\,.$$

$\boxed{\mathbf{5.216}}$ Grâce à la formule de MacLaurin, on sait qu'il existe un élément θ de $]0,1[$ tel que

$$\ln(1{,}01) = \ln(1 + 0{,}01) = 0{,}01 - \frac{(0{,}01)^2}{2} + \frac{(0{,}01)^3}{3\big(1 + \theta(0{,}01)\big)^3}\,.$$

Puisque

$$0 < \frac{(0{,}01)^3}{3\big(1+\theta(0{,}01)\big)^3} < \frac{10^{-6}}{3}\,,$$

on peut écrire $\ln(1{,}01) = 0{,}00995$ à 10^{-6} près.

$\boxed{\textbf{5.217}}$ Grâce à la formule de MacLaurin, on sait qu'à chaque $x \in \,]-1,+\infty[$, on peut associer un élément θ_x de $]0,1[$ tel que

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8\big(1+\theta_x x\big)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Ainsi, pour $|x| < 0{,}02$, l'erreur commise est plus petite que

$$\frac{(0{,}02)^2}{8(0{,}98)^{\frac{3}{2}}} < 0{,}00005154\,.$$

$\boxed{\textbf{5.218}}$ On sait qu'il existe deux fonctions $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 : I \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = P(x) + \mathcal{R}_1(x) \text{ et } g(x) = Q(x) + \mathcal{R}_2(x)$$

avec

$$\lim_{x\to a} \frac{\mathcal{R}_1(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{\mathcal{R}_2(x)}{(x-a)^n} = 0\,.$$

Ainsi, la fonction $\phi : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(x) = \frac{\mathcal{R}_1(x)Q(x) - \mathcal{R}_2(x)P(x)}{g(x)Q(x)}$$

répond à la question.

$\boxed{\textbf{5.219}}$ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale définie par $P_\alpha(x) = x^5 - 5x + \alpha$. Ainsi, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P'_\alpha(x) = 5x^4 - 5 = 5(x-1)(x+1)\big(x^2+1\big)\,,$$

$P'_\alpha(x) > 0$ sur $]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$ et $P'_\alpha(x) < 0$ sur $]-1,1[$; ce qui entraîne que la fonction continue P_α est strictement croissante sur $]-\infty,-1]$ et sur $[1,+\infty[$ et strictement décroissante sur $[-1,1]$. Comme de plus

$$\lim_{x\to-\infty} P_\alpha(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} P_\alpha(x) = +\infty\,,$$

l'équation $P_\alpha(x) = 0$ admet exactement trois racines réelles distinctes si et seulement si

$$P_\alpha(-1) > 0 \text{ et } P_\alpha(1) < 0 \Leftrightarrow |\alpha| < 4\,.$$

5.220 Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale définie par

$$P(x) = x^4 - 2x^2 + 2x + 1 .$$

Ainsi, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P'(x) = 4x^3 - 4x + 2 \text{ et } P''(x) = 4\big(3x^2 - 1\big) ,$$

$P''(x) > 0$ sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$ et $P''(x) < 0$ sur $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$; ce qui entraîne que la fonction continue P' est strictement croissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$ et strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Comme de plus

$$\lim_{x\to-\infty} P'(x) = -\infty\,,\; P'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0 \text{ et } P'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0$$

il existe un élément α de $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ pour lequel $P'(x) < 0$ si $x \in]-\infty, \alpha[$ et $P'(x) > 0$ si $x \in]\alpha, +\infty[$; ce qui entraîne que la fonction continue P est strictement décroissante sur $]-\infty, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$. Comme de plus

$$P(\alpha) < P(-1) = -2 < 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty ,$$

l'équation $P(x) = 0$ admet exactement deux racines réelles distinctes $\alpha_1 < \alpha_2$. Finalement, en remarquant que $P(-2) > 0$, $P(-1) < 0$ et $P(0) > 0$, on peut écrire $-2 < \alpha_1 < -1 < \alpha_2 < 0$.

5.221 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = x^5 + 3x^3 + 2x + \sin x + \cos x - 1 .$$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + (1 + \cos x) + (1 - \sin x) > 0 ,$$

la fonction f est strictement croissante. De plus $f(0) = 0$. Par conséquent $x = 0$ est bien l'unique solution de l'équation proposée.

5.222 Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale définie par

$$P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \mu x + \sigma$$

Puisque par hypothèse $\alpha > 0$ et $\beta^2 - 3\alpha\mu < 0$, on a que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \mu > 0 ;$$

ce qui entraîne que la fonction P est strictement croissante. Comme de plus

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty ,$$

l'équation $P(x) = 0$ possède une et une seule racine réelle.

$\boxed{\mathbf{5.223}}$ Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale définie par $P(x) = x^n + \alpha x + \beta$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P'(x) = nx^{n-1} + \alpha$. Alors,

1) n pair.

- Si $P\left(\sqrt[n-1]{\frac{-\alpha}{n}}\right) > 0$, l'équation $P(x) = 0$ n'admet aucune racine réelle.
- Si $P\left(\sqrt[n-1]{\frac{-\alpha}{n}}\right) = 0$, l'équation $P(x) = 0$ admet une et une seule racine réelle .
- Si $P\left(\sqrt[n-1]{\frac{-\alpha}{n}}\right) < 0$, l'équation $P(x) = 0$ admet exactement deux racines réelles distinctes.

2) n impair.

- $\alpha \geq 0$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $P'(x) > 0$, la fonction continue P est strictement croissante. De plus, $\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$. Par conséquent l'équation $P(x) = 0$ possède une et une seule racine réelle.
- $\alpha < 0$.
  - Si $P\left(-\sqrt[n-1]{\frac{-\alpha}{n}}\right) P\left(\sqrt[n-1]{\frac{-\alpha}{n}}\right) < 0$, l'équation $P(x) = 0$ admet exactement trois racines réelles distinctes.
  - Si $P\left(-\sqrt[n-1]{\frac{-\alpha}{n}}\right) P\left(\sqrt[n-1]{\frac{-\alpha}{n}}\right) = 0$, l'équation $P(x) = 0$ admet exactement deux racines réelles distinctes.
  - Si $P\left(-\sqrt[n-1]{\frac{-\alpha}{n}}\right) P\left(\sqrt[n-1]{\frac{-\alpha}{n}}\right) > 0$, l'équation $P(x) = 0$ admet une et une racine réelle.

$\boxed{\mathbf{5.224}}$ Soit P_n avec $n \geq 1$, la relation définie par « *tout polynôme à coefficients réels de degré* $n \geq 1$ *admet au plus* n *racines réelles distinctes* ». P_1 est vraie. A vérifier, pour tout entier $n \geq 1$: $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un polynône à coefficients réels $Q(x)$ de degré $n+1$ possédant au moins $n+2$ racines réelles distinctes. Alors, d'après le théorème de Rolle, on sait que le polynôme $Q'(x)$ possède au moins $n+1$ racines réelles distinctes. Comme $Q'(x)$ est un polynôme à coefficients réelles de degré n, un tel résultat est impossible. D'où contradiction. On a ainsi démontré, par induction, que P_n est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

$\boxed{\mathbf{5.225}}$ Considérons la fonction auxiliaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^4 - x + 1$. Alors,

$$x - \frac{1}{1 - x^3} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0\,.$$

Puisque $f'(x) = 4x^3 - 1 < 0$ sur $\left]-\infty, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right[$ et $f'(x) > 0$ sur $\left]\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, +\infty\right[$, la fonction f atteint son minimum en $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ et $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) > 0$. La fonction f ne s'annule donc pas. Par conséquent, l'équation proposée n'a pas de solution.

5.226 Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = -x + \sin\frac{1}{x} + \operatorname{sh}\frac{1}{x}$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = -1 - \frac{1}{x^2}\left(\cos\frac{1}{x} + \operatorname{ch}\frac{1}{x}\right) < 0\,,$$

la fonction f est strictement décroissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. De plus,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\,.$$

Ainsi, en utilisant le théorème de la valeur intermédiaire, on peut affirmer que la fonction continue f s'annule une et une seule fois sur chacun des deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Par conséquent l'équation proposée admet exactement deux racines réelles distinctes.

5.227 Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-2)^5}\,.$$

En remarquant que $f(x) < 0$ sur $]-\infty, 1[$ et $f(x) > 0$ sur $]2, +\infty[$, la fonction f ne peut s'annuler que dans l'intervalle ouvert $]1, 2[$. Puisque pour tout $x \in]1, 2[$:

$$f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^4} - \frac{5}{(x-2)^6} < 0\,,$$

la fonction continue f est strictement décroissante sur $]1, 2[$. Comme de plus

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to 2-} f(x) = -\infty\,,$$

la fonction f s'annule une et une seule fois dans $]1, 2[$.

5.228 Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-2)}\,.$$

En remarquant que $f(x) < 0$ sur $]-\infty, 0[$ et $f(x) > 0$ sur $]2, +\infty[$, la fonction f ne s'annule pas sur $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$:

$$f'(x) = -\frac{5}{x^6} - \frac{3}{(x-1)^4} - \frac{1}{(x-2)^2} < 0\,.$$

1) Sur $]0, 1[$, la fonction continue f est strictement décroissante et comme de plus $\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty$, la fonction f s'annule une et une seule fois dans cet intervalle.

2) Sur $]1,2[$, la fonction continue f est strictement décroissante et comme de plus $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = -\infty$, la fonction f s'annule une et une seule fois dans cet intervalle.

5.229 Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{(x-\alpha_1)} + \cdots + \frac{1}{(x-\alpha_n)}\,.$$

En constatant que $f(x) < 0$ sur $]-\infty, \alpha_1[$ et $f(x) > 0$ sur $]\alpha_n, +\infty[$, la fonction f ne s'annule pas sur $]-\infty, \alpha_1[\, \cup \,]\alpha_n, +\infty[$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-\alpha_1)^2} - \cdots - \frac{1}{(x-\alpha_n)^2}\,,$$

la fonction continue f est strictement décroissante sur chacun des $n-1$ intervalles ouverts $]\alpha_{k-1}, \alpha_k[$, $k = 1, \ldots, n$. Comme de plus pour tout entier $1 \le k \le n$:

$$\lim_{x\to \alpha_{k-1}+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to \alpha_k -} f(x) = -\infty$$

la fonction f s'annule une et une seule fois dans chacun de ces $n-1$ intervalles.

5.230 Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - x^3 - \operatorname{sh} x\,.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$: $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x-1)^2} - 3x^2 - \operatorname{ch} x < 0\,.$

1) Sur $]-\infty, 0[$, la fonction continue f est strictement décroissante. De plus,

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty\,.$$

D'où, f s'annule exactement une fois dans $]-\infty, 0[$.

2) Sur $]0,1[$, la fonction continue f est strictement décroissante. De plus,

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty\,.$$

D'où, f s'annule exactement une fois dans $]0,1[$.

3) Sur $]1, +\infty[$, la fonction continue f est strictement décroissante. De plus,

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty\,.$$

D'où, f s'annule exactement une fois dans $]1, +\infty[$.

Par conséquent, l'équation $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - x^3 - \operatorname{sh} x = 0$ possède exactement trois racines réelles distinctes.

$\boxed{\textbf{5.231}}$ Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + e^{-x^3}$.
Comme pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - 3x^2\, e^{-x^3} < 0\,,$$

la fonction f est strictement décroissante sur chacun des deux intervalles ouverts $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$. Par conséquent

1) Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = -\infty$, la fonction continue f s'annule exactement une fois dans $]-\infty, 1[$.

2) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, la fonction f ne s'annule pas dans $]1, +\infty[$.

En conclusion, puisque $f(0) = 0$, 0 est l'unique racine réelle de l'équation $f(x) = 0$.

$\boxed{\textbf{5.232}}$ Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^3-1} + e^{-x^5} - \operatorname{sh} x^7 - 8\,.$$

Puisque pour tout $x \neq 1$:

$$f'(x) = \frac{-3x^2}{(x^3-1)^2} - 5x^4\, e^{-x^5} - 7x^6 \operatorname{ch} x^7,$$

la fonction f est strictement décroissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$. Comme de plus,

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = -\infty$, la fonction continue f s'annule exactement une fois dans l'intervalle $]-\infty, 1[$.

2) $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, la fonction continue f s'annule exactement une fois dans l'intervalle $]1, +\infty[$.

En résumé, la fonction f admet exactement deux racines réelles distinctes.

$\boxed{\textbf{5.233}}$ Soit $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{2x-1}{x(x-1)} + \cos x$. Puisque pour tout $x \in]0, 1[$:

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 1}{x^2(x-1)^2} - \sin x < 0\,,$$

la fonction continue f est strictement décroissante. Comme de plus

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty$$

la fonction f s'annule une et une seule fois dans $]0, 1[$.

$\boxed{\mathbf{5.234}}$ Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + a\,.$$

Pour tout $x \neq \pm 1$: $f'(x) = \frac{2x}{(1-x)(x^2-1)}$. Ainsi,

1) Puisque pour tout $x < -1$: $f'(x) < 0$, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1[$. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$ et $\lim\limits_{x\to-1-} f(x) = -\infty$.

2) Puisque $f'(x) > 0$ sur $]-1, 0[$ et $f'(x) < 0$ sur $]0, 1[$, la fonction continue f est strictement croissante sur $]-1, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, 1[$. De plus $\lim\limits_{x\to-1+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = -\infty$ et $f(0) = a - 1$.

3) Puisque pour tout $x > 1$: $f'(x) < 0$, la fonction f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$. De plus $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$.

Par conséquent, en utilisant les résultats ci-dessus ainsi que le théorème de la valeur intermédiaire, on a

- $a < 0$. L'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution. De plus, elle se trouve dans $]1, +\infty[$.
- $a = 0$. Pas de solution.
- $0 < a < 1$. L'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution. De plus, elle se trouve dans $]-\infty, -1[$.
- $a = 1$. L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions. De plus, $x_1 < -1 < x_2 = 0$.
- $a > 1$. L'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions. De plus, $x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3 < 1$.

$\boxed{\mathbf{5.235}}$ Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \ln\bigl(1 + |x|\bigr) + \frac{1}{1-x}$. En remarquant que pour tout $x < 1$: $f(x) > 0$, la fonction f ne peut s'annuler que sur l'intervalle $]1, +\infty[$. Ainsi, puisque pour tout $x > 1$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1-x)^2} > 0$$

la fonction continue f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$ et comme de plus

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad f(2) = \ln 3 - 1 > 0\,,$$

l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule racine réelle α et $1 < \alpha < 2$.

$\boxed{\mathbf{5.236}}$ Pour commencer, soit $h : \,]0, 1[\, \to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par $h(x) = 1 + 2x \ln x$. Puisque pour tout $0 < x < 1$: $h'(x) = 2(1 + \ln x)$, la fonction h atteint son minimum en $\frac{1}{e}$ et $h\bigl(\frac{1}{e}\bigr) = 1 - \frac{2}{e} > 0$; ce qui entraîne que pour tout $x \in \,]0, 1[$:

$$\frac{1}{x(1-x)} + \ln x^2 = \frac{1}{1-x} + \frac{h(x)}{x} > 0\,.$$

Par conséquent les racines de l'équation proposée ne peuvent se trouver que dans $]-\infty, 0[\,\cup\,]1, +\infty[$. Montrons à présent que chacun de ces deux intervalles ouverts contient une et une seule racine. Pour cela, considérons la fonction $f :]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{x(1-x)} + \ln x^2 = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} + 2\ln|x|\,.$$

D'une part, pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 4x - 1}{x^2(1-x)^2}\,.$$

D'autre part, puisque pour tout $x \in \mathbb{R} : 6x^2 - 8x + 4 > 0$, la fonction polynomiale $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ est strictement croissante. Comme de plus $P(0)P(1) < 0$, on a que $P(x) < 0$ sur $]-\infty, 0[$ et $P(x) > 0$ sur $]1, +\infty[$. D'où

1) Puisque sur $]-\infty, 0[$: $f'(x) < 0$, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$. Comme de plus f est continue, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -\infty$, la fonction f s'annule une et une seule dans l'intervalle $]-\infty, 0[$.

2) Puisque sur $]1, +\infty[$: $f'(x) > 0$, la fonction f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$. Comme de plus f est continue, $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, la fonction f s'annule une et une seule dans l'intervalle $]1, +\infty[$.

En résumé, l'équation $\frac{1}{x(1-x)} + \ln x^2 = 0$ admet exactement deux racines réelles distinctes.

$\boxed{\textbf{5.237}}$ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$f(x) = \frac{x}{3^x} = x\,e^{-x\ln 3}\,.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1 - x\ln 3}{3^x}\,,$$

$f'(x) > 0$ sur $\left]-\infty\,, \frac{1}{\ln 3}\right[$ et $f'(x) < 0$ sur $\left]\frac{1}{\ln 3}\,, +\infty\right[$; ce qui entraîne que la fonction f est strictement croissante sur $\left]-\infty, \frac{1}{\ln 3}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{\ln 3}, +\infty\right[$. De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Par conséquent, puisque la fonction f est continue, l'équation $f(x) = \alpha$ admet

1) Si $\alpha \leq 0$ ou $\alpha = \frac{1}{e\ln 3}$, une et une seule solution.

2) Si $0 < \alpha < \frac{1}{e\ln 3}$, exactement deux solutions.

3) Si $\alpha > \frac{1}{e\ln 3}$, aucune solution.

$\boxed{\mathbf{5.238}}$ Puisque $x = 0$ est une solution évidente de l'équation $3^x+4^x = 2^x+5^x$, soient $\beta \neq 0$ une autre de ses solutions et $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = t^\beta$. En utilisant le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe $2 < t_1 < 3$ et $4 < t_2 < 5$ tels que

$$f(3) - f(2) = f'(t_1) = \beta t_1^{\beta-1} \text{ et } f(5) - f(4) = f'(t_2) = \beta t_2^{\beta-1}.$$

D'où $3^\beta + 4^\beta = 2^\beta + 5^\beta \Leftrightarrow \beta t_1^{\beta-1} = \beta t_2^{\beta-1} \Leftrightarrow \beta = 1$.

$\boxed{\mathbf{5.239}}$ 1) Soit $n > 3$. Puisque $2^x+3^x = n^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{n}\right)^x+\left(\frac{3}{n}\right)^x - 1 = 0$, le problème revient à montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \left(\frac{2}{n}\right)^x + \left(\frac{3}{n}\right)^x - 1$$

s'annule une et une seule fois dans $\mathbb{R}$. En effet, étant donné que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(\frac{2}{n}\right)^x \ln\frac{2}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^x \ln\frac{3}{n} < 0\,,$$

la fonction f est strictement décroissante. Comme de plus

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1\,,$$

l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on désigne par x_n. D'autre part, du fait que $f(0) = 1$, on a $x_n > 0$.

2) En effet, pour tout entier $n > 3$:

$$1 = \left(\frac{2}{n}\right)^{x_n} + \left(\frac{3}{n}\right)^{x_n} < 2\left(\frac{3}{n}\right)^{x_n}$$

ou encore

$$0 < x_n < \frac{-\ln 2}{\ln\dfrac{3}{n}} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{-\ln 2}{\ln\dfrac{3}{n}} = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{5.240}}$ Soit $n \geq 1$ et $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^n\, e^{-x^2}$. Ainsi, puisque pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$f'(x) = x^{n-1}\, e^{-x^2}\left(n - 2x^2\right),$$

$f'(x) > 0$ sur $\left]0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right[$ et $f'(x) < 0$ sur $\left]\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty\right[$; ce qui entraîne que la fonction continue f est strictement croissante sur $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty\right[$. Par conséquent

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^n}} \max_{x\geq 0} f(x) = \frac{1}{\sqrt{n^n}}\, f\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) = \left(2\,e\right)^{-\frac{n}{2}}.$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

5.241 Soit $n \geq 1$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \big(1-x\big)^n x$. Ainsi, puisque pour tout $x \in \,]0,1[$:

$$f'(x) = \big(1-x\big)^{n-1}\big(1-(n+1)x\big)\,,$$

$f'(x) > 0$ sur $\big]0, \frac{1}{n+1}\big[$ et $f'(x) < 0$ sur $\big]\frac{1}{n+1}, 1\big[$; ce qui entraîne que la fonction continue f est strictement croissante sur $\big[0, \frac{1}{n+1}\big]$ et strictement décroissante sur $\big[\frac{1}{n+1}, 1\big]$. Par conséquent

$$x_n = \max_{0 \leq x \leq 1}\big((n+1)\big(1-x\big)^n x\big) = (n+1)\, f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}\,.$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{e}$.

5.242 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = (1-x)x^n$. Ainsi, puisque pour tout $x \in \,]0,1[$:

$$f_n'(x) = x^{n-1}\big(n-(n+1)x\big)\,,$$

$f_n'(x) > 0$ sur $\big]0, \frac{n}{n+1}\big[$ et $f_n'(x) < 0$ sur $\big]\frac{n}{n+1}, 1\big[$; ce qui entraîne que la fonction continue f_n est strictement croissante sur $\big[0, \frac{n}{n+1}\big]$ et strictement décroissante sur $\big[\frac{n}{n+1}, 1\big]$. Par conséquent

$$x_n = (n+1) f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)\ln 2 = \frac{\ln 2}{\big(1+\frac{1}{n}\big)^n}\,.$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{\ln 2}{e}$.

5.243 Soit $n \geq 1$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x\big(1-x^2\big)^n$. Ainsi, puisque pour tout $x \in \,]0,1[$:

$$f'(x) = \big(1-x^2\big)^{n-1}\big(1-(2n+1)x^2\big)\,,$$

$f'(x) > 0$ sur $\big]0, \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\big[$ et $f'(x) < 0$ sur $\big]\frac{1}{\sqrt{2n+1}}, 1\big[$; ce qui entraîne que la fonction continue f est strictement croissante sur $\big[0, \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\big]$ et strictement décroissante sur $\big[\frac{1}{\sqrt{2n+1}}, 1\big]$. Par conséquent

$$x_n = \max_{0 \leq x \leq 1}\big(\sqrt{n}\,x\big(1-x^2\big)^n\big) = \sqrt{n}\, f\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}\left(1+\dfrac{\frac{1}{2}}{n}\right)^n}\,.$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$.

5.244 1) Puisque pour tout $x \in \,]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{x^2-2}{2x^2}\,,$$

$f'(x) < 0$ sur $\left]0, \sqrt{2}\right[$ et $f'(x) > 0$ sur $\left]\sqrt{2}, +\infty\right[$; ce qui entraîne que la fonction continue f est strictement décroissante sur $\left]0, \sqrt{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\sqrt{2}, +\infty\right[$. Par conséquent pour tout $x \in]0, +\infty[$ avec $x \neq \sqrt{2}$: $f(x) > f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$.

2) En utilisant 1), on montre, par un simple raisonnement par récurrence, que pour tout entier $n \geq 0$: $\sqrt{2} < x_{n+1} < x_n$. La suite $\left(x_n\right)$ est strictement décroissante et minorée, elle converge. Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors $x = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$ et $x \geq \sqrt{2}$ ou encore $x = \sqrt{2}$.

$\boxed{\textbf{5.245}}$ 1) Puisque pour tout $x \in]-2, +\infty[$:

$$f'(x) = -\frac{x+1}{x+2},$$

$f'(x) > 0$ sur $]-2, -1[$ et $f'(x) < 0$ sur $]-1, +\infty[$; ce qui entraîne que la fonction continue f est strictement croissante sur $]-2, -1]$ et strictement décroissante sur $[-1, +\infty[$. Comme de plus

$$\lim_{x\to-2+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \text{ et } f(-1) = 1,$$

l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux racines réelles distinctes α et β et

$$-2 < \alpha < 0 < \beta.$$

2) Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout entier $n \geq 0$: $0 \leq x_{n-1} < x_n < 2$, la suite $\left(x_n\right)$ est strictement croissante et majorée, elle converge. Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, $x = \ln(2+x)$ ou encore $f(x) = 0$. Finalement, puisque $x \geq 0$, on obtient que $x = \beta$.

$\boxed{\textbf{5.246}}$ 1) Soit $n > 0$. Alors, d'après le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe $\theta_n \in]0, 1[$ tel que

$$\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{n+\theta_n}.$$

D'où $\frac{1}{1+n} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$.

2) Puisque que pour tout entier $n > 0$:

$$x_n = -\ln n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > -\ln n + \sum_{k=1}^{n} \bigl(\ln(k+1) - \ln k\bigr) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$$

et

$$x_{n+1} - x_n = -\bigl(\ln(n+1) - \ln n\bigr) + \frac{1}{n+1} < 0,$$

la suite $\left(x_n\right)$ est strictement décroissante et minorée, elle converge.

3) Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\big(\ln(1+k)-\ln k\big)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(1+n) = x_n-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ ;\end{aligned}$$

on obtient, par passage à la limite, que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(x_n-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \gamma\,.$$

$\boxed{\mathbf{5.247}}$ On sait, grâce à la formule de MacLaurin, qu'il existe une application $\theta : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to]0,1[$ telle que pour tout entier $n > 0$:

$$\begin{aligned}x_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(f'(0)\frac{k}{n^2}+f''\left(\theta(k,n)\frac{k}{n^2}\right)\frac{k^2}{2n^4}\right)\\ &= \frac{n(n+1)}{2n^2}\,f'(0)+\frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} f''\left(\theta(k,n)\frac{k}{n^2}\right)k^2\,.\end{aligned}$$

D'où, en constatant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|\frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} f''\left(\theta(k,n)\frac{k}{n^2}\right)k^2\right| \leq \frac{Mn(n+1)(2n+1)}{12\,n^4}$$

où $M = \max\limits_{x\in[0,1]}\big|f''(x)\big|$, on peut écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{f'(0)}{2}$.

$\boxed{\mathbf{5.248}}$ Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout entier $k > 0$: $f^{(k)}(x) = k\,e^x + (x-1)\,e^x$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\right) = 1-\frac{1}{n!}\,.$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

$\boxed{\mathbf{5.249}}$ Puisque, d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x, y \in]0,1[$:

$$\big|f(x)-f(y)\big| \leq M|x-y| \text{ où } M = \sup_{x\in]0,1[}\big|f'(x)\big|,$$

la fonction f est uniformément continue sur $]0,1[$; ce qui entraîne (ex. 4.154) que $\lim_{x\to 0+} f(x)$ existe. Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to 0+} f(x)\,.$$

$\boxed{\mathbf{5.250}}$ 1) On sait, d'après le théorème des accroissements finis, que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\left|f(x) - f(y)\right| \le \sup_{t\in\,]-\infty,+\infty[} \left|f'(t)\right| |x-y|\,.$$

Ainsi, puisque

$$\sup_{t\in]-\infty,+\infty[} \left|f'(t)\right| < 1\,,$$

le théorème du point fixe de Banach nous permet d'affirmer que la fonction f possède un unique point fixe.

2) En général, il est faux. Comme contre-exemple, il suffit de prendre la fonction $f(x) = x+1$.

$\boxed{\mathbf{5.251}}$ 1) En utilisant le théorème des accroissements finis, on sait qu'à chaque $x \in \mathbb{R}$, on peut associer un élément θ_x de $]0,1[$ tel que $f(x) = f(0) + f'(\theta_x x)x$. Ainsi, puisque pour tout $x \in\,]-\infty, 0[$: $f(x) \le f(0) + mx$ et tout $x \in\,]0,+\infty[$: $f(x) \ge f(0) + mx$, on a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Comme de plus la fonction f est continue, le théorème de la valeur intermédiaire nous permet de conclure que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.

2) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par $g(x) = x - \frac{f(x)}{M}$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|g'(x)\right| = 1 - \frac{f'(x)}{M} < 1 - \frac{m}{M}\,,$$

on peut écrire, grâce au théorème des accroissements finis que, pour tout couple u, v de $\mathbb{R}$:

$$\left|g(u) - g(u)\right| \le \left(1 - \frac{m}{M}\right) |u-v|\,.$$

Comme de plus $0 < 1 - \frac{m}{M} < 1$, on sait, d'après le théorème du point fixe de Banach, que la suite $\left(x_n\right)$ converge vers l'unique point fixe de la fonction g. Finalement, en remarquant que

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x\,,$$

la suite $\left(x_n\right)$ converge vers l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$.

5.252 1) Soit $g : [3,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$g(x) = x - f(x) = \frac{x-1}{2} - \ln x \,.$$

Puisque pour tout $x \in \,]3,+\infty[\,:\, g'(x) = \frac{x-2}{2x} > 0$, la fonction continue g est strictement croissante et comme de plus $g(3) < 0$ et $g(4) > 0$, elle s'annule une et une seule fois en un point $3 < \alpha < 4$.

Sur $]3,+\infty[$, α est bien l'unique point fixe de la fonction f car $g(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = x$.

2) En effet, puisque pour tout $x \in \,]0,+\infty[\,:\, f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{x} > 0$, la fonction f est strictement croissante. Comme de plus $f(3) > 3$ et $f(4) < 4$, on a $f\big([3,4]\big) \subset [3,4]$.

3) Pour tout $x \in \,]3,4[\,:\, 0 < f'(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x} < \dfrac{5}{6}$.

4) En utilisant 2), on peut montrer, par un simple raisonnement par récurrence, que pour tout entier $p \geq 0 : 3 \leq x_p \leq 4$ et en utilisant 1) et 3) ainsi que le théorème des accroissements finis, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\big|x_n - \alpha\big| = \big|f(x_{n-1}) - f(\alpha)\big| \leq \frac{5}{6}\,\big|x_{n-1} - \alpha\big| \leq \ldots \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n \big|x_0 - \alpha\big| \,.$$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \alpha \,.$

5.253 1) Puisque pour tout $x \in \,]1,+\infty[\,:\, f'(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^2-1} > 0$, la fonction f est strictement croissante et, comme de plus $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = -\infty$ et $f(2) > 0$, elle s'annule une et une seule fois en un point $1 < \alpha < 2$.

2) En effet, $0 = f(\alpha) = \alpha + \ln\big(\alpha^2 - 1\big) \Rightarrow \alpha = \sqrt{1 + e^{-\alpha}} = g(\alpha) \,.$

3) Puisque pour tout $x \in \,]0,+\infty[\,:\, g'(x) = -\frac{e^{-x}}{2\sqrt{1+e^{-x}}} < 0$, la fonction g est strictement décroissante. Comme de plus $g(1) < 2$ et $g(2) > 1$, on a $g\big([1,2]\big) \subset [1,2] \,.$

4) Pour tout $x \in \,]1,2[\,:\, \big|g'(x)\big| = \dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{1+e^{-x}}} < \dfrac{1}{2\,e} < \dfrac{1}{4} \,.$

5) En utilisant 3), on peut montrer, par un simple raisonnement par récurrence, que pour tout entier $p \geq 0 : 1 \leq x_p \leq 2$ et en utilisant 1), 2) et 4) ainsi que le théorème des accroissements finis, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\big|x_n - \alpha\big| = \big|g(x_{n-1}) - g(\alpha)\big| \leq \frac{1}{4}\,\big|x_{n-1} - \alpha\big| \leq \ldots \leq \frac{1}{4^n}\,\big|x_0 - \alpha\big| \,.$$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \alpha \,.$

5.254 Puisque pour tout $x \in [a,1]$:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln x\,,$$

la suite (f_n) converge simplement vers la fonction continue $f(x) = \ln x$. De plus, toutes les fonctions f_n sont croissantes. Par conséquent, grâce à la proposition 4.102, la convergence est uniforme.

5.255 Soit $n \geq 1$. La fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ étant continue, il existe un élément α_n de $[0,1]$ où f_n atteint son maximum. Puisque $f_n(0) = f_n(1) = 0$ et que pour tout $x \in]0,1[$: $f_n(x) > 0$, on a $\alpha_n \in]0,1[$; ce qui entraîne, f_n étant dérivable sur $]0,1[$, que

$$f_n'(\alpha_n) = \alpha_n^{n-1}\big(n - (1+n)\alpha_n\big) = 0 \text{ ou encore } \alpha_n = \frac{n}{n+1}\,.$$

Par conséquent pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sup_{x\in[0,1]} \big|f_n(x)\big| = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) < \frac{1}{n+1}\ ;$$

ce qui nous permet de conclure que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$.

5.256 1) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, considérons la fonction $g_x : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$g_x(t) = -t\ln\left(1 + \frac{x^2}{t}\right).$$

Puisque pour tout $t > 0$:

$$g_x'(t) = -\ln\left(1 + \frac{x^2}{t}\right) + \frac{x^2}{t+x^2} \text{ et } g_x''(t) = \frac{x^4}{t\left(x^2+t\right)^2}\,,$$

la fonction g_x' est croissante et $\lim\limits_{t\to+\infty} g_x'(t) = 0$; ce qui entraîne que pour tout $t > 0$: $g_x'(t) \leq 0$ ou encore que la fonction g_x est décroissante. Ainsi, pour tout entier $n > 0$:

$$f_{n+1}(x) = e^{g_x(n+1)} \leq e^{g_x(n)} = f_n(x)\,.$$

Autrement dit, la suite (f_n) est décroissante.

2) Il suffit d'utiliser le théorème de Dini et le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} = e^{-x^2}\,.$$

5.257 Soit $a \in \mathbb{R}$. Puique pour tout $x \neq a$:

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \leq |x-a|\,,$$

on a $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$. La dérivée de f étant nulle sur tout $\mathbb{R}$, la fonction f est constante.

$\boxed{\textbf{5.258}}$ En effet ;

1) $\forall\, x \in \mathbb{R} :\ f(x) = f(-x) \Rightarrow \forall\, x \in \mathbb{R} :\ f'(x) = -f'(-x)$. ($\Rightarrow f'(0) = 0$.)

2) $\forall\, x \in \mathbb{R} :\ f(x) = -f(-x) \Rightarrow \forall\, x \in \mathbb{R} :\ f'(x) = f'(-x)$.

3) $\forall\, x \in \mathbb{R} :\ f(x) = f(x+T) \Rightarrow \forall\, x \in \mathbb{R} :\ f'(x) = f'(x+T)$.

4) f' impaire $\Rightarrow f$ paire. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(0) + \int_0^{-x} f'(t)\,dt = f(0) - \int_0^{x} f'(-s)\,ds \\ &= f(0) + \int_0^{x} f'(s)\,ds = f(x)\,. \end{aligned}$$

f' paire $\not\Rightarrow f$ impaire. Contre-exemple : $f(x) = 1 + \sin x$.
f' périodique $\not\Rightarrow f$ périodique. Contre-exemple : $f(x) = x + \sin x$.

$\boxed{\textbf{5.259}}$ 1) Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+x^2}}\ \mathrm{ch}\Big(\alpha \ln\Big(x + \sqrt{1+x^2}\Big)\Big)$$

et

$$\begin{aligned} f''(x) = &\frac{-\alpha x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}\ \mathrm{ch}\Big(\alpha \ln\Big(x + \sqrt{1+x^2}\Big)\Big) \\ &+ \frac{\alpha^2}{1+x^2}\ \mathrm{sh}\Big(\alpha \ln\Big(x + \sqrt{1+x^2}\Big)\Big)\ , \end{aligned}$$

on a bien $\left(1+x^2\right)f''(x) + xf'(x) - \alpha^2 f(x) = 0$.

2) Pour $n = 0$ ou 1, le résultat est immédiat. Supposons donc que $n \geq 2$. Alors, en utilisant la formule de Leibniz, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(\left(1+x^2\right)^{(k)} f^{(n-k+2)}(x) + x^{(k)} f^{(n-k+1)}(x)\Big) - \alpha^2 f^{(n)}(x) \\ &= \left(1+x^2\right) f^{(n+2)}(x) + x(1+2n) f^{(n+1)}(x) - \left(\alpha^2 - n^2\right) f^{(n)}(x)\,. \end{aligned}$$

D'où $f^{(n+2)}(0) = \left(\alpha^2 - n^2\right) f^{(n)}(0)$.

$\boxed{\textbf{5.260}}$ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{100} x^k$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f(x) = \frac{1 - x^{101}}{1-x} \ \text{ et } \ f'(x) = \sum_{k=1}^{100} kx^{k-1} = \frac{1 + 100\,x^{101} - 101\,x^{100}}{\left(1-x\right)^2}\,.$$

Par conséquent $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k3^k = 3f'(3) = \frac{3}{4}\left(1 + 199 \cdot 3^{100}\right)$.

5.261 En posant $f(x) = g(x) = x^n$ dans la formule de Leibniz, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{(2n)!}{n!}\, x^n = \left(x^{2n}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x^n\right)^{(n-k)} \left(x^n\right)^{(k)} = n!\, x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 .$$

Ainsi, en prenant $x = 1$, $\dfrac{(2n)!}{\left(n!\right)^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

5.262 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque la suite $\left(x_n = (1+\frac{1}{n})^n\right)$ est strictement croissante et qu'elle converge vers e, on a $e > \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$. Etablissons à présent la deuxième inégalité. Pour cela, considérons la fonction auxiliaire $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$. Ainsi, en constatant que pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right) < 0 ,$$

la fonction f est strictement décroissante et comme de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e$, on peut écrire $e < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$.

1) Soit P_n avec $n \geq 2$, la relation définie par

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} < e^{n-1} < \frac{n^n}{(n-1)!} .$$

P_2 est vraie. A vérifier que pour tout entier $n \geq 2$: $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{\left(n+1\right)^n}{n!} &= \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &< e^{n-1}\, e < \frac{n^n}{n-1!} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \frac{\left(n+1\right)^{n+1}}{n!} . \end{aligned}$$

On a ainsi démontré, par récurrence, que la relation P_n est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

2) Soit $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} &\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} < e^{n-1} < \frac{n^n}{(n-1)!} \\ &\Rightarrow n^{n-1}\, e^{1-n} < (n-1)! < n^n\, e^{1-n} \Rightarrow n^n\, e^{1-n} < n! < n^{n+1}\, e^{1-n} . \end{aligned}$$

5.263 On va supposer que $\ell > 0$. Le cas $\ell < 0$ s'obtient en remplaçant f par $-f$.

1) Puisque $\ell > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \geq \alpha$:

$$f(x) + f'(x) \geq \frac{\ell}{2} ;$$

ce qui entraîne que pour tout $t \geq \alpha$: $g'(t) = e^t\big(f(t) + f'(t)\big) \geq \frac{\ell}{2}\, e^t > \frac{\ell}{2}$. Ainsi, en utilisant le théorème des accroissements finis, on obtient que pour tout $x > \alpha$:

$$g(x) > g(\alpha) + \frac{\ell}{2}\,(x - \alpha)\,.$$

Par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty\,.$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g'(x)}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) + f'(x)\big) = \ell\,.$

5.264 Soit $h :]0,1[\to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par $h(x) = \ln f(x)$. En constatant que pour tout $x > 0$: $h'(x) = g(x)$ et en utilisant le théorème des accroissements finis, on sait qu'à chaque $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, on peut associer un élément θ_x de $]0,1[$ tel que

$$g\left(\frac{1}{2} + \theta_x\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{h(x) - h\left(\dfrac{1}{2}\right)}{x - \dfrac{1}{2}}\;;$$

ce qui entraîne, puisque $\lim\limits_{x\to0+} h(x) = -\infty$, que

$$\lim_{x\to0+} g\left(\frac{1}{2} + \theta_x\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = +\infty\,.$$

Par conséquent la fonction g n'est pas bornée.

5.265 En utilisant la formule de MacLaurin, on sait qu'à chaque $x \in \mathbb{R}$, on peut associer un élément θ_x de $]0,1[$ tel que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(\theta_x x)\frac{x^2}{2} \geq f(0) + f'(0)x\,.$$

Il suffit de prendre $\alpha = f(0)$ et $\beta = f'(0)$.

Remarque : Ce résultat était prévisible car la fonction f est convexe.

5.266 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Puisque $f'(0) = 0$, cette fonction est continue. De plus, pour tout $x \neq 0$:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x) - f(0)}{x^2}\,.$$

1) $f(0) = f(1)$. Alors, $g(0) = g(1) = 0$ et l'on sait, d'après le théorème de Rolle, qu'il existe au moins un élément α de $]0,1[$ pour lequel $g'(\alpha) = 0$. D'où $f'(\alpha) = \frac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha}$.

2) $f(0) < f(1)$. La fonction g étant continue sur $[0,1]$, elle atteint son son maximum sur cet intervalle en un point que l'on désigne par α. Puisque $g'(1) < 0$ (car $f'(1) = 0$) et $g(1) > 0 = g(0)$, on a $\alpha \in \,]0,1[$. Par conséquent $g'(\alpha) = 0$ ou encore $f'(\alpha) = \frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha}$.

3) $f(0) > f(1)$. La fonction g étant continue sur $[0,1]$, elle atteint son son minimum sur cet intervalle en un point que l'on désigne par α. Puisque $g'(1) > 0$ (car $f'(1) = 0$) et $g(1) < 0 = g(0)$, on a $\alpha \in \,]0,1[$. Par conséquent $g'(\alpha) = 0$ ou encore $f'(\alpha) = \frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha}$.

5.267 Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell \neq 0$. Puisque par hypothèse $f(0) = 0$ et pour tout $|x| < \delta : f'(x) \neq 0$, on sait, d'après le théorème de Rolle, que pour tout $0 < |x| < \delta : f(x) \neq 0$. Par conséquent

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\, f(x)\right) = 0\ ;$$

ce qui entraîne que $f'(0) = 0$ (prop. 5.25). D'où contradiction.

5.268 On sait, d'après la formule de MacLaurin, qu'à chaque élément x de $]-1,1[$, on peut associer un élément $\overline{\theta}_x$ de $]0,1[$ tel que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''\big(\overline{\theta}_x x\big)\frac{x^2}{2}\,.$$

Ainsi, puisque pour tout $x \in \,]-1,1[\, : f(x) = f(0) + f'\big(x\theta(x)\big)x$, on obtient que pour tout $0 < |x| < 1$:

$$\frac{f''\left(\overline{\theta}_x x\right)}{2} = \left(\frac{f'\big(x\theta(x)\big) - f'(0)}{x\theta(x)}\right)\theta(x)\,.$$

D'autre part, la fonction f étant de classe $\mathbf{C}^2$ et $f''(0) \neq 0$, il existe un nombre $\delta \in \,]0,1[$ tel que pour tout $0 < |t| < \delta : f''(t) \neq 0$; ce qui entraîne que pour tout $0 < |x| < \delta$:

$$\frac{f'\big(x\theta(x)\big) - f'(0)}{x\theta(x)} \neq 0\,.$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to 0}\theta(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f''\left(\overline{\theta}_x x\right)}{2}}{\left(\dfrac{f'\big(x\theta(x)\big) - f'(0)}{x\theta(x)}\right)} = \frac{1}{2}\,.$$

5.269 Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \ell > 0$, il existe un nombre $a > 0$ tel que pour tout $t \geq a : f'(t) \geq \frac{\ell}{2}$; ce qui entraîne, d'après le théorème des accroissements finis, que pour tout $x > a : f(x) \geq f(a) + \frac{\ell}{2}(x-a)$. D'où

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

$\boxed{\textbf{5.270}}$ Il suffit d'utiliser l'exercice précédent.

$\boxed{\textbf{5.271}}$ Soit $T > 0$ une période de f. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f'(t) = \lim_{n\to+\infty} f'(t+nT) = \lim_{s\to+\infty} f'(s) = \ell\,;$$

ce qui entraîne que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = f(0) + \ell x$. Comme de plus $f(T) = f(0)$, on a $\ell = 0$. D'où f est constante.

$\boxed{\textbf{5.272}}$ 1) $\ell = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, il existe un nombre $a > 0$ tel que pour tout $t \geq a$: $\left|f'(t)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, en utilisant le théorème des accroissements finis, on peut écrire que pour tout $x \geq a$:

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \left|\frac{f(a)}{x}\right| + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Comme de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(a)}{x} = 0$, il existe un nombre $b \geq a$ tel que pour tout $x \geq b$: $\left|\frac{f(a)}{x}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $x \geq b$: $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \varepsilon$. Par conséquent

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0\,.$$

2) $\ell \neq 0$. Soit $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par $g(x) = f(x) - \ell x$. Alors, en utilisant 1),

$$\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell\,.$$

3) En général la réciproque est fausse. Comme contre-exemple, il suffit de prendre $f(x) = \cos x + \ell x$.

$\boxed{\textbf{5.273}}$ 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2) Par contre, puisque pour tout $x > 0$: $f'(x) = 2\cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ n'existe pas.

$\boxed{\textbf{5.274}}$ Raisonnons par l'absurde et supposons

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty\,.$$

Alors, il existe $b > a$ tel que pour tout $x \in]a,b[$: $f'(x) \neq 0$. Ainsi, sur $]a,b[$, les deux fonctions f' et g' gardent un signe constant qui ne peut être que négatif car $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = +\infty$; ce qui est impossible. D'où contradiction.

5.275 En effet, d'une part en constatant que pour tout $x > a$:

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{h(x)-h(a)}{x-a}\,,$$

on obtient, par passage à la limite, que $f'_d(a) = g'(a)$. D'autre part, puisque pour tout $x < a$:

$$\frac{h(x)-h(a)}{x-a} \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\,,$$

on a aussi $f'_g(a) = g'(a)$.

5.276 1) A chaque entier $p \geq 0$, associons la fonction $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

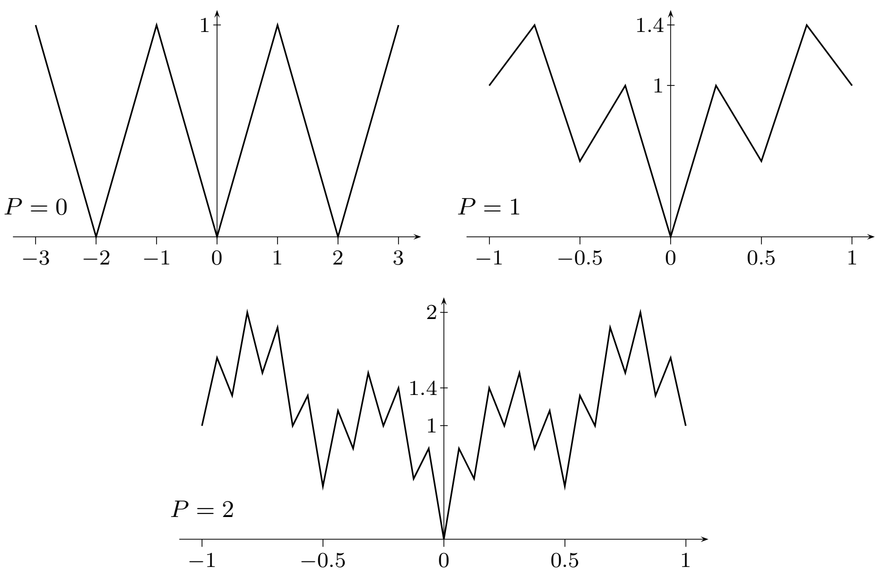
$$f_p(x) = \sum_{n=0}^{p} \left(\frac{3}{4}\right)^n g\left(4^n x\right).$$

Ainsi, en constatant que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \Big| f_p(x) - f(x) \Big| \leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 4\left(\frac{3}{4}\right)^{p+1}\,,$$

la suite de fonctions (f_p) converge uniformément vers f. Comme de plus toutes les fonctions f_p sont continiues, f l'est aussi.

2) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Puisque l'un au moins des deux intervalles ouverts $\left]4^m x - \frac{1}{2}, 4^m x\right[$ ou $\left]4^m x, 4^m x + \frac{1}{2}\right[$ ne contient aucun entier, on a, en prenant $\delta_m = -\frac{4^{-m}}{2}$ ou $\frac{4^{-m}}{2}$, que l'intervalle ouvert d'extrémités $4^m x$ et $4^m\big(x+\delta_m\big)$ ne contient aucun entier. Par conséquent aucun des intervalles ouverts d'extrémités $4^n x$ et $4^n\big(x+\delta_m\big)$, $n = 0, \ldots, m$ ne contient un entier.



Ainsi, de la définition de la fonction g, il découle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{g\big(4^n(x+\delta_m)\big)-g(4^n x)}{\delta_m}=\begin{cases}0 & \text{si } n>m\\ \alpha_n 4^n & \text{si } 0\le n\le m\end{cases}$$

où $\alpha_n=\pm 1$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{f(x+\delta_m)-f(x)}{\delta_m}&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\frac{g\big(4^n(x+\delta_m)\big)-g(4^n x)}{\delta_m}\right)\\&=\sum_{n=0}^{m}\alpha_n\left(\frac{3}{4}\right)^n 4^n=\sum_{n=0}^{m}\alpha_n 3^n\,;\end{aligned}$$

ce qui entraîne, puisque $\lim\limits_{m\to+\infty}\delta_m=0$ et la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n 3^n$ diverge, que $\lim\limits_{h\to+\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ n'existe pas. Autrement dit, f n'est pas dérivable en x.

5.277 1) Considérons les deux fonctions auxiliaires $f,g:\,]-1,1[\,\to\mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-x \text{ et } g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3(1-x^2)}\,.$$

Ainsi, en constatant que pour tout $|x|<1$:

$$f'(x)=\frac{x^2}{1-x^2}>0 \text{ et } g'(x)=-\frac{2x^4}{3(1-x^2)^2}<0\,,$$

la fonction f est strictement croissante tandis que la fonction g est strictement décroissante. Comme de plus $f(0)=g(0)=0$, on a que pour tout $0<x<1$: $f(x)>0$ et $g(x)<0$ ou encore

$$0<\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-x<\frac{x^3}{3(1-x^2)}\,.$$

2) Il suffit de rempacer x par $\frac{1}{2n+1}$ dans la stricte double inégalité obtenue sous 1).

3) Il résulte, de la stricte double inégalité obtenue sous 2), que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=e^{\left(\frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-1\right)}>1 \text{ et } \frac{y_{n+1}}{y_n}=e^{\left(\frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-1-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)}<1\,,$$

ce qui revient à dire que la suite (x_n) est strictement croissante tandis que la suite (y_n) est strictement décroissante. Comme de plus pour tout entier $n\ge 1$: $x_n-y_n=x_n\big(1-e^{\frac{1}{12n}}\big)<0$, la suite (x_n) est majorée par y_1. Elle est donc convergente ; ce qui entraîne

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to+\infty}x_n\left(1-e^{\frac{1}{12n}}\right)=0\,.$$

Par conséquent les deux suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes et leur limite commune ℓ est positive car $\ell > x_1 > 0$.
4) Soit (a_n) la suite auxiliaire définie par

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} = \frac{2^{2n}\,(n!)^2}{\sqrt{n}\,(2n)!}\,.$$

D'après la formule de Wallis, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{\pi}$. Par conséquent

$$0 < \ell = \lim_{n\to+\infty} x_{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}\,e^{-2n}}{(2n)!} = \sqrt{2} \lim_{n\to+\infty} a_n x_n^2 = \sqrt{2\pi}\ell^2$$
$$\Rightarrow \ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, puisque $x_n < \ell < y_n$, on obtient

$$e^0 = 1 < \frac{\ell}{x_n} = \frac{n!\ell}{n^{n+\frac{1}{2}}\,e^{-n}} < e^{\frac{1}{12\,n}}\,;$$

ce qui entraîne, la fonction e^x étant continue et bijective, qu'il existe dans l'intervalle $\left]0, \frac{1}{12\,n}\right[$ un unique élément σ_n tel que $\frac{n!\ell}{n^{n+\frac{1}{2}}\,e^{-n}} = e^{\sigma_n}$. Prendre $\theta_n = 12\,n\sigma_n$.
6) Il suffit d'utiliser la formule de Stirling.
7) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}$. Puisque pour tout entier $n > k$:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-k} &= \frac{x_{n-k}}{x_n} \cdot \frac{n^{n+\frac{1}{2}}\,x^k}{(n-k)^{n-k+\frac{1}{2}}\,n^k\,e^k k!}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{x_{n-k}}{x_n} \cdot \frac{x^k}{\left(1-\dfrac{k}{n}\right)^{n-k+\frac{1}{2}} e^k k!}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-k},\end{aligned}$$

on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\binom{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-k}\right) = \dfrac{x^k\,e^{-x}}{k!}$.

5.278 Cette inégalité étant évidente pour $n = 1$, $x = 0$ ou $x = 1$, soient $n \geq 2$ et $x \in \left]0, 1\right[$ et considérons la fonction auxiliaire $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = \big(t + (1-x)\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} t^k$$

(formule du binôme de Newton). Ainsi, puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$g'(t) = n\big(t + (1-x)\big)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} t^{k-1}$$

et

$$g''(t) = n(n-1)\big(t + (1-x)\big)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} t^{k-2}\,,$$

on obtient, en posantt $t = x$, que

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} ,$$

$$nx = xg'(x) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$n(n-1)x^2 = x^2 g''(x) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} .$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n} \big(k(k-1) + k(1-2nx) + n^2x^2\big) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\quad = n(n-1)x^2 + (1-2nx)nx + n^2x^2 = nx(1-x) \le n \max_{0\le s\le 1} s(1-s) = \frac{n}{4} .
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{5.279}}$ Puisque la fonction f admet un maximum local en a, il existe un nombre $0 < \delta_1 < b-a$ tel que pour tout $x \in [a, a+\delta_1] : f(x) \le f(a)$. De même, puisque la fonction f admet un maximum local en b, il existe un nombre $0 < \delta_2 < b-a$ tel que pour tout $x \in [b-\delta_2, b] : f(x) \le f(b)$. D'autre part, la fonction f étant continue, il existe au moins un élément u de $[a,b]$ pour lequel $f(u) = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

1) $a < u < b$. La fonction f étant dérivable sur $]a,b[$, on doit donc avoir $f'(u) = 0$. Dans ce cas, on peut prendre $c = u$.

2) $u = a$. Alors, la fonction f est constante sur $[a, a+\delta_1]$; ce qui entraîne, f étant dérivable sur $]a,b[$, que f' est nulle sur $]a, a+\delta_1]$. Il suffit de prendre $c = a + \delta_1$.

3) $u = b$. Alors, la fonction f est constante sur $[b-\delta_2, b]$; ce qui entraîne, f étant dérivable sur $]a,b[$, que f' est nulle sur $[b-\delta_2, b[$. Il suffit de prendre $c = b - \delta_2$.

$\boxed{\textbf{5.280}}$ 1) Pour les besoins de la démonstration, on va supposer que $f'(a) < f'(b)$. Soit $f'(a) < \ell < f'(b)$ et $g : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x) = f(x) - \ell x .$$

Cette fonction est dérivable et de plus $g'(x) = f'(x) - \ell$. Par conséquent $g'(a) < 0 < g'(b)$; ce qui entraîne que sur $[a,b]$, la fonction g admet un maximum local en a et un autre en b. Ainsi, en utilisant l'exercice précédent, on sait qu'il existe au moins un élément c de $]a,b[$ pour lequel $g'(c) = 0$. D'où $f'(c) = \ell$.

2) On sait, d'après 1), que sur $[a, b]$, la fonction f' prend toute valeur comprise entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Comme $f'(a)f'(b) < 0$, la fonction f' s'annule au moins une fois dans $]a, b[$.

3) Il suffit d'utiliser 1) et l'exercice 4.128.

5.281 Puisque la fonction f' ne s'annule pas, on sait, d'après l'exercice précédent, qu'elle garde un signe constant. Par conséquent la fonction f est strictement monotone.

5.282 Raisonnons par l'absurde et supposons que f' ne s'annule pas. Alors, f est strictement monotone (ex. 5.281). Elle est donc injective ; ce qui est impossible car f est paire. D'où contradiction. (En particulier, $f'(0) = 0$.)

5.283 Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) \geq m > 0$, la fonction f est strictement croissante et de plus, on peut écrire, en utilisant le théorème des accroissements finis, que

$$f(x) \geq f(0) + mx \text{ si } x > 0 \quad \text{et} \quad f(x) \leq f(0) + mx \text{ si } x < 0\,;$$

ce qui entraîne que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Finalement, le théorème de la valeur intermédiaire nous permet de conclure que la fonction f s'annule une et une seule fois dans $\mathbb{R}$.

5.284 Soit $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ les deux fonctions définies respectivement par

$$g(x) = \frac{1}{x} \text{ et } h(x) = \frac{f(x)}{x}\,.$$

En appliquant à ces deux fonctions le théorème de Cauchy, on a

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(c) - cf'(c) \text{ avec } c \in \,]a, b[\;.$$

5.285 Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = (x - a)(x - b)f(x)$. Pour tout $x \in]a, b[$:

$$g'(x) = (x - b)f(x) + (x - a)f(x) + (x - a)(x - b)f'(x)\,.$$

Ainsi, puisque $g(a) = g(b) = 0$, on sait, d'après le théorème de Rolle, qu'il existe un élément c de $]a, b[$ pour lequel $g'(c) = 0$. Par conséquent

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{1}{a - c} + \frac{1}{b - c}\,.$$

5.286 1) A chaque $h \in \mathbb{R}$, choisi de sorte que $a \pm h \in I$, on peut associer, d'après la formule de MacLaurin, un nombre $0 < \theta_h < 1$ tel que

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}\,f''(a + \theta_h h)h^2$$

et, en remplaçant h par $-h$, $f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{1}{2} f''(a - \theta_{-h}h)h^2$. Ainsi, $f \in \mathbf{C}^2$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \big(f''(a+\theta_h h) + f''(a - \theta_{-h}h)\big) = f''(a)\,.
\end{aligned}$$

2) Pour commencer, on va supposer que f est convexe et soit $x \in I$. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ avec $a \pm h \in I$,

$$f(x) = f\left(\frac{(x+h) + (x-h)}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\big(f(x+h) + f(x-h)\big)$$

ou encore

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geq 0\,.$$

D'où, en utilisant 1), on a

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \geq 0\,.$$

Montrons à présent la réciproque. Puisque pour tout $x \in I$: $f''(x) \geq 0$, la fonction dérivée f' est croissante sur I. Soient $a < b$ deux éléments de I et $\lambda \in \,]0,1[$. Alors, en posant $c = \lambda a + (1-\lambda)b$, on sait, d'après le théorème des accroissements finis, qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $a < \alpha < c < \beta < b$ et vérifiant

$$f(a) = f(c) + f'(\alpha)(a-c) \text{ et } f(b) = f(c) + f'(\beta)(b-c)\,;$$

ce qui nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned}
\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) &= f(c) + \lambda(1-\lambda)(b-a)\big(f'(\beta) - f'(\alpha)\big) \\
&\geq f(c) = f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big)\,.
\end{aligned}$$

Si $a > b$ et $\lambda \in \,]0,1[$, pour obtenir l'inégalité ci-dessus, il suffit d'intervertir λ et $1-\lambda$.

Si $a = b$ ou si $\lambda = 0$ ou 1, l'inégalité est évidente. Autrement dit, la fonction f est convexe.

$\boxed{\mathbf{5.287}}$ 1) $\forall\, x > 1$, $f''(x) = \dfrac{1+\ln x}{\big(x \ln x\big)^2} > 0 \Rightarrow f$ convexe.

2) Puisque f est convexe, on peut écrire que pour tout couple a, b de $]1, +\infty[$:

$$\begin{aligned}
&-\ln\left(\ln \frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\big(f(a) + f(b)\big) = -\frac{1}{2}\big(\ln(\ln a) + \ln(\ln b)\big) = -\ln\sqrt{\ln a \ln b} \\
&\Rightarrow \ln \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{\ln a \ln b}\,.
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{5.288}}$ 1) $\forall\, x>0 : f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0 \Rightarrow f$ convexe.

2) Puisque f est convexe, on peut écrire que pour tout couple a, b de $]0, +\infty[$:

$$(a+b)\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le f(a) + f(b) = a\ln a + b\ln b\,.$$

$\boxed{\textbf{5.289}}$ 1) $\forall\, x>0 : f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0 \Rightarrow f$ convexe.

2) Puisque f est convexe, on peut écrire

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k\beta_k}{\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j^q}\right)^p = f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k^q}{\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j^q}\, \alpha_k\beta_k^{-\frac{q}{p}}\right)$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k^q}{\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j^q}\, f\big(\alpha_k\beta_k^{-\frac{q}{p}}\big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k^q}{\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j^q}\, \alpha_k^p\beta_k^{-q} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^p}{\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j^q}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\beta_k \le \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

3) Soit $r \in\,]1, +\infty[$. En utilisant l'inégalité ci-dessus pour $p = r$ et $q = \frac{r}{r-1}$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\big(\alpha_k+\beta_k\big)^{r-1} \le \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{k=1}^{n}\big(\alpha_k+\beta_k\big)^r\right)^{\frac{r-1}{r}}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k\big(\alpha_k+\beta_k\big)^{r-1} \le \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{k=1}^{n}\big(\alpha_k+\beta_k\big)^r\right)^{\frac{r-1}{r}}.$$

D'où

$$\sum_{k=1}^{n}\big(\alpha_k+\beta_k\big)^r = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\big(\alpha_k+\beta_k\big)^{r-1} + \sum_{k=1}^{n} \beta_k\big(\alpha_k+\beta_k\big)^{r-1}$$

$$\le \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k^r\right)^{\frac{1}{r}}\right) \left(\sum_{k=1}^{n}\big(\alpha_k+\beta_k\big)^r\right)^{\frac{r-1}{r}}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n}\big(\alpha_k+\beta_k\big)^r\right)^{\frac{1}{r}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

$\boxed{\textbf{5.290}}$ 1) $\forall\, x \in \mathbb{R} : f''(x) = e^x > 0 \Rightarrow f$ convexe.

2) Puisque f est convexe, on peut écrire pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n > 0$,

$$\sqrt[n]{a_1\cdots a_n} = f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln a_k\right) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\ln a_k) = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\,.$$

$\boxed{\mathbf{5.291}}$ 1) $\forall\, x > 0 : f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} > 0 \Rightarrow f$ convexe.

2) Puisque f est convexe, on peut écrire pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n > 0$,

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{\alpha} = f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha}\,.$$

$\boxed{\mathbf{5.292}}$ 1) $\forall\, x \in \left]0, +\infty\right[: f''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow f$ convexe.

2) Puisque f est convexe, on peut écrire pour tout $\alpha, \beta \in \left]0, +\infty\right[$:

$$-\ln\left(\frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}\right) = f\left(\frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}\right) \leq \frac{1}{p}\, f\big(\alpha^p\big) + \frac{1}{q}\, f\big(\beta^q\big) = -\ln \alpha\beta$$

ou encore

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}\,.$$

$\boxed{\mathbf{5.293}}$ 1) f, g convexes $\Rightarrow f', g'$ croissantes $\Rightarrow \big(f+g\big)' = f' + g'$ croissante $\Rightarrow f + g$ convexe.

2) Pas forcément. Comme contre-exemple, il suffit de prendre $f(x) = -\sin x$ et $g(x) = -\cos x$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$\boxed{\mathbf{5.294}}$ 1) Puisque la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante et dérivable, on a pour tout $t \in \mathbb{R} : g'(t) \geq 0$; ce qui entraîne, du fait que les deux fonctions f et g sont convexes et de classe $\mathbf{C}^2$, que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\big(g \circ f\big)''(x) = g''\big(f(x)\big)\big(f'(x)\big)^2 + g'\big(f(x)\big)f''(x) \geq 0\,.$$

Par conséquent la fonction composée $g \circ f$ est convexe.

2) Pas obligatoirement. Comme contre-exemple, il suffit de prendre $f(x) = e^x$ et $g(x) = -x$.

$\boxed{\mathbf{5.295}}$ $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 4 & \text{si } x = 1\,. \end{cases}$

$\boxed{\mathbf{5.296}}$ Pour commencer, on va supposer que f est convexe et soit $a \in I$. Alors, puisqu'à tout $t \in I$, on peut, d'après le théorème des accroissements finis, associer un élément θ_t de $\left]0, 1\right[$ tel que

$$f(t) - f(a) = f'\big(a + \theta_t(t-a)\big)(t-a)\,,$$

on peut écrire, f' étant croissante, que pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f(x) - \big(f(a) + f'(a)(x-a)\big) &= \big(f(x) - f(a)\big) + f'(a)(x-a) \\ &= \big(f'\big(a + \theta_x(x-a)\big) - f'(a)\big)\,(x-a) \geq 0\,. \end{aligned}$$

Montrons à présent la réciproque. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que la fonction f n'est pas convexe. Alors, il existe trois éléments $a < c < b$ de I tels que le point $P = \big(c, f(c)\big)$ se trouve strictement au-dessus de la corde qui joint les deux points $A = \big(a, f(a)\big)$ et $B = \big(b, f(b)\big)$. Par conséquent, si on désigne par d la tangente à la courbe C au point P, l'un au moins des deux points A ou B se trouve strictement au-dessous de d (il suffit de dessiner les six cas possibles !) ; ce qui est impossible. D'où contradiction.

5.297 Désignons par T la tangente à la courbe C issue du point D. Puisque la fonction est convexe, on sait que les deux points A et B se trouvent au-dessus de T ; ce qui n'est possible que si T et Γ sont confondues. Pour conclure, il suffit de se rappeler que tous les points de C se trouvent entre T et Γ.

5.298 Si f est convexe, cette inégalité est vérifiée en prenant $\lambda = \frac{1}{2}$. La réciprocité n'est pas vraie. En effet, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction discontinue partout telle que pour tout couple x, y de $\mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

(ex. 4.190). La discontinuité de f entraîne sa non convexité. Par contre, en constatant que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = f\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) = 2f\left(\frac{t}{2}\right),$$

on a que pour tout couple x, y de $\mathbb{R}$:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

5.299 Pour commencer, supposons que f est convexe. Alors, pour avoir l'inégalité, il suffit de prendre, dans la définition d'une fonction convexe, $\lambda = \frac{1}{2}$. Montrons à présent la réciproque. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas convexe. Alors, il existe deux éléments $a < b$ de I et un nombre $\xi \in \,]0,1[$ tels que

$$f\big(\xi a + (1-\xi)b\big) > \xi f(a) + (1-\xi)f(b).$$

Ainsi, en posant

$$\lambda_1 = \sup\big\{\lambda \in [0,\xi[\,:\, f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)\big\}$$

et

$$\lambda_2 = \inf\big\{\lambda \in \,]\xi,1] : f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)\big\},$$

on obtient, grâce à la continuité de la fonction f, que $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq 1$,

$$f\big(\lambda_k a + (1-\lambda_k)b\big) = \lambda_k f(a) + (1-\lambda_k)f(b),\ \ k \in \{1,2\},$$

et pour tout $\mu \in \,]\lambda_1, \lambda_2[$:

$$f\big(\mu a + (1-\mu)b\big) > \mu f(a) + (1-\mu)f(b);$$

ce qui est impossible, car en prenant

$$x = \lambda_1 a + (1-\lambda_1)b, \quad y = \lambda_2 a + (1-\lambda_2)b \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2},$$

on a $\lambda_1 < \beta < \lambda_2$ et

$$\beta f(a) + (1-\beta)f(b) = \frac{1}{2}\big(f(x)+f(y)\big) \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\big(\beta a + (1-\beta)b\big).$$

D'où contradiction.

5.300 En effet, soit $a \leq b$ deux éléments de E et $c \in [a,b]$. Alors, il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $c = \lambda a + (1-\lambda)b$; ce qui entraîne, puisque f est convexe et $a, b \in E$, que

$$f(c) = f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \leq \alpha$$

ou encore $c \in E$.

La réciproque est fausse. Comme contre-exemple, il suffit de prendre la fonction $f(x) = x^3$.

5.301 Puisque la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est croissante et non constante, il existe $0 < a < b$ tels que $f(a) < f(b)$. Comme de plus la fonction f est convexe, on a pour tout $x > b$:

$$0 < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ ou encore } f(x) \geq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

5.302 Soit $0 < a < b$. Alors, puisque $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est convexe, on a pour tout $x > b$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{f(a)}{x}}{1-\dfrac{a}{x}} ;$$

ce qui entraîne que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{f(x)}{x} - \frac{f(a)}{x}}{1-\dfrac{a}{x}} = \ell \leq 0.$$

D'où $f(a) \geq f(b)$. La fonction f est donc bien décroissante.

5.303 Soit $a < b$. Puisque la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe, on a pour tout $x < a$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} ;$$

ce qui entraîne, par passage à la limite, que

$$0 = f'_g(a) = \lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ou encore $f(a) \leq f(b)$. De façon analogue, on démontre que pour tout $c < a$:

$$f(a) \leq f(c).$$

5.304 Raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas constante. Alors, il existe $a < b$ tels que $f(a) \neq f(b)$. Supposons pour commencer que $f(a) < f(b)$. La fonction f étant convexe, on a pour tout $x > b$:

$$0 < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ ou encore } f(x) \geq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\,;$$

ce qui entraîne que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Ce cas est donc à exclure.
Supposons à présent que $f(a) > f(b)$. Alors, pour tout $x < a$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ ou encore } f(x) \geq f(a) + \frac{f(a)-f(b)}{b-a}(a-x)\,;$$

ce qui entraîne que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Ce cas est donc aussi à exclure. D'où contradiction.

5.305 Puisque la fonction f est convexe sur l'intervalle ouvert $]a,+\infty[$, elle est continue. Comme par hypothèse les deux limites $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existent, elle est uniformément continue (ex. 4.158).

Remarque : Ce résultat reste valable si on remplace $]a,+\infty[$ par $]-\infty,b[$ ou $]-\infty,+\infty[$ (pour ce dernier intervalle, f est constante (ex. 5.304)).

5.306 D'une part, la fonction f n'étant pas monotone (ex. 4.129), il existe trois nombres réels $a < u < v < w < b$ tels que

$$\big(f(v) - f(u)\big)\big(f(v) - f(w)\big) > 0\,.$$

D'autre part, la fonction f étant convexe, on a aussi $f(v) \leq \max\big\{f(u), f(w)\big\}$. Par conséquent $f(v) < f(u)$ et $f(v) < f(w)$; ce qui entraîne, la fonction f étant continue, qu'il existe $c \in\,]u,w[$ tel que $f(c) = \min\limits_{x\in[u,w]} f(x)$. De plus $f(u) > f(c)$ et $f(w) > f(c)$.

Ainsi, en utilisant de nouveau la convexité de f, on obtient que pour tout $r \in\,]a,u]$ et tout $s \in [w,b[$:

$$f(u) \leq \max\big\{f(r), f(c)\big\} = f(r) \text{ et } f(w) \leq \max\big\{f(s), f(c)\big\} = f(s)\,.$$

Finalement, puisque pour $a < x < y \leq c$,

1) $x < y \leq u : f(y) \leq \max\big\{f(x), f(u)\big\} = f(x)$

2) $x < u < y : f(y) \leq \max\big\{f(u), f(c)\big\} = f(u) \leq f(x)$

3) $u \leq x < y : f(y) \leq \max\big\{f(x), f(c)\big\} = f(x)$,

la fonction f est décroissante sur $]a,c]$. De même, pour $c \leq x < y < b$,

1) $x < y \leq w : f(x) \leq \max\big\{f(c), f(y)\big\} = f(y)$

2) $x < w < y : f(x) \leq \max\big\{f(c), f(w)\big\} = f(w) \leq f(y)$

3) $w \leq x < y : f(x) \leq \max\big\{f(w), f(y)\big\} = f(y)$,

la fonction f est croissante sur $[c,b[$.

$\boxed{\textbf{5.307}}$ 1) Il suffit d'utiliser le résultat de l'exercice précédent et le fait que la fonction f est bornée.

2) La fonction f étant convexe sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, elle est continue ; ce qui entraîne que la fonction g est continue. Montrons à présent qu'elle est aussi convexe. En effet, soit $a \leq u < v \leq b$ et $\lambda \in [0,1]$. Alors, pour tout entier $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} g\left(\lambda\left(u+\frac{b-u}{n}\right)+(1-\lambda)\left(v-\frac{v-a}{n}\right)\right) \\ \leq \lambda g\left(u+\frac{b-u}{n}\right)+(1-\lambda)g\left(v-\frac{v-a}{n}\right), \end{aligned}$$

ce qui donne, par passage à limite, que $g\big(\lambda u+(1-\lambda)v\big) \leq \lambda g(u)+(1-\lambda)g(v)$.

$\boxed{\textbf{5.308}}$ 1) *Existence.* Puisque la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue et que de plus $f(a)f(b) < 0$, on sait, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, qu'elle s'annule au moins une fois dans l'intervalle ouvert $]a,b[$.

Unicité. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux éléments $c < d$ de $]a,b[$ tels que $f(c) = f(d) = 0$. Alors, d'après le théorème de Rolle, il existe $c < u < d$ tel que $f'(u) = 0$. Comme de plus la fonction f' est strictement croissante sur $[a,b]$ (car $\forall\, x \in [a,b] : f''(x) > 0$), on peut écrire que pour tout $x \in\,]u,b] : f'(x) > 0$; ce qui entraîne que la fonction f est strictement croissante sur $[u,b]$. Ainsi, puisque $f(d) = 0$ et $u < d < b$, on devrait avoir $f(b) > 0$. D'où contradiction.

2) Raisonnons de nouveau par l'absurde et supposons qu'il existe un élément v de $[a,\alpha]$ pour lequel $f'(v) \geq 0$. Alors, puisque la fonction f' est strictement croissante sur $[a,b]$, on a pour tout $x \in\,]v,b] : f'(x) > 0$; ce qui entraîne que la fonction f est strictement croissante sur $[v,b]$. Ainsi, puisque $f(\alpha) = 0$ et $v \leq \alpha < b$, on devrait avoir $f(b) > 0$. D'où contradiction.

3) Soit $x \in [a,\alpha[$. Puisque la fonction continue f ne s'annule pas dans $[a,\alpha[$, elle garde un signe constant. Comme par hypothèse $f(a) > 0$, on a $f(x) > 0$. Or, d'après 2), on a aussi $f'(x) < 0$. Par conséquent $x < x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Montrons à présent la seconde inégalité. Pour cela, utilisons la formule de Taylor qui nous dit qu'il existe $0 < \theta < 1$ tel que

$$0 = f(\alpha) = f(x) + f'(x)(\alpha - x) + \frac{f''\big(x+\theta(\alpha-x)\big)}{2}\,\big(\alpha - x\big)^2 .$$

Ainsi, puisque $a \leq x < x+\theta(\alpha-x) < \alpha < b$, on peut écrire, grâce à l'hypothèse que pour tout $t \in [a,b] : f''(t) > 0$, que $f(x) + f'(x)(\alpha - x) < 0$. D'où

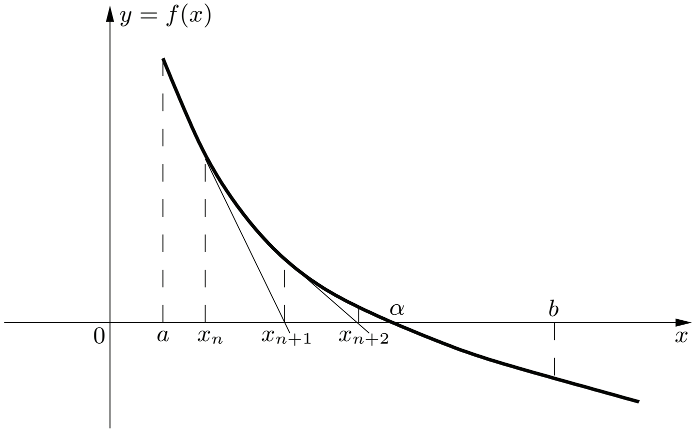
$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} < \alpha .$$

4a) En utilisant la double inégalité obtenue sous 3), on démontre, par un simple raisonnement par récurrence, que pour tout entier $n \geq 0$:

$$a \leq x_n < x_{n+1} < \alpha .$$

La suite (x_n) est strictement croissante et majorée par α, elle converge.

Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Alors, $a \leq \ell \leq \alpha$ et $\ell = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)}$. D'où $\ell = \alpha$.



5.309 Pour commencer, supposons que f est convexe et soient $x < y < z$ trois éléments de I. Alors, en remarquant que

$$y = \frac{z-y}{z-x}\,x + \frac{y-x}{z-x}\,z\,,\quad \frac{y-x}{z-x} = 1 - \frac{z-y}{z-x} \text{ et } \frac{z-y}{z-x} \in \,]0,1[\,,$$

on peut écrire

$$f(y) \leq \frac{z-y}{z-x}\,f(x) + \frac{y-x}{z-x}\,f(z)\,;$$

ce qui entraîne, puisque

$$\frac{z-y}{(z-x)(y-x)} = \frac{1}{y-x} - \frac{1}{z-x} \text{ et } \frac{y-x}{(z-x)(z-y)} = \frac{1}{z-y} - \frac{1}{z-x}\,,$$

que

$$\frac{f(y)}{y-x} \leq \frac{f(x)}{y-x} - \frac{f(x)}{z-x} + \frac{f(z)}{z-x} \text{ et } \frac{f(y)}{z-y} \leq \frac{f(x)}{z-x} + \frac{f(z)}{z-y} - \frac{f(z)}{z-x}$$

ou encore

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}\,.$$

Montrons à présent la réciproque. Pour cela, soient $a < b$ et $\lambda \in \,]0,1[$. Alors, $a < \lambda a + (1-\lambda)b < b$ et

$$\frac{f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) - f(a)}{(1-\lambda)(b-a)} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ou encore $f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$.

Pour le cas $b < a$, remplacer λ par $\beta = 1 - \lambda$.

$\boxed{\textbf{5.310}}$ 1) Soit $a \in I$. La fonction f étant convexe, on sait (ex. 5.309) que pour tout couple d'éléments $u < v$ de $I \setminus \{a\}$:

$$\frac{f(u)-f(a)}{u-a} \leq \frac{f(v)-f(a)}{v-a}\,;$$

ce qui entraîne que la fonction $h : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

est croissante et donc que les deux nombres $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent. Par conséquent,

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a-} \left(f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,(x-a)\right) = f(a)$$

et

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} \left(f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,(x-a)\right) = f(a)\,.$$

Autrement dit, la fonction f est continue en a.

2) Si I n'est pas ouvert, une fonction convexe n'est pas forcément continue. En effet, il suffit de prendre comme contre-exemple

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{5.311}}$ Pour commencer, supposons que f est convexe. Alors, puisqu'elle est dérivable et que (ex. 5.309) pour tout $a < x < b$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b}\,,$$

on a

$$\begin{aligned} f'(a) = f'_d(a) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &\leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ \leq \lim_{x\to b-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} &= f'_g(b) = f'(b)\,. \end{aligned}$$

La fonction f' est croissante. Montrons à présent la réciproque. Pour cela, soient $u < v$ deux éléments de I, $\lambda \in \,]0,1[$ et posons $w = \lambda u + (1-\lambda)v$. Ainsi, en utilisant le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe $c, d \in I$ tels que $u < c < w < d < v$ et pour lesquels

$$f(u) = f(w) + f'(c)(u-w) \text{ et } f(v) = f(w) + f'(d)(v-w)\,.$$

Par conséquent, f' étant croissante,

$$\begin{aligned} \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v) &= f(w) + \lambda(1-\lambda)\big(f'(d) - f'(c)\big)(v-u) \\ &\geq f(w) = f\big(\lambda u + (1-\lambda)v\big)\,. \end{aligned}$$

5.312 La fonction f étant convexe, sa fonction dérivée f' est croissante donc continue (ex. 5.280).

5.313 Si f n'est pas monotone, le résultat est évident car f atteint son minimum (ex. 5.306) De même si f est constante. Supposons à présent que f est croissante et non constante. Alors, il existe $a < c < d < b$ tels que $f(c) < f(d)$; ce qui entraîne, f étant convexe, que pour tout $a < x < c$:

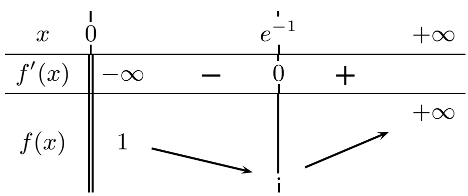
$$f(x) \geq f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c}\,(x - c) > f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c}\,(a - c)$$

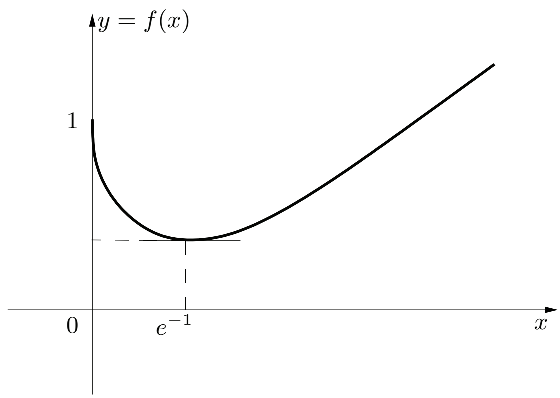
(ex. 5.309). Comme de plus pour tout $c \leq x < b$: $f(x) \geq f(c)$, la fonction f est minorée. Pour finir, supposons que f est décroissante et non constante. Alors, il existe $a < r < s < b$ tels que $f(r) > f(s)$; ce qui entraîne, f étant convexe, que pour tout $s < x < b$:

$$f(x) \geq f(s) + \frac{f(s) - f(r)}{s - r}\,(x - s) > f(s) + \frac{f(s) - f(r)}{s - r}\,(b - s)\,.$$

Comme de plus pour tout $a < x \leq s$: $f(x) \geq f(s)$, la fonction f est minorée.

5.314 Pour tout $x \in\,]0, +\infty[$: $f'(x) = (1 + \ln x)x^x$. D'où

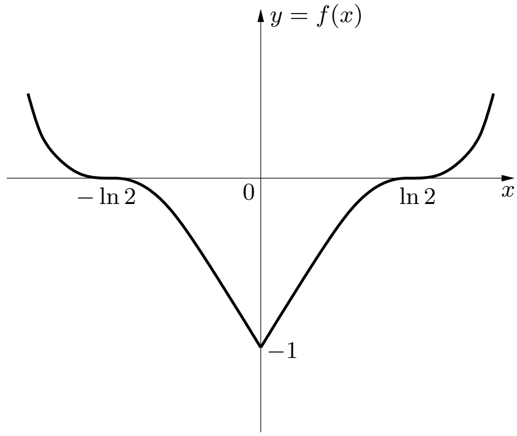




$\dfrac{1}{e} \cong 0{,}3679$ et $f\left(\dfrac{1}{e}\right) \cong 0{,}6922$.

$\boxed{\mathbf{5.315}}$ Cette fonction étant paire, on va l'étudier seulement sur $[0, +\infty[$. Puisque pour tout $x \geq 0$: $f'(x) = 3\,e^x \big(e^x - 2\big)^2$, on a

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$	3	$+$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

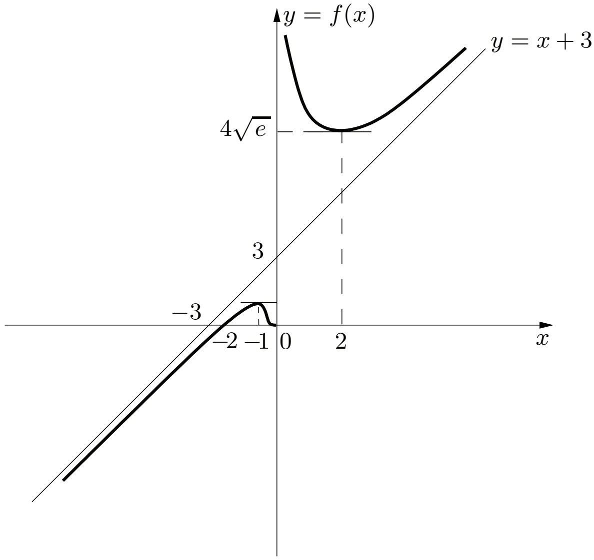


$\boxed{\mathbf{5.316}}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}} \text{ et } f''(x) = \frac{5x+2}{x^4}\, e^{\frac{1}{x}}\,.$$

D'où

x	$-\infty$		-1		$-2/5$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$			$-$		0	$+$	$\Vert$		$+$		
$f'(x)$		$+$	0		$-$		$0 \Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$			$0 \Vert +\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

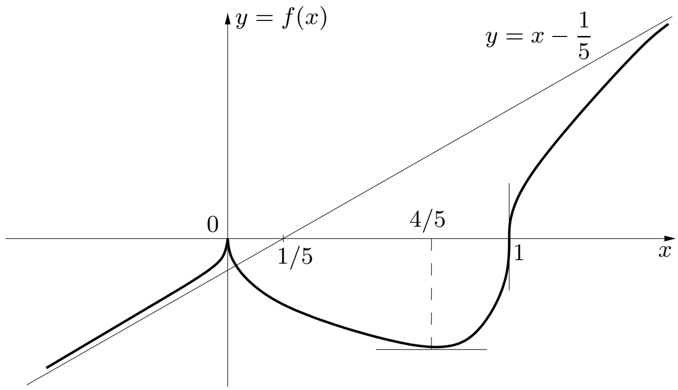


5.317 Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$:

$$f'(x) = \frac{x^3(5x-4)}{5\sqrt[5]{x^{16}\big(x-1\big)^4}}\,.$$

D'où

x	$-\infty$		0		$4/5$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+\infty \parallel -\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty \parallel +\infty$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$



$\boxed{\textbf{5.318}}$ En constatant que $\{4x^3 - 3x : x \in [-1,1]\} \subset [-1,1]$, la fonction $f(x) = \operatorname{Arccos}(4x^3 - 3x)$ est bien définie. Ainsi, puisque

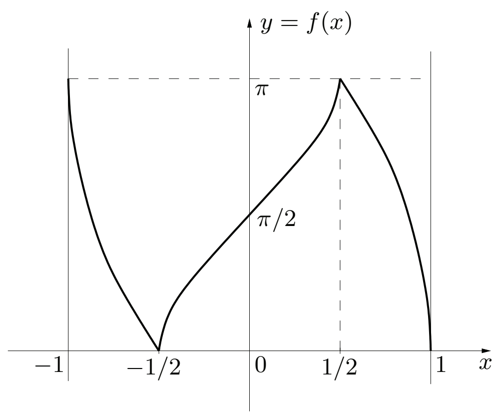
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in \left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[\\ \dfrac{-3}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in \left]-1, -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[\end{cases}$$

et

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}} & \text{si } x \in \left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[\\ \dfrac{-3x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}} & \text{si } x \in \left]-1, -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[, \end{cases}$$

on a

x	-1		$-1/2$		0		$1/2$		1
$f''(x)$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	‖
$f'(x)$	‖ $-\infty$	$-$	$-2\sqrt{3}$ ‖ $2\sqrt{3}$		$+$		$2\sqrt{3}$ ‖ $-2\sqrt{3}$	$-$	$-\infty$ ‖
$f(x)$	π	↘	0	↗		↗	π	↘	0



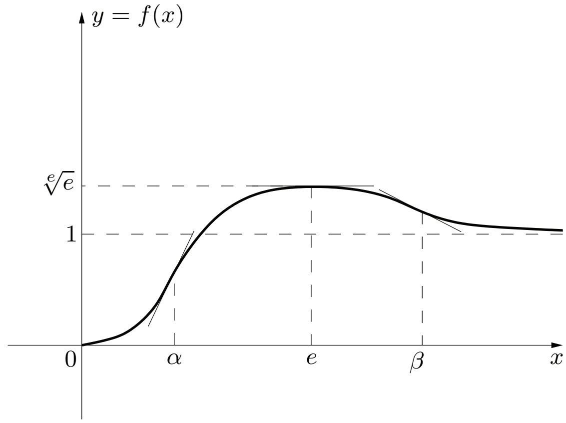
5.319 Pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}\,(1-\ln x) \text{ et } f''(x) = \frac{\sqrt[x]{x}}{x^4}\left(\ln^2 x + 2(x-1)\ln x - 3x + 1\right).$$

D'où

x	0		α		e		β		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\nearrow$	$\sqrt[e]{e}$	$\searrow$		$\searrow$	1

$\alpha \cong 0{,}58$ et $\beta \cong 4{,}37$



$\sqrt[e]{e} \cong 1{,}444.$

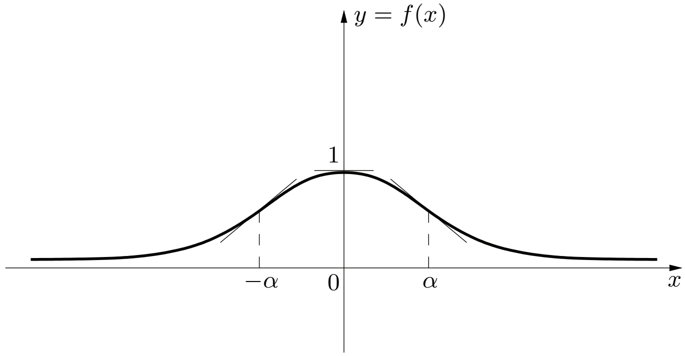
5.320 Cette fonction étant paire, on va l'étudier que sur $]0,+\infty[$. Puisque pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3 \operatorname{ch}^2 \frac{1}{x^2}} \text{ et } f''(x) = \frac{6}{x^4 \operatorname{ch}^2 \frac{1}{x^2}} - \frac{8 \operatorname{th} \frac{1}{x^2}}{x^6 \operatorname{ch}^2 \frac{1}{x^2}},$$

on a

x	0		α		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$		$\searrow$	0

$\alpha \cong 1{,}005$



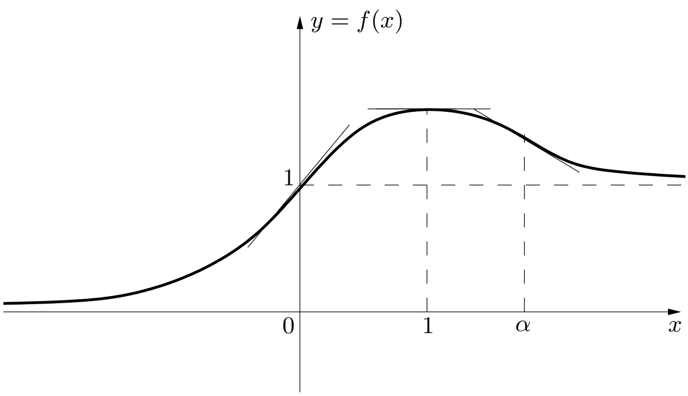
5.321 Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{(1-x)\,e^x}{\big(e^x - x\big)^2} \text{ et } f''(x) = \frac{2 + (x-2)\big(e^x + x\big)}{\big(e^x - x\big)^3}\, e^x\,.$$

D'où

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$f'(x)$			$+$		0		$-$		
$f(x)$	0		$\nearrow$				$\searrow$		1

$\alpha \cong 1{,}73$

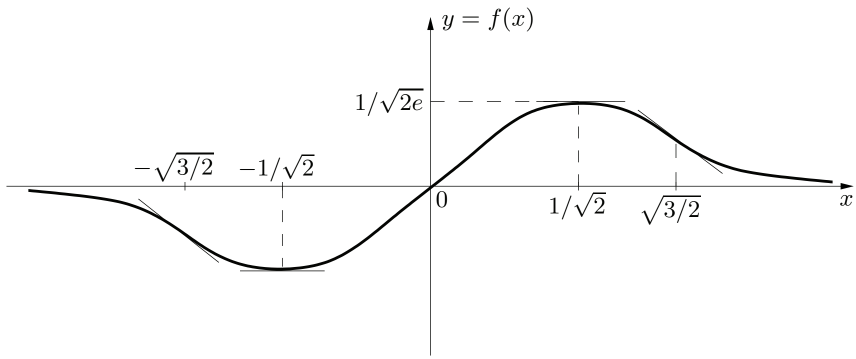


$\boxed{\textbf{5.322}}$ Cette fonction étant impaire, on va l'étudier que sur $[0, +\infty[$. Puisque pour tout $x \geq 0$:

$$f'(x) = (1 - 2x^2)\, e^{-x^2} \text{ et } f''(x) = -2x(3 - 2x^2)\, e^{-x^2}\,,$$

on a

x	0		$1/\sqrt{2}$		$\sqrt{3/2}$		$+\infty$
$f''(x)$	0		$-$		0	$+$	
$f'(x)$	1	$+$	0		$-$		
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$			0

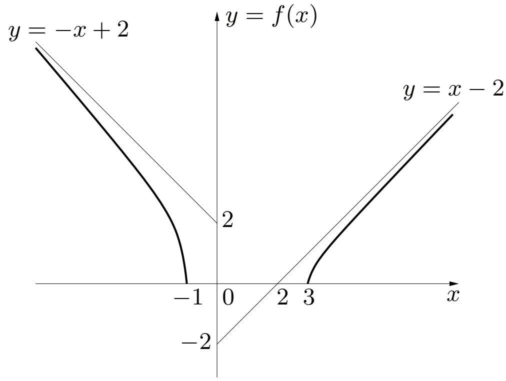


$\boxed{\textbf{5.323}}$ Pour tout $x \in \,]-\infty, -1[\, \times \,]3, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}\,.$$

D'où

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\infty$ ‖		‖ $+\infty$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0 ‖		‖ 0	$\nearrow$	$+\infty$

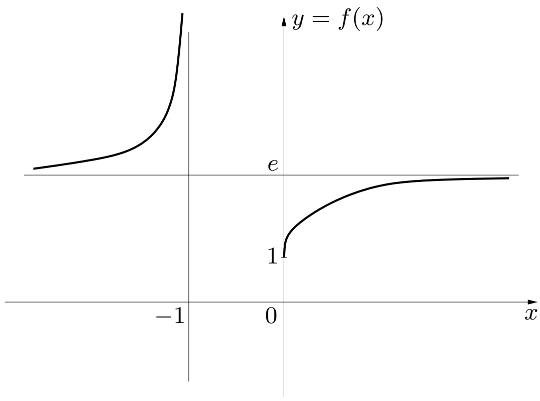


$\boxed{\mathbf{5.324}}$ Pour tout $x \in \,]-\infty, -1[\, \times \,]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x .$$

D'où

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$		$\|$ $+\infty$	$+$	
$f(x)$	e	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$		$\|$ 1	$\nearrow$	e

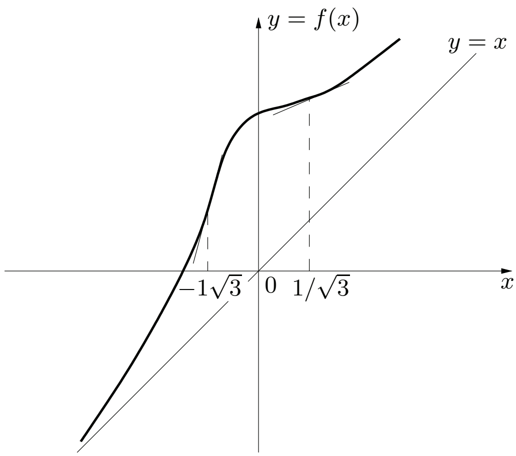


5.325 *Rappel* : $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\} : 2x < \left(1+x^2\right) < \left(1+x^2\right)^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} \text{ et } f''(x) = \frac{2\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}\,.$$

D'où

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$				$+$			
$f(x)$	$-\infty$			$\nearrow$			$+\infty$

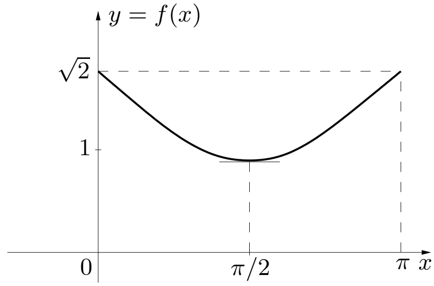


5.326 Puisque pour tout $x \in [0,\pi]$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\cos\dfrac{x}{2} + \sin\dfrac{x}{2}} \text{ et } f'(x) = \frac{-\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\left(\cos\dfrac{x}{2} + \sin\dfrac{x}{2}\right)^2}\,,$$

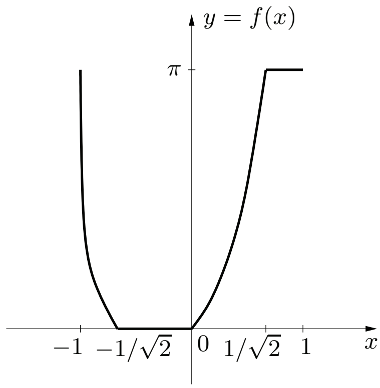
on a

x	0		$\pi/2$		π
$f'(x)$	$-1/\sqrt{2}$	$-$	0	$+$	$1/\sqrt{2}$
$f(x)$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$



$\boxed{\textbf{5.327}}$ Pour tout $x \in [-1, 1]$ (voir ex. 4.95 et 4.101) :

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - 4\operatorname{Arcsin} x & \text{si } x \in \left[-1, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ 4\operatorname{Arcsin} x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ \pi & \text{si } x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]. \end{cases}$$

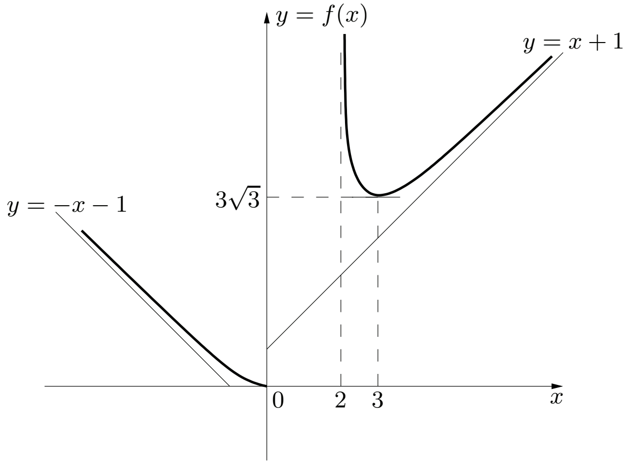


$\boxed{\textbf{5.328}}$ Pour tout $x \in \,]-\infty, 0[\, \times \,]2, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{\big(x-2\big)^2}\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}\,.$$

D'où

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$0 \,\Vert$		$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$0 \,\Vert$		$\Vert\, +\infty$	$\searrow$	$3\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$



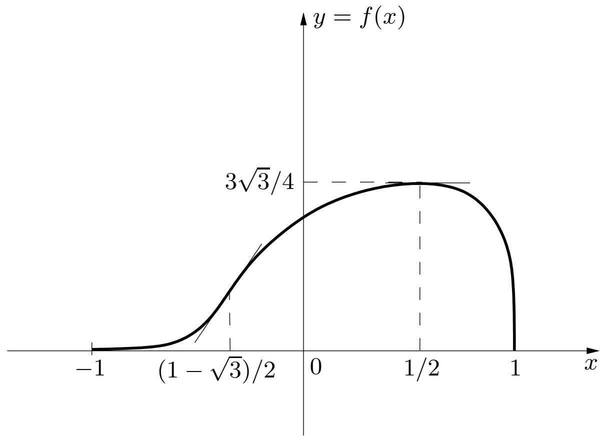
$\boxed{\textbf{5.329}}$ Pour tout $x \in \,]-1,1[$:

$$f'(x) = \frac{(1+x)(1-2x)}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } f''(x) = \frac{(x+1)\big(2x^2-2x-1\big)}{\big(1-x^2\big)\sqrt{1-x^2}}\,.$$

D'où

x	-1		a		$1/2$			1
$f''(x)$	‖	$+$	0		$-$			‖
$f'(x)$	‖ 0		$+$		0	$-$	$-\infty$	‖
$f(x)$	0	↗				↘	0	

$$a = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$



$\boxed{\textbf{5.330}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$:

$$\frac{x^2}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = -\frac{x^2+2x+2}{x+1},$$

la fonction f est prolongeable par continuité en 1. Par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

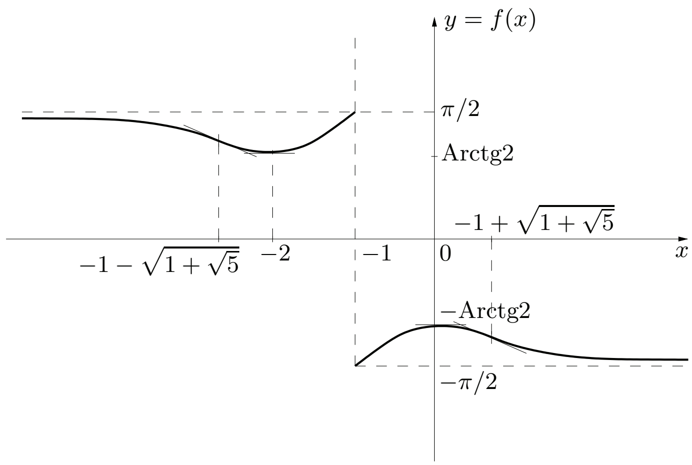
$$f'(x) = \frac{-x(x+2)}{\left(x+1\right)^2 + \left(x^2+2x+2\right)^2}$$

et

$$f''(x) = \frac{2(x+1)\left(x^2+2x-\sqrt{5}\right)\left(x^2+2x+\sqrt{5}\right)}{\left(\left(x+1\right)^2 + \left(x^2+2x+2\right)^2\right)^2}.$$

D'où

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{1+\sqrt{5}}$		-2		-1		0		$-1-\sqrt{1+\sqrt{5}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0		$+$		$\Vert$		$-$		0	$+$	
$f'(x)$		$-$			0	$+$	$1 \Vert 1$	$+$	0	$-$			
$f(x)$	$\pi/2$	$\searrow$			$\operatorname{Arctg} 2$	$\nearrow$	$\pi/2 \Vert -\pi/2$	$\nearrow$	$-\operatorname{Arctg} 2$	$\searrow$			$-\pi/2$

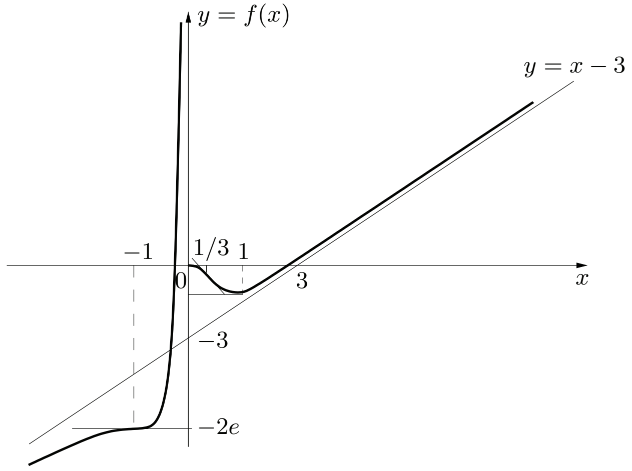


5.331 Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{\big(x+1\big)^2(x-1)}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x}} \text{ et } f''(x) = \frac{(x+1)(3x-1)}{x^5}\, e^{-\frac{1}{x}}\,.$$

D'où

x	$-\infty$		-1		0		$1/3$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$			
$f'(x)$		$+$	0	$+$	‖ 0		$-$		0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$ ‖ 0		$\searrow$		$-2/e$	$\nearrow$	$+\infty$



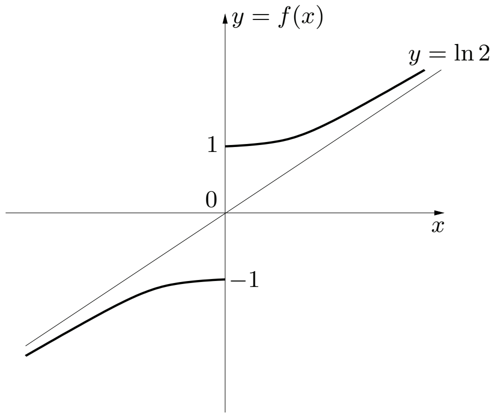
5.332 Puisque pour tout $|x| < \frac{\pi}{4}$: $f'(x) = 0$, la fonction f est constante et cette constante vaut $f(0) = 0$.

5.333 Cette fonction étant impaire, on va l'étudier que sur $]0, +\infty[$. Puisque pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \ln\left(2\operatorname{ch}\frac{1}{x}\right) - \frac{\operatorname{th}\dfrac{1}{x}}{x} = \ln\left(1 + e^{-\frac{2}{x}}\right) + \frac{1}{x}\left(1 - \operatorname{th}\frac{1}{x}\right)\,,$$

on a

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖ 0	$+$	
$f(x)$	‖ 1	$\nearrow$	$+\infty$

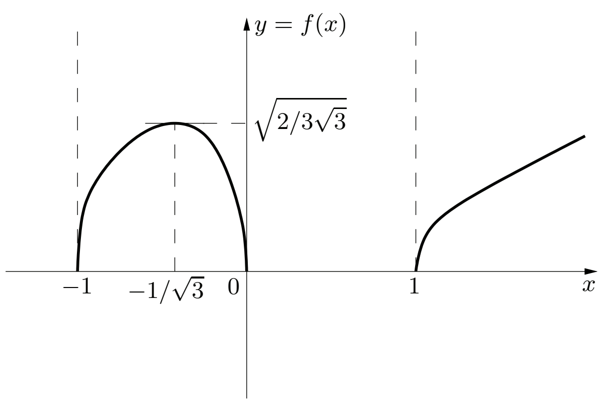


$\boxed{\textbf{5.334}}$ Pour tout $x \in \,]-1, 0[\times]1, +\infty[$:

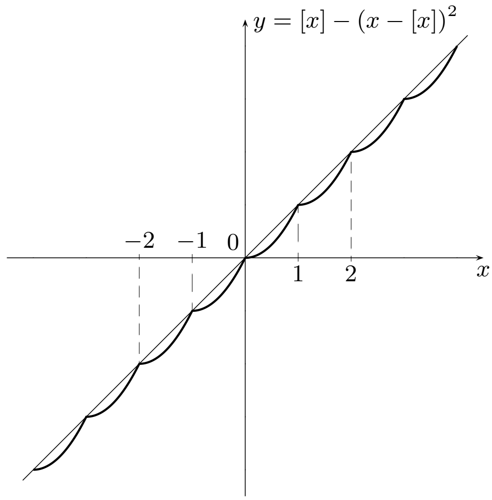
$$f'(x) = \frac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - x}}\,.$$

D'où

x	-1			$-1/\sqrt{3}$			0		1			$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$	‖	//////	‖	$+\infty$	$+$	
$f(x)$	‖	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	‖	//////	‖	0	$\nearrow$	$+\infty$



5.335 En posant $t = x - [x]$, on obtient que pour tout $x \in [n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$: $f(x) = n + t^2$ avec $t \in [0,1[$. D'où



5.336 Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, considérons la fonction $g_x(t) = 1 - \big(x - t\big)^2$ avec $t \in [-1, 1]$.

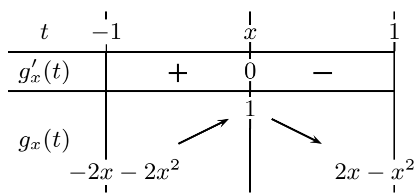
1) $x \leq -1$. Puisque pour tout $|t| < 1$: $g_x'(t) = 2(x-t) < 0$, la fonction continue g_x est strictement décroissante. Par conséquent

$$f(x) = \max_{-1 \leq t \leq 1} g_x(t) = g_x(-1) = -2x - x^2\,.$$

2) $x \geq 1$. Puisque pour tout $|t| < 1$: $g_x'(t) = 2(x-t) > 0$, la fonction continue g_x est strictement croissante. Par conséquent

$$f(x) = \max_{-1 \leq t \leq 1} g_x(t) = g_x(1) = 2x - x^2\,.$$

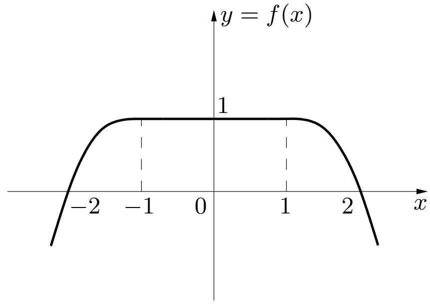
3) $-1 < x < 1$.



En résumé,

$$f(x) = \begin{cases} -2x - x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - x^2 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

D'où



$\boxed{\mathbf{5.337}}$ Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, considérons la fonction $g_x(t) = 1 - \big(x - t\big)^2$ avec $t \in [-1, 1]$.

1) $x \leq -1$. Puisque pour tout $|t| < 1$:$g_x'(t) = 2(x-t) < 0$, la fonction continue g_x est strictement décroissante. Par conséquent

$$f(x) = \min_{-1 \leq t \leq 1} g_x(t) = g_x(1) = 2x - x^2\,.$$

2) $x \geq 1$. Puisque pour tout $|t| < 1$: $g_x'(t) = 2(x-t) > 0$, la fonction continue g_x est strictement croissante. Par conséquent

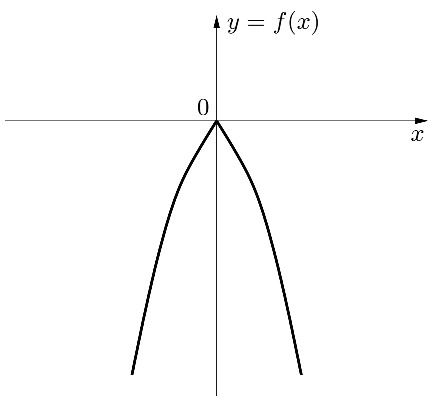
$$f(x) = \min_{-1 \leq t \leq 1} g_x(t) = g_x(-1) = -2x - x^2\,.$$

3) $-1 < x < 1$.

t	-1		x		1
$g_x'(t)$		$+$	0	$-$	
$g_x(t)$	$-2x - 2x^2$	↗	1	↘	$2x - x^2$

En résumé, $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ -2x - x^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

D'où



Solutions des exercices du chapitre 6

Calcul intégral

6.1 $$\int^x \frac{\sin t}{1+\cos t}\,dt = -\ln\bigl(1+\cos x\bigr) + \text{cste}.$$

6.2 $$\int^x e^{\sqrt{t+1}}\,dt = 2\int^{\sqrt{x+1}} s\,e^s\,ds = 2s\,e^s\Big|^{\sqrt{x+1}} - 2\int^{\sqrt{x+1}} e^s\,ds$$
$$= 2\left(\sqrt{x+1}-1\right)\,e^{\sqrt{x+1}} + \text{cste}\,.$$

6.3 $$\int^x \frac{\operatorname{sh} t}{e^t+1}\,dt = \frac{1}{2}\int^x \frac{e^t-e^{-t}}{e^t+1}\,dt = \frac{1}{2}\int^{e^x}\frac{s-1}{s^2}\,ds = \frac{1}{2}\,(x+e^{-x}) + \text{cste}.$$

6.4 $$\int^x \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = \int^x \frac{2e^t}{\left(e^t\right)^2+1}\,dt = 2\int^{e^x}\frac{ds}{s^2+1} = 2\,\mathrm{Arctg}\;e^x + \text{cste}.$$

6.5 $$\int^x \frac{e^t}{\operatorname{ch} t}\,dt = 2\int^x \frac{e^t}{e^t+e^{-t}}\,dt = \int^{e^{2x}}\frac{ds}{s+1} = \ln(1+e^{2x}) + \text{cste}.$$

6.6 $$\int^x \mathrm{Arctg}\,t\,dt = t\,\mathrm{Arctg}\,t\Big|^x - \int^x \frac{t}{1+t^2}\,dt$$
$$= x\,\mathrm{Arctg}\,x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \text{cste}.$$

6.7 $$\int^x \mathrm{Arctg}\,\sqrt{t}\,dt = 2\int^{\sqrt{x}} s\,\mathrm{Arctg}\,s\,ds = s^2\,\mathrm{Arctg}\,s\Big|^{\sqrt{x}} - \int^{\sqrt{x}}\frac{s^2}{1+s^2}\,ds$$
$$= x\,\mathrm{Arctg}\,\sqrt{x} - \int^{\sqrt{x}} ds + \int^{\sqrt{x}}\frac{ds}{1+s^2}$$
$$= (x+1)\,\mathrm{Arctg}\,\sqrt{x} - \sqrt{x} + \text{cste}.$$

6.8 $$\int^x \mathrm{Arcsin}^2\,t\,dt = t\,\mathrm{Arcsin}^2\,t\Big|^x - 2\int^x t\,\frac{\mathrm{Arcsin}\,t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$
$$= x\,\mathrm{Arcsin}^2\,x - 2\left(-\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{Arcsin}\,t\Big|^x + \int^x dt\right)$$
$$= x\,\mathrm{Arcsin}^2\,x + 2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Arcsin}\,x - 2x + \text{cste}.$$

6.9 $$\int^x t\sin t^2\,dt = \frac{1}{2}\int^{x^2}\sin s\,ds = -\frac{\cos x^2}{2} + \text{cste}.$$

6.10 $$\int^x t^3\cos t^2\,dt = \frac12\int^{x^2} s\cos s\,ds = \frac12\left(s\sin s\Big|^{x^2} - \int^{x^2}\sin s\,ds\right)$$
$$= \frac12\bigl(x^2\sin x^2 + \cos x^2\bigr) + \text{cste.}$$

6.11 $$\int^x t^2\cos^2 t\,dt = \frac12\int^x t^2(1+\cos 2t)\,dt = \frac{x^3}{6} + \frac12\int^x t^2\cos 2t\,dt$$
$$= \frac{x^3}{6} + \frac12\left(\frac{t^2}{2}\sin 2t\Big|^x - \int^x t\sin 2t\,dt\right)$$
$$= \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4}\sin 2x - \frac12\left(\frac{-t}{2}\cos 2t\Big|^x + \frac12\int^x \cos 2t\,dt\right)$$
$$= \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4}\sin 2x + \frac{x}{4}\cos 2x - \frac18\sin 2x + \text{cste.}$$

6.12 $$\int^x \frac{\sin t}{1+\cos t+\operatorname{tg}^2 t}\,dt = \int^x \frac{\sin t}{\dfrac{1}{\cos^2 t}+\cos t}\,dt$$
$$= \int^x \frac{\cos^2 t\,\sin t}{1+\cos^3 t}\,dt = -\frac{\ln(1+\cos^3 x)}{3} + \text{cste.}$$

6.13 $$\int^x \frac{dt}{\cos t - \sin t + 1} = \int^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \frac{ds}{1-s} = -\ln\left|1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \text{cste.}$$

6.14 $$\int^x \frac{dt}{4+\sin t} = \int^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \frac{ds}{2s^2+s+2} = \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{Arctg}\left(\frac{1+4\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{\sqrt{15}}\right) + \text{cste.}$$

6.15 $$\int^x \frac{dt}{2+\cos t} = 2\int^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \frac{ds}{3+s^2} = \frac{2}{\sqrt3}\operatorname{Arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{\sqrt3}\right) + \text{cste.}$$

6.16 $$\int^x \frac{\operatorname{tg} t}{1+\sin^2 t}\,dt = \int^x \frac{\sin t}{(2-\cos^2 t)\cos t}\,dt = -\frac12\int^{\cos^2 x}\frac{ds}{s(2-s)}$$
$$= -\frac14\int^{\cos^2 x}\left(\frac1s + \frac{1}{2-s}\right)ds = \frac{-1}{4}\ln\left(\frac{\cos^2 x}{2-\cos^2 x}\right) + \text{cste.}$$

6.17 $$\int^x e^t\sin t\,dt = e^t\sin t\Big|^x - \int^x e^t\cos t\,dt$$
$$= e^x\sin x - \left(e^t\cos t\Big|^x + \int^x e^t\sin t\,dt\right)$$
$$\Rightarrow \int^x e^t\sin t\,dt = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + \text{cste.}$$

6.18 $$\int^x \sin(\ln t)\,dt = t\sin(\ln t)\Big|^x - \int^x \cos(\ln t)\,dt$$
$$= x\sin(\ln x) - \left(t\cos(\ln t)\Big|^x + \int^x \sin(\ln t)\,dt\right)$$
$$\Rightarrow \int^x \sin(\ln t)\,dt = \frac{x}{2}\bigl(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\bigr) + \text{cste.}$$

6.19 $$\int^x t\ln\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}\ \ln t\Big|^x - \frac{1}{2}\int^x t\,dt\right) = \frac{x^2}{8}(2\ln x - 1) + \text{cste.}$$

6.20 $$\int^x (1+t^2)\ln t\,dt = \left(t+\frac{t^3}{3}\right)\ln t\Big|^x - \int^x \left(1+\frac{t^2}{3}\right)dt$$
$$= \left(x+\frac{x^3}{3}\right)\ln x - x - \frac{x^3}{9} + \text{cste.}$$

6.21 $$\int^x t^2\ln^2 t\,dt = \frac{t^3}{3}\ \ln^2 t\Big|^x - \frac{2}{3}\int^x t^2\ln t\,dt$$
$$= \frac{x^3}{3}\ln^2 x - \frac{2}{3}\left(\frac{t^3}{3}\ln t\Big|^x - \frac{1}{3}\int^x t^2\,dt\right)$$
$$= \frac{x^3}{27}\left(9\ln^2 x - 6\ln x + 2\right) + \text{cste.}$$

6.22 $$\int^x \ln^3 t\,dt = t\ln^3 t\Big|^x - 3\int^x \ln^2 t\,dt$$
$$= x\ln^3 x - 3\left(t\ln^2 t\Big|^x - 2\int^x \ln t\,dt\right)$$
$$= x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6x(\ln x - 1) + \text{cste.}$$

6.23 $$\int^x t\ln(1+t)\,dt = \frac{t^2}{2}\ \ln(1+t)\Big|^x - \frac{1}{2}\int^x \frac{t^2}{1+t}\,dt$$
$$= \frac{x^2}{2}\ \ln(1+x) - \frac{1}{2}\int^x \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\ln(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \text{cste.}$$

6.24 $$\int^x \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt = -\frac{\ln t}{1+t}\Big|^x + \int^x \frac{dt}{t(1+t)}$$
$$= -\frac{\ln x}{1+x} + \int^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = -\frac{\ln x}{1+x} + \ln\frac{x}{x+1} + \text{cste.}$$

6.25 $$\int^x \sin(2t)\ln(\operatorname{tg} t)\,dt = -\frac{\cos 2t}{2}\ \ln(\operatorname{tg} t)\Big|^x + \int^x \frac{\cos 2t}{\sin 2t}\,dt$$
$$= -\frac{\cos 2x}{2}\ \ln(\operatorname{tg} x) + \frac{1}{2}\ \ln(\sin 2x) + \text{cste.}$$

6.26 *Rappels* : $\forall\, \theta \in \mathbb{R} : \sin^3\theta = \dfrac{3}{4}\sin\theta - \dfrac{1}{4}\sin 3\theta$ et $\cos 3\theta = \cos\theta - 4\cos\theta\sin^2\theta.$

$$\begin{aligned}
&\int^x \sin^3(2t)\ln(\operatorname{tg} t)\,dt\\
&= \left(-\frac{3}{8}\cos 2t + \frac{1}{24}\cos 6t\right)\ln(\operatorname{tg} t)\Big|^x - \int^x \left(-\frac{3}{8}\cos 2t + \frac{1}{24}\cos 6t\right)\frac{2}{\sin 2t}\,dt\\
&= \left(-\frac{3}{8}\cos 2x + \frac{1}{24}\cos 6x\right)\ln(\operatorname{tg} x) + \frac{2}{3}\int^x \frac{\cos 2t}{\sin 2t}\,dt + \frac{1}{6}\int^x \sin 4t\,dt\\
&= \left(-\frac{3}{8}\cos 2x + \frac{1}{24}\cos 6x\right)\ln(\operatorname{tg} x) + \frac{1}{3}\ln(\sin 2x) - \frac{1}{24}\cos 4x + \text{cste.}
\end{aligned}$$

6.27
$$\begin{aligned}
&\int^x \frac{\sin t}{1+\sin t}\,dt = \int^x dt - \int^x \frac{dt}{1+\sin t}\\
&= x - 2\int^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \frac{ds}{(1+s)^2} = x + \frac{2}{1+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} + \text{cste.}
\end{aligned}$$

6.28
$$\int^x \sin^7 t\cos t\,dt = \frac{1}{8}\sin^8 x + \text{cste.}$$

6.29
$$\begin{aligned}
&\int^x \frac{\sin 2t}{2+\sin t}\,dt = 2\int^{\sin x} \frac{s}{2+s}\,ds\\
&= 2\int^{\sin x} ds - 4\int^{\sin x}\frac{ds}{2+s} = 2\sin x - 4\ln(2+\sin x) + \text{cste.}
\end{aligned}$$

6.30
$$\int^x \frac{\sin t}{2+\cos^2 t}\,dt = -\int^{\cos x}\frac{ds}{2+s^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctg}\frac{\cos x}{\sqrt{2}} + \text{cste.}$$

6.31
$$\begin{aligned}
&\int^x \frac{\sin^2 t\cos t}{1+\sin^2 t}\,dt = \int^{\sin x}\frac{s^2}{1+s^2}\,ds\\
&= \int^{\sin x} ds - \int^{\sin x}\frac{ds}{1+s^2} = \sin x - \operatorname{Arctg}(\sin x) + \text{cste.}
\end{aligned}$$

6.32
$$\begin{aligned}
&\int^x \frac{\cos^4 t\sin t}{1+\sin^2 t}\,dt = \int^x \frac{\cos^4 t\sin t}{2-\cos^2 t}\,dt = -\int^{\cos x}\frac{s^4}{2-s^2}\,ds\\
&= \int^{\cos x}(2+s^2)\,ds - 4\int^{\cos x}\frac{ds}{2-s^2}\\
&= 2\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + \sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-\cos x}{\sqrt{2}+\cos x}\right| + \text{cste.}
\end{aligned}$$

6.33
$$\begin{aligned}
&\int^x \sin^4 t\,dt = \frac{1}{8}\int^x (3 - 4\cos 2t + \cos 4t)\,dt\\
&= \frac{1}{8}\left(3x - 2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + \text{cste.}
\end{aligned}$$

6.34 $\displaystyle\int^x \sin^5 t\,dt = \int^x \left(1-\cos^2 t\right)^2 \sin t\,dt = -\int^{\cos x} \left(1-s^2\right)^2 ds$

$\displaystyle= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + \text{cste}.$

6.35 $\displaystyle\int^x \cos^8 t\,dt = \frac{1}{128}\int^x \left(35 + 56\cos 2t + 28\cos 4t + 8\cos 6t + \cos 8t\right) dt$

$\displaystyle= \frac{1}{128}\left(35\,x + 28\sin 2x + 7\sin 4x + \frac{4}{3}\sin 6x + \frac{1}{8}\sin 8x\right) + \text{cste}.$

6.36 $\displaystyle\int^x \cos^9 t\,dt = \int^x \left(1-\sin^2 t\right)^4 \cos t\,dt = \int^{\sin x} \left(1-s^2\right)^4 ds$

$\displaystyle= \sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x + \frac{6}{5}\sin^5 x - \frac{4}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + \text{cste}.$

6.37 $\displaystyle\int^x \frac{dt}{\sin^2 t\cos^2 t} = 4\int^x \frac{dt}{\sin^2 2t} = -2\operatorname{cotg} 2x + \text{cste}.$

6.38 $\displaystyle\int^x \frac{\operatorname{tg}^2 t}{\cos^2 t}\,dt = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \text{cste}.$

6.39 $\displaystyle\int^x \frac{\sin t}{\cos^4 t}\,dt = \frac{1}{3\cos^3 x} + \text{cste}.$

6.40 $\displaystyle\int^x \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}\,dt = \int^x \frac{1-\sin^2 t}{\sin^4 t}\cos t\,dt = \int^{\sin x} \frac{1-s^2}{s^4}\,ds$

$\displaystyle= -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + \text{cste}.$

6.41 $\displaystyle\int^x \frac{\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t}\,dt = \frac{1}{2}\int^x \sin 2t\,dt = -\frac{\cos 2x}{4} + \text{cste}.$

6.42 $\displaystyle\int^x \frac{\cos t}{\cos t + \sin t}\,dt = \int^x \frac{dt}{1+\operatorname{tg} t} = \int^{\operatorname{tg} x} \frac{ds}{(1+s)\left(1+s^2\right)}$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\int^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{1}{1+s} - \frac{s}{1+s^2} + \frac{1}{1+s^2}\right) ds = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\ln(1+\sin 2x) + \text{cste}.$

6.43 $\displaystyle\int^x \frac{t}{\cos^2 t}\,dt = t\operatorname{tg} t\Big|^x - \int^x \operatorname{tg} t\,dt = x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + \text{cste}.$

6.44 $\displaystyle\int^x \frac{dt}{\cos t} = 2\int^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \frac{ds}{1-s^2} = \ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}\right| + \text{cste} = \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + \text{cste}.$

6.45 $\displaystyle\int^x \frac{dt}{\sin t} = \int^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \frac{ds}{s} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \text{cste}.$

6.46 $\displaystyle I = \int^x \frac{dt}{\cos^3 t} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} - \int^x \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}\,dt = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} - \int^x \frac{dt}{\cos^3 t} + \int^x \frac{dt}{\cos t}$

$\displaystyle\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} + \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|\right) + \text{cste}.$

6.47 $\displaystyle\int^x \operatorname{tg}^2 t\,dt = \int^x \left(1+\operatorname{tg}^2 t\right) dt - \int^x dt = -x + \operatorname{tg} x + \text{cste}.$

6.48 $$\int^x \operatorname{tg}^4 t\,dt = \int^x \left(1+\operatorname{tg}^2 t\right)\operatorname{tg}^2 t\,dt - \int^x \left(1+\operatorname{tg}^2 t\right)dt + \int^x dt$$
$$= \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + \text{cste.}$$

6.49 $$\int^x \frac{\operatorname{Arctg}\sqrt{t}}{(1+t)\sqrt{t}}\,dt = 2\int^{\sqrt{x}} \frac{\operatorname{Arctg} s}{1+s^2}\,ds = \operatorname{Arctg}^2\sqrt{x} + \text{cste.}$$

6.50 $$\int^x \frac{dt}{\sqrt{1+t}\left(1+\sqrt{1+t}\right)} = 2\int^{\sqrt{1+x}} \frac{ds}{1+s} = 2\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right) + \text{cste.}$$

6.51 $$\int^x \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}+1}\,dt = 2\int^{\sqrt{x}} \frac{s^2}{1+s}\,ds = 2\int^{\sqrt{x}} (s-1)\,ds + 2\int^{\sqrt{x}} \frac{ds}{1+s}$$
$$= \left(\sqrt{x}-1\right)^2 + 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + \text{cste.}$$

6.52 $$\int^x \frac{\sqrt[3]{t^2}}{1+\sqrt{t}}\,dt = 6\int^{\sqrt[6]{x}} \frac{s^9}{1+s^3}\,ds$$
$$= 6\int^{\sqrt[6]{x}} \left(s^6 - s^3 + 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{s-2}{s^2-s+1}\right)\right) ds$$
$$= 6\left(\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7} - \frac{\sqrt[6]{x^4}}{4} + \sqrt[6]{x} + \frac{1}{6}\ln\left(\frac{\sqrt[6]{x^2} - \sqrt[6]{x} + 1}{\sqrt[6]{x^2} + 2\sqrt[6]{x} + 1}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctg}\left(\frac{2\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{3}}\right)\right) + \text{cste.}$$

6.53 $$\int^x \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}\left(2+3\sqrt[3]{t}\right)} = 3\int^{\sqrt[3]{x}} \frac{ds}{2+3s} = \ln\left|2+3\sqrt[3]{x}\right| + \text{cste.}$$

6.54 $$\int^x \frac{\sqrt{t}}{t(1+t)}\,dt = 2\int^{\sqrt{x}} \frac{ds}{1+s^2} = 2\operatorname{Arctg}\sqrt{x} + \text{cste.}$$

6.55 $$\int^x \left(1+t^2\right)\sqrt{t}\,dt = 2\int^{\sqrt{x}} \left(1+s^4\right)s^2\,ds = 2\sqrt{x}\left(\frac{x}{3} + \frac{x^3}{7}\right) + \text{cste.}$$

6.56 $$\int^x t^5\sqrt{1-t^3}\,dt = \frac{1}{3}\int^{x^3} s\sqrt{1-s}\,ds = -\frac{2}{3}\int^{\sqrt{1-x^3}} \left(1-r^2\right)r^2\,dr$$
$$= -\frac{2}{45}\sqrt{\left(1-x^3\right)^3}\left(2+3x^3\right) + \text{cste.}$$

6.57 $$\int^x t^2\sqrt{t^2-1}\,dt = \int^{\operatorname{Argch} x} \operatorname{sh}^2 s\operatorname{ch}^2 s\,ds = \frac{1}{8}\int^{\operatorname{Argch} x} \left(\operatorname{ch}(4s)-1\right) ds$$
$$= \frac{1}{8}\left(x(2x^2-1)\sqrt{x^2-1} - \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right) + \text{cste}\,.$$

6.58 $$\int^x \frac{\sqrt{t+1}}{t}\,dt = 2\int^{\sqrt{1+x}} \frac{s^2}{s^2-1}\,ds = 2\int^{\sqrt{1+x}} \left(1+\frac{1}{s^2-1}\right) ds$$
$$= 2\sqrt{1+x} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right| + \text{cste.}$$

6.59 $$\int^x \frac{\sqrt[3]{t+1}}{t}\,dt = 3\int^{\sqrt[3]{x+1}} \frac{s^3}{s^3-1}\,ds = 3\int^{\sqrt[3]{x+1}} \left(1+\frac{1}{s^3-1}\right) ds$$
$$= 3\sqrt[3]{x+1} + \int^{\sqrt[3]{x+1}} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{s+2}{s^2+s+1}\right) ds$$
$$= 3\sqrt[3]{x+1} + \ln\left|\sqrt[3]{x+1}-1\right| - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{\left(x+1\right)^2} + \sqrt[3]{x+1}+1\right)$$
$$-\sqrt{3}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{2\sqrt[3]{x+1}+1}{\sqrt{3}}\right) + \text{cste.}$$

6.60 $$\int^x \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}\,dt = \int^{\mathrm{Argsh}\,x} \frac{\mathrm{ch}^2\, s}{\mathrm{sh}^2\, s}\,ds$$
$$= \int^{\mathrm{Argsh}\,x} \left(1+\frac{1}{\mathrm{sh}^2\, s}\right) ds = \mathrm{Argsh}\,x - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \text{cste.}$$

6.61 $$\int^x \frac{dt}{\sqrt{t(4-t)}} = \int^x \frac{dt}{\sqrt{4-\left(t-2\right)^2}} = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{x-2}{2}\right) + \text{cste.}$$

6.62 $$\int^x \frac{dt}{\sqrt{t^2-3t}} = \int^x \frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}}$$
$$= \ln\left|\left(x-\frac{3}{2}\right) + \sqrt{x^2-3x}\right| + \text{cste.}$$

6.63 $$\int^x \frac{2t+1}{\sqrt{1+2t+2t^2}}\,dt = \sqrt{1+2x+2x^2} + \text{cste.}$$

6.64 $$\int^x \frac{dt}{\sqrt{2t^2-4t+10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int^x \frac{dt}{\sqrt{\left(t-1\right)^2+4}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left((x-1)+\sqrt{x^2-2x+5}\right) + \text{cste.}$$

6.65 $$\int^x \frac{t}{\sqrt{-t^2+8t}}\,dt = \int^x \left(-\frac{-t+4}{\sqrt{-t^2+8t}} + \frac{4}{\sqrt{-t^2+8t}}\right) dt$$
$$= -\sqrt{-x^2+8x} + 4\int^x \frac{dt}{\sqrt{16-\left(t-4\right)^2}}$$
$$= -\sqrt{-x^2+8x} + 4\,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{x-4}{4}\right) + \text{cste.}$$

6.66 $$\int^x \frac{t^2+4}{\sqrt{t^2+t+1}}\,dt = \int^x \frac{\left(t^2+t+1\right) - \frac{1}{2}(2t+1) + \frac{7}{2}}{\sqrt{t^2+t+1}}\,dt$$
$$= \int^x \sqrt{t^2+t+1}\,dt - \frac{1}{2}\int^x \frac{2t+1}{\sqrt{t^2+t+1}}\,dt + \frac{7}{2}\int^x \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}$$
$$= \frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{31}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right) + \text{cste.}$$

$\boxed{\textbf{6.67}}$ $$\int^x \frac{t^2}{\sqrt{t^2-t+1}}\,dt = \int^x \frac{\left(t^2-t+1\right)+\frac{1}{2}(2t-1)-\frac{1}{2}}{\sqrt{t^2-t+1}}\,dt$$
$$= \int^x \sqrt{t^2-t+1}\,dt + \frac{1}{2}\int^x \frac{2t-1}{\sqrt{t^2-t+1}}\,dt - \frac{1}{2}\int^x \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}}$$
$$= \frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{8}\,\ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right) + \text{cste.}$$

$\boxed{\textbf{6.68}}$ $$\int^x \frac{dt}{t\sqrt{1+t^n}} = \frac{1}{n}\int^x \frac{nt^{n-1}}{t^n\sqrt{1+t^n}}\,dt$$
$$= \frac{1}{n}\int^{x^n} \frac{ds}{s\sqrt{1+s}} = \frac{2}{n}\int^{\sqrt{1+x^n}} \frac{dr}{r^2-1} = \frac{1}{n}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^n}-1}{\sqrt{1+x^n}+1}\right| + \text{cste.}$$

$\boxed{\textbf{6.69}}$ $$\int^x \frac{dt}{t^2\sqrt{1-t^2}} = -\int^{\operatorname{Arccos} x} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \text{cste.}$$

$\boxed{\textbf{6.70}}$ $$\int^x t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = \int^x \frac{t(1-t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int^x \frac{t+(1-t^2)-1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$
$$= \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \int^x \sqrt{1-t^2}\,dt - \int^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$
$$= \left(\frac{x}{2}-1\right)\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\,\operatorname{Arcsin} x + \text{cste.}$$

$\boxed{\textbf{6.71}}$ $$\int^x \frac{t^5}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \frac{1}{2}\int^{x^2} \frac{s^2}{\sqrt{1+s}}\,ds = \int^{\sqrt{1+x^2}} \left(r^2-1\right)^2 dr$$
$$= \frac{\sqrt{1+x^2}}{15}\left(3x^4-4x^2+8\right) + \text{cste.}$$

$\boxed{\textbf{6.72}}$ $$\int^x \frac{t}{1+\sqrt{1+t^2}}\,dt = \frac{1}{2}\int^{x^2} \frac{ds}{1+\sqrt{1+s}} = \int^{\sqrt{1+x^2}} \frac{y}{1+y}\,dy$$
$$= \sqrt{1+x^2} - \ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) + \text{cste}\,.$$

$\boxed{\textbf{6.73}}$ $$\int^x \frac{dt}{1+\sqrt{2t-t^2}} = \int^x \frac{dt}{1+\sqrt{1-\left(t-1\right)^2}}$$
$$= \int^{\operatorname{Arcsin}(x-1)} \frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\,d\theta = \left(\theta - \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)\Bigg|^{\operatorname{Arcsin}(x-1)}$$
$$= \operatorname{Arcsin}(x-1) - \frac{x-1}{1+\sqrt{2x-x^2}} + \text{cste.}$$

6.74 $$\int^x \frac{dt}{(1+t)\sqrt{1+t^2}} = -\int^{\frac{1}{x+1}} \frac{ds}{\sqrt{2s^2-2s+1}}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int^{\frac{1}{x+1}} \frac{ds}{\sqrt{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ln\left(\left(s-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{s^2-s+\frac{1}{2}}\right)\Bigg|^{\frac{1}{x+1}}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2\left(x^2+1\right)}}{x+1}\right| + \text{cste.}$$

6.75 $$\int^x \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}\,\sqrt{t+\sqrt{t}+1}}\,dt = \int^{\sqrt{x}} \frac{2s+1}{\sqrt{s^2+s+1}}\,ds + \int^{\sqrt{x}} \frac{ds}{\sqrt{s^2+s+1}}$$
$$= 2\sqrt{x+\sqrt{x}+1} + \ln\left(1+2\sqrt{x}+2\sqrt{x+\sqrt{x}+1}\right) + \text{cste}\,.$$

6.76 $x \geq 0.$ $$\int^x \sqrt{t^3+t^4}\,dt = \int^x t\sqrt{t+t^2}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\int^x (2t+1)\sqrt{t+t^2}\,dt - \frac{1}{2}\int^x \sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\,dt$$
$$= \frac{8x^2+2x-3}{24}\ \sqrt{x+x^2} + \frac{1}{16}\ \ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right) + \text{cste.}$$

$x \leq -1.$ $$\int^x \sqrt{t^3+t^4}\,dt = -\int^x t\sqrt{t+t^2}\,dt$$
$$= -\frac{8x^2+2x-3}{24}\ \sqrt{x+x^2} - \frac{1}{16}\ \ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right| + \text{cste.}$$

6.77 $$\int^x \frac{1+t}{t^2-t+1}\,dt = \frac{1}{2}\ \ln\left(x^2-x+1\right) + \sqrt{3}\,\text{Arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \text{cste.}$$

6.78 $$\int^x \frac{t^8}{1+t^2}\,dt = -\int^x \left(1-t^2+t^4-t^6-\frac{1}{1+t^2}\right)\,dt$$
$$= -x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \text{Arctg}\,x + \text{cste.}$$

6.79 $$\int^x \frac{t}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt = -\frac{1}{2(1+x^2)} + \text{cste.}$$

6.80 $$\int^x \frac{t^3+1}{t^2+1}\,dt = \int^x \left(t-\frac{1}{2}\,\frac{2t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}\right)\,dt$$
$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \text{Arctg}\,x + \text{cste.}$$

6.81 $$\int^x \frac{t^5+1}{t^3+1}\,dt = \int^x \left(t^2 - \frac{t-1}{t^2-t+1}\right)\,dt$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\,\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\operatorname{Arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \text{cste.}$$

6.82 $$\int^x \frac{t^4}{t^3+1}\,dt = \int^x \left(t + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{t+1}{t^2-t+1}\right)\right) dt$$
$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\,\ln|x+1| - \frac{1}{6}\,\ln(x^2-x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\operatorname{Arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \text{cste.}$$

6.83 $$\int^x \frac{t^5+t^3+t}{t^4+1}\,dt = \int^x \left(t + \frac{1}{4}\,\frac{4t^3}{t^4+1}\right)\,dt = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\,\ln(x^4+1) + \text{cste.}$$

6.84 $$\int^x \frac{dt}{t^4+t} = \frac{1}{3}\int^x \frac{3t^2}{t^3(t^3+1)}\,dt = \frac{1}{3}\int^{x^3}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) ds$$
$$= \frac{1}{3}\,\ln\left|\frac{x^3}{x^3+1}\right| + \text{cste.}$$

6.85 $$\int^x \frac{dt}{t^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int^x \left(\frac{-t+\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right) dt$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)\right.$$
$$\left. + \operatorname{Arctg}\left(\sqrt{2}x-1\right) + \operatorname{Arctg}\left(\sqrt{2}x+1\right)\right) + \text{cste.}$$

6.86 $$\int^x \frac{dt}{t^6+1} = \int^x \left(\frac{1}{3}\,\frac{1}{(t^2+1)} - \frac{1}{6}\,\frac{\sqrt{3}t-2}{t^2-\sqrt{3}t+1} + \frac{1}{6}\,\frac{\sqrt{3}t+2}{t^2+\sqrt{3}t+1}\right) dt$$
$$= \frac{1}{3}\,\operatorname{Arctg} x + \frac{1}{6}\,\operatorname{Arctg}\left(2x-\sqrt{3}\right) + \frac{1}{6}\,\operatorname{Arctg}\left(2x+\sqrt{3}\right)$$
$$-\frac{1}{4\sqrt{3}}\,\ln\left(\frac{x^2-\sqrt{3}x+1}{x^2+\sqrt{3}x+1}\right) + \text{cste.}$$

6.87 $$\int^x \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^3} = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2} + 3\int^x \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}\right)$$
$$= \frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{x}{x^2+1} + \int^x \frac{dt}{t^2+1}\right)$$
$$= \frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2} + \frac{3x}{8\left(x^2+1\right)} + \frac{3}{8}\operatorname{Arctg} x + \text{cste.}$$

6.88 $$\int^x \frac{1-t^2}{\left(t^2+1\right)^2}\,dt = \int^x \left(\frac{-1}{t^2+1} + \frac{2}{\left(t^2+1\right)^2}\right) dt = \frac{x}{1+x^2} + \text{cste.}$$

6.89 $$\int^x \frac{dt}{t^4+t^2} = \int^x \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = -\frac{1}{x} - \operatorname{Arctg} x + \text{cste.}$$

6.90 $$\int^x \frac{dt}{t^4\left(1+t^3\right)} = \frac{1}{3}\int^x \frac{3t^2}{t^6\left(1+t^3\right)}\,dt = \frac{1}{3}\int^{x^3}\left(-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{1+s}\right)ds$$
$$= -\frac{1}{3x}+\frac{1}{3}\,\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| + \text{cste.}$$

6.91 $$\int^x \frac{dt}{t(1+t^5)} = \frac{1}{5}\int^x \frac{5t^4}{t^5(1+t^5)}\,dt = \frac{1}{5}\int^{x^5}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{1+s}\right)ds$$
$$= \frac{1}{5}\,\ln\left|\frac{x^5}{1+x^5}\right| + \text{cste.}$$

6.92 $$\int^x \frac{dt}{t(1+t^n)} = \frac{1}{n}\int^x \frac{nt^{n-1}}{t^n(1+t^n)}\,dt = \frac{1}{n}\int^{x^n}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{1+s}\right)ds$$
$$= \frac{1}{n}\,\ln\left|\frac{x^n}{1+x^n}\right| + \text{cste.}$$

6.93 $$\int^x \frac{t^5}{(1+t)(1+t^3)}\,dt$$
$$= \int^x \left(-1+t-\frac{1}{3\left(1+t\right)^2}+\frac{4}{3(1+t)}-\frac{t}{3(t^2-t+1)}\right)\,dt$$
$$= -x+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3(1+x)}+\frac{4}{3}\,\ln|1+x| - \frac{1}{6}\,\ln(x^2-x+1)$$
$$-\frac{1}{3\sqrt{3}}\,\text{Arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \text{cste.}$$

6.94 $$\int^x \frac{2t+5}{(t^2+1)(t-3)}\,dt = \int^x\left(\frac{11}{10\,(t-3)}-\frac{11\,t+13}{10\,(t^2+1)}\right)\,dt$$
$$= \frac{11}{10}\,\ln|x-3| - \frac{11}{20}\,\ln(x^2+1) - \frac{13}{10}\,\text{Arctg}\,x + \text{cste.}$$

6.95 $$\int^x \frac{t^6}{\left(1+t^2\right)^3}\,dt = \int^x \frac{\left((1+t^2)-1\right)^3}{\left(1+t^2\right)^3}\,dt$$
$$= \int^x\left(1-\frac{3}{(1+t^2)}+\frac{3}{\left(1+t^2\right)^2}-\frac{1}{\left(1+t^2\right)^3}\right)\,dt$$
$$= x+\frac{9x}{8(1+x^2)}-\frac{x}{4\left(1+x^2\right)^2}-\frac{15\ \text{Arctg}\,x}{8}+\text{cste.}$$

6.96 $$\int^x \frac{t^2+t+1}{\left(t^2-1\right)^2}\,dt = \int^x\left(\frac{3}{4\left(t-1\right)^2}+\frac{1}{4\left(t+1\right)^2}\right)\,dt$$
$$= -\frac{2x+1}{2\left(x^2-1\right)}+\text{cste.}$$

6.97 $$\int^x \frac{t^3(1-t^2)}{\left(1+t^2\right)^3}\,dt = \frac{1}{2}\int^{x^2} \frac{s(1-s)}{\left(1+s\right)^3}\,ds$$
$$= \frac{1}{2}\int^{x^2}\left(-\frac{2}{\left(1+s\right)^3} + \frac{3}{\left(1+s\right)^2} - \frac{1}{1+s}\right) ds$$
$$= \frac{1}{2\left(1+x^2\right)^2} - \frac{3}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\,\ln\left(1+x^2\right) + \text{cste.}$$

6.98 $$\int^x \frac{dt}{t\left(1+t^5\right)^5} = \frac{1}{5}\int^x \frac{5t^4}{t^5\left(1+t^5\right)^5}\,dt = \frac{1}{5}\int^{x^5} \frac{ds}{s\left(1+s\right)^5}$$
$$= \frac{1}{5}\int^{x^5}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{1+s} - \frac{1}{\left(1+s\right)^2} - \frac{1}{\left(1+s\right)^3} - \frac{1}{\left(1+s\right)^4} - \frac{1}{\left(1+s\right)^5}\right) ds$$
$$= \frac{1}{5}\left(\ln\left|\frac{x^5}{1+x^5}\right| + \frac{1}{(1+x^5)} + \frac{1}{2\left(1+x^5\right)^2} + \frac{1}{3\left(1+x^5\right)^3} + \frac{1}{4\left(1+x^5\right)^4}\right) + \text{cste.}$$

6.99 $$\int^x \frac{dt}{\left(t^3-1\right)^2}$$
$$= \int^x\left(-\frac{2}{9(t-1)} + \frac{1}{9\left(t-1\right)^2} + \frac{2t+3}{9(t^2+t+1)} + \frac{t+1}{3\left(t^2+t+1\right)^2}\right) dt$$
$$= -\frac{x}{3(x^3-1)} - \frac{2}{9}\,\ln|x-1| + \frac{1}{9}\,\ln(x^2+x+1) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\,\operatorname{Arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \text{cste.}$$

6.100 $$\int^x \frac{t^2\ln t}{\left(t^3+1\right)^3}\,dt = \frac{1}{9}\int^x \frac{\ln t^3}{\left(t^3+1\right)^3}\,(3t^2)\,dt = \frac{1}{9}\int^{x^3} \frac{\ln s}{\left(s+1\right)^3}\,ds$$
$$= -\frac{\ln x}{6\left(x^3+1\right)^2} + \frac{1}{18}\int^{x^3} \frac{ds}{s\left(s+1\right)^2}$$
$$= -\frac{\ln x}{6\left(x^3+1\right)^2} + \frac{1}{18}\int^{x^3}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{\left(s+1\right)^2}\right) ds$$
$$= \frac{1}{18\,(x^3+1)} - \frac{\ln x}{6\left(x^3+1\right)^2} + \frac{1}{18}\,\ln\left(\frac{x^3}{x^3+1}\right) + \text{cste.}$$

6.101 $$\int^x \frac{t^2+6t+19}{\left(t+3\right)^2}\,\ln t\,dt = \int^x \ln t\,dt + 10\int^x \frac{\ln t}{\left(t+3\right)^2}\,dt$$
$$= x(\ln x - 1) + 10\left(-\frac{\ln x}{x+3} + \int^x \frac{dt}{t(t+3)}\right)$$
$$= x(\ln x - 1) - 10\,\frac{\ln x}{x+3} + \frac{10}{3}\int^x\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+3}\right) dt$$
$$= x(\ln x - 1) - 10\,\frac{\ln x}{x+3} + \frac{10}{3}\,\ln\left(\frac{x}{x+3}\right) + \text{cste.}$$

$\boxed{\textbf{6.102}}$ $\forall\, x > 0 \,:\, \displaystyle\int_1^x \frac{e^{\operatorname{Arctg}\frac{1}{t}}}{1+t^2}\,dt = -e^{\operatorname{Arctg}\frac{1}{t}}\Big|_1^x$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{e^{\operatorname{Arctg}\frac{1}{t}}}{1+t^2}\,dt = e^{\frac{\pi}{4}} - 1\,.$$

$\boxed{\textbf{6.103}}$ $\forall\, x > 0 : \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t^2\,e^{\frac{1}{t}}} = e^{-\frac{1}{t}}\Big|_1^x \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{dt}{t^2 e^{\frac{1}{t}}} = 1 - \frac{1}{e}\,.$

$\boxed{\textbf{6.104}}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{5^t+5^{-t}} = \frac{1}{\ln 5}\int_1^5 \frac{ds}{1+s^2} = \frac{1}{\ln 5}\operatorname{Arctg} s\Big|_1^5 = \frac{1}{\ln 5}\Big(\operatorname{Arctg} 5 - \frac{\pi}{4}\Big)\,.$

$\boxed{\textbf{6.105}}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+e^t} = \int_1^e \frac{ds}{s(1+s)} = \int_1^e \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{1+s}\right) ds$

$\displaystyle = \ln \frac{s}{1+s}\Big|_1^e = \ln \frac{2e}{1+e}\,.$

$\boxed{\textbf{6.106}}$ $\displaystyle\int_1^4 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,dt = 4\int_1^2 \ln s\,ds = 4s(\ln s - 1)\Big|_1^2 = 4(2\ln 2 - 1)\,.$

$\boxed{\textbf{6.107}}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t+\sqrt{1+t}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}\,\big(1+\sqrt{1+t}\big)} = 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{ds}{1+s}$

$\displaystyle = 2\ln(1+s)\Big|_1^{\sqrt{2}} = 2\ln\frac{1+\sqrt{2}}{2}\,.$

$\boxed{\textbf{6.108}}$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t\cos^3 t}{4-\cos^2 2t}\,dt = -\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^2 t}{4-\big(2\cos^2 t - 1\big)^2}\,(-4\sin t\cos t)\,dt$

$\displaystyle = \frac{1}{8}\int_{-1}^1 \frac{s+1}{4-s^2}\,ds = -\frac{1}{16}\,\ln\!\big(4-s^2\big)\Big|_{-1}^1 + \frac{1}{32}\,\ln\left|\frac{2+s}{2-s}\right|\Big|_{-1}^1 = \frac{\ln 3}{16}\,.$

$\boxed{\textbf{6.109}}$ $\displaystyle\int_0^4 \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,dt = 2\int_0^2 \frac{s^2}{1+s^2}\,ds = 2(s-\operatorname{Arctg} s)\Big|_0^2 = 2(2-\operatorname{Arctg} 2).$

$\boxed{\textbf{6.110}}$ $\displaystyle\int_0^4 \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+\sqrt{t}}}\,dt = 2\int_0^2 \frac{s^2}{\sqrt{1+s}}\,ds$

$\displaystyle = 4\int_1^{\sqrt{3}} \big(r^2-1\big)^2\,dr = 4\left(\frac{r^5}{5} - \frac{2r^3}{3} + r\right)\Big|_1^{\sqrt{3}} = -\frac{32}{15} + \frac{16}{5}\sqrt{3}\,.$

$\boxed{\textbf{6.111}}$ *Rappel* : $\forall\, x > 0$: $\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Alors, pour tout $|x| < \frac{\pi}{2}$:

$$f(x) = \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{(t-\sin x)^2 + \cos^2 x}\,dt = \operatorname{Arctg}\left(\frac{t-\sin x}{\cos x}\right)\Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}\,.$$

$\boxed{\textbf{6.112}}$ En effet, en faisant le changement de variable $y = \frac{\pi}{2} - x$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^5 x}{\sin^5 x + \cos^5 x}\, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin^5\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}{\sin^5\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + \cos^5\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}\, dy$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 y}{\cos^5 y + \sin^5 y}\, dy\,.$$

Par conséquent $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^5 x}{\sin^5 x + \cos^5 x}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^5 x + \cos^5 x}{\sin^5 x + \cos^5 x}\, dx = \frac{\pi}{4}$.

$\boxed{\textbf{6.113}}$ Puisque pour tout $x > 1$:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin t}{\sqrt{x^2 - 2x\cos t + 1}}\, dt = \sqrt{x^2 - 2x\cos t + 1}\,\Big|_0^{\pi} = 2\,,$$

on a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^{\pi} \frac{x \sin t}{\sqrt{x^2 - 2x\cos t + 1}}\, dt = 2.$

$\boxed{\textbf{6.114}}$ Pour tout $x \neq 0$:

$$\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\, dt = \cos t \ln|t|\,\Big|_x^{2x} + \int_x^{2x} \sin t \ln|t|\, dt\,.$$

D'une part, puisque $\lim\limits_{t \to 0} \sin t\, \ln|t| = 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $0 < |x| \leq \delta$: $\big|\sin t \ln|t|\big| \leq 1$; ce qui entraîne que pour tout $0 < |x| \leq \delta$: $\left|\int_x^{2x} \sin t \ln|t|\, dt\right| \leq |x|$. D'où

$$\lim_{x \to 0} \int_x^{2x} \sin t \ln|t|\, dt = 0.$$

D'autre part, en constatant que pour tout $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}\cos 2x \ln|2x| - \cos x \ln|x| &= \cos 2x \ln 2 + (\cos 2x - \cos x)\ln|x| \\ &= \cos 2x \ln 2 - 2\sin\frac{x}{2}\,\sin\frac{3x}{2}\ln|x|\,,\end{aligned}$$

on a $\lim\limits_{x \to 0}\big(\cos 2x \ln|2x| - \cos x \ln|x|\big) = \ln 2$. Par conséquent

$$\lim_{x \to 0} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\, dt = \ln 2.$$

$\boxed{\textbf{6.115}}$ D'une part, on sait, d'après le théorème des accroissements finis, qu'à tout $t \neq 0$, on peut associer un élément θ_t de $]0, 1[$ tel que $\frac{e^t}{t} = \frac{1 + te^{\theta_t t}}{t} = \frac{1}{t} + e^{\theta_t t}$; ce qui nous permet d'écrire que pour tout $x \neq 0$:

$$\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\, dt = \ln 2 + \int_x^{2x} e^{\theta_t t}\, dt\,.$$

D'autre part, puisque $\lim\limits_{s\to 0} e^s = 1$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout $0 < |s| \leq 2\delta$: $e^s \leq 2$. Ainsi, pour tout $0 < |x| \leq \delta$: $\left|\int_x^{2x} e^{\theta_t t}\, dt\right| \leq 2|x|$; ce qui entraîne que $\lim\limits_{x\to 0} \int_x^{2x} e^{\theta_t t}\, dt = 0$. D'où

$$\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\, dt = \ln 2\,.$$

$\boxed{\textbf{6.116}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)\, dt}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{3x^2} = \dfrac{1}{3}\,.$

$\boxed{\textbf{6.117}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\displaystyle\int_0^{x^2} e^{-\frac{t^2}{x^2}}\, dt}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \displaystyle\int_0^x e^{-s^2}\, ds = 0\,.$

$\boxed{\textbf{6.118}}$ Pour tout $0 < |x| < 1$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+tx}} = \frac{2}{x}\sqrt{1+tx}\,\bigg|_0^1 = \frac{2}{x}\left(\sqrt{1+x}-1\right).$

D'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+tx}}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)^2} = \dfrac{1}{4}\,.$

$\boxed{\textbf{6.119}}$ Puisque pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{\sqrt{1+t}} \cos(tx)\, dt &= e^{\sqrt{1+t}}\, \frac{\sin(tx)}{x}\bigg|_0^1 - \frac{1}{2x}\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{1+t}}}{\sqrt{1+t}} \sin(tx)\, dt \\ &= e^{\sqrt{2}}\, \frac{\sin x}{x} - \frac{1}{2x}\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{1+t}}}{\sqrt{1+t}} \sin(tx)\, dt\end{aligned}$$

et

$$\left|\frac{1}{2x}\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{1+t}}}{\sqrt{1+t}} \sin(tx)\, dt\right| \leq \frac{1}{2x}\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{1+t}}}{\sqrt{1+t}}\, dt = \frac{e^{\sqrt{1+t}}\Big|_0^1}{x}\,,$$

on a $\lim\limits_{x\to +\infty} \displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{1+t}} \cos(tx)\, dt = 0\,.$

$\boxed{\textbf{6.120}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\displaystyle\int_0^x \sin t^2\, dt}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{3x^2} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\displaystyle\int_0^x \sin t^2\, dt}{\sin^3 x} = \dfrac{1}{3}.$

$\boxed{\textbf{6.121}}$ Puisque que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x > 0$:

$$\begin{aligned}\int_1^x t^n \ln t\, dt &= \frac{t^{n+1}}{n+1}\, \ln t\Big|_1^x - \frac{1}{n+1}\int_1^x t^n\, dt \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\, \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\,,\end{aligned}$$

on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\lim\limits_{x\to 0+} \displaystyle\int_1^x t^n \ln t\, dt\right) = \lim\limits_{x\to 0+} \left(\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_1^x t^n \ln t\, dt\right) = 0\,.$

6.122 Puisque que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \neq 0$:

$$\int_0^{x^2} t^2\, e^{n(t-x^2)}\, dt = \frac{t^2}{n}\, e^{n(t-x^2)}\Big|_0^{x^2} - \frac{2}{n}\int_0^{x^2} t\, e^{n(t-x^2)}\, dt$$
$$= \frac{x^4}{n} - \frac{2t}{n^2}\, e^{n(t-x^2)}\Big|_0^{x^2} + \frac{2}{n^2}\int_0^{x^2} e^{n(t-x^2)}\, dt = \frac{x^4}{n} - \frac{2x^2}{n^2} + \frac{2}{n^3} - \frac{2}{n^3}\, e^{-nx^2}\,,$$

on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to 0}\int_0^{x^2} t^2\, e^{n(t-x^2)}\, dt\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{n\to+\infty}\int_0^{x^2} t^2\, e^{n(t-x^2)}\, dt\right) = 0.$

6.123 D'une part, puisque pour tout $t \in \,]0,1[$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 t\big(1-t\big)^n = 0$, on a

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} n^2 t\big(1-t\big)^n\right) dt = 0\,.$$

D'autre part, comme pour tout entier $n > 0$:

$$\int_0^1 n^2 t\big(1-t\big)^n\, dt = \left(\frac{n^2}{n+2}\big(1-t\big)^{n+2} - \frac{n^2}{n+1}\big(1-t\big)^{n+1}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\,,$$

on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n^2 t\big(1-t\big)^n\, dt = 1.$

6.124 Puisque pour tout entier $n > 0$:

$$\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\, dt \leq \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\, e^{\frac{t}{n}}\, dt \leq e^{\frac{2}{n}}\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\, dt\,,$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\, e^{\frac{t}{n}}\, dt = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\, dt = 2\int_0^2 dt - \int_0^2 \frac{dt}{t+2} = 4 - \ln 2\,.$$

6.125 Soit $0 < \varepsilon < \pi$. Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{-n\sin\frac{\varepsilon}{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geq n_\varepsilon$: $0 < e^{-n\sin\frac{\varepsilon}{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, pour tout entier $n \geq n_\varepsilon$:

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n\sin t}\, dt = \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} e^{-n\sin t}\, dt + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-n\sin t}\, dt < \frac{\varepsilon}{2} + e^{-n\sin\frac{\varepsilon}{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \varepsilon\,.$$

D'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n\sin t}\, dt = 0.$

6.126 Puisque pour tout entier $n > 0$:

$$\left|\int_0^1 t^n(1-t)\cos(nt)\, dt\right| \leq \int_0^1 t^n(1-t)\, dt = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\,,$$

on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n(1-t)\cos(nt)\, dt = 0.$

6.127 1) Soit $n > 0$ fixé et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \ln\left(1 + \frac{t}{n+1}\right)^{n+1} - \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{n}.$$

Ainsi, puisque pour tout $t \in]0,1[$:

$$f'(t) = \frac{1}{1 + \dfrac{t}{n+1}} - \frac{1}{1 + \dfrac{t}{n}} > 0\,,$$

la fonction continue f est strictement croissante. Comme de plus $f(0) = 0$, on a pour tout $t \in [0,1]$: $f(t) \geq 0$ ou encore

$$\frac{1}{1 + \left(1 + \dfrac{t}{n+1}\right)^{n+1}} \leq \frac{1}{1 + \left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^{n}}\,.$$

2) Soit $\big(g_n\big)$ la suite d'éléments de $\mathbf{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ définie par

$$g_n(t) = \frac{1}{1 + \left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^{n}}\,.$$

Cette suite décroissante converge simplement vers la fonction continue g : $[0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = \frac{1}{1+e^t}$. Ainsi, en utilisant le théorème de la convergence monotone, on peut écrire

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{1 + \left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^{n}} = \int_0^1 \frac{dt}{1+e^t} = \int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}\,dt = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

6.128 Puisque pour tout entier $n > 1$:

$$\int_0^1 \frac{nt}{1+nt^2\ln n}\,dt = \frac{1}{2\ln n}\,\ln(1+nt^2\ln n)\Big|_0^1 = \frac{\ln(1+n\ln n)}{2\ln n}$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x\ln x)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + x\ln x}{1+x\ln x} = 1\,,$$

on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{nt}{1+nt^2\ln n}\,dt = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+n\ln n)}{\ln n} = \frac{1}{2}$.

6.129 Puisque pour tout entier $n > 0$:

$$-\frac{\ln n}{n} = \int_1^n \frac{-1}{nt}\,dt \leq \int_1^n \frac{\sin(nt)}{nt}\,dt \leq \int_1^n \frac{1}{nt}\,dt = \frac{\ln n}{n} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0\,,$$

on obtient, grâce au théorème des deux gendarmes, que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{\sin(nt)}{nt}\,dt = 0\,.$$

6.130 Puisque pour tout entier $n > 0$:

$$\int_0^n \frac{t}{\left(\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t\right)^n}\, dt = \int_0^n t\, e^{-nt}\, dt = -\frac{t}{n}\, e^{-nt}\Big|_0^n + \frac{1}{n}\int_0^n e^{-nt}\, dt$$
$$= -\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) e^{-n^2} + \frac{1}{n^2}\,,$$

on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{t}{\left(\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t\right)^n}\, dt = 0.$

6.131 Puisque

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(\ln x + x) - \ln\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{\ln x + x}{\ln x + \frac{1}{x}}\right) = +\infty\,,$$

on obtient, en utilisant la règle de Bernoulli-L'Hospital, que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x + x) - \ln\Bigl(\ln x + \dfrac{1}{x}\Bigr)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\dfrac{1}{x} + 1}{\ln x + x} - \frac{1 - \dfrac{1}{x}}{x\Bigl(\ln x + \dfrac{1}{x}\Bigr)}\right) = 0.$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{t}{\ln n + nt^2}\, dt = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}\,\ln(\ln n + nt^2)\Big|_{\frac{1}{n}}^1$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(\ln n + n) - \ln\Bigl(\ln n + \dfrac{1}{n}\Bigr)}{n} = 0\,.$$

Par conséquent, la fonction ln étant continue,

$$\lim_{n\to+\infty}\ln\left(e + \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{t}{\ln n + nt^2}\, dt\right) = \ln e = 1\,.$$

6.132 *Rappel* : $\forall\, t \geq 0 : e^t + t > t + \dfrac{t^3}{3!} = \dfrac{t}{6}(6 + t^2).$
Ainsi, puisque pour tout entier $n > 0$:

$$x_n = \int_0^n \frac{t}{e^t + t}\, dt < x_{n+1} = \int_0^{n+1} \frac{t}{e^t + t}\, dt < \int_0^{n+1} \frac{6}{6 + t^2}\, dt$$
$$= \sqrt{6}\ \operatorname{Arctg}\frac{t}{\sqrt{6}}\Big|_0^{n+1} = \sqrt{6}\ \operatorname{Arctg}\frac{n+1}{\sqrt{6}} < \frac{\sqrt{6}}{2}\,\pi\,,$$

la suite $\left(x_n\right)$ est strictement croissante et majorée, elle converge.

6.133 Puisque pour tout entier $n > 0$:

$$0 < x_n = \int_0^n \frac{dt}{1+e^{nt}} < \int_0^n e^{-nt}\,dt = \frac{1}{n}\,(1-e^{-n^2})\,,$$

on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

6.134 Puisque pour tout entier $n \geq 1$:

$$|x_n| = \left|\int_0^{x_{n-1}} \frac{e^{-t^2}}{2+t^2}\,dt\right| \leq \frac{|x_{n-1}|}{2} \leq \ldots \leq \frac{|x_n|}{2^n} = \frac{1}{2^n}\,,$$

on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

6.135 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x - \int_0^x \frac{1+\sin^2 t}{2+\operatorname{ch} t^2}\,dt$. Puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x) = 1 - \frac{1+\sin^2 x}{2+\operatorname{ch} x^2} > 0$, la fonction f est strictement croissante. Comme de plus $f(0) = 0$, on a pour tout $x \in\,]0,+\infty[$:

$$x > \int_0^x \frac{1+\sin^2 t}{2+\operatorname{ch} t^2}\,dt\,.$$

Ainsi, en uitlisant cette inégalité, on obtient, par un simple raisonnement par récurrence, que pour tout entier $n \geq 0$: $0 < x_{n+1} < x_n$. La suite $\big(x_n\big)$ est donc strictement décroissante et minorée, elle converge. Posons, $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Alors, $\ell \geq 0$ et $f(\ell) = \ell$ ou encore $\ell = 0$.

6.136 Puisque pour tout $t \geq 1$: $t^5 < 1+t^5 < t(1+t)^4$, on a que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8\Big(1+\dfrac{1}{2n}\Big)^3} - \frac{1}{\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^3}\right) = n^3\int_n^{2n}\frac{dt}{(1+t)^4} < x_n < n^3\int_n^{2n}\frac{dt}{t^4} = \frac{7}{24}\,.$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{7}{24}$.

6.137 1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction $f_n : [0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = t^n\sqrt{1-t}$ étant continue, il existe $0 \leq \alpha_n \leq 1$ où f_n atteint son maximum. Comme de plus $f_n(0) = f_n(1) = 0$, $f_n(t) > 0$ sur $]0,1[$ et f_n dérivable sur $]0,1[$, on a

$$\alpha_n \neq 0 \text{ et } f'(\alpha_n) = \frac{\alpha_n^{n-1}}{2\sqrt{1-\alpha_n}}\big(2n-(2n+1)\alpha_n\big) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_n = \frac{2n}{2n+1}\,.$$

Ainsi, puisque

$$\sup_{0\leq t\leq 1}\big|f_n(t)\big| = f_n(\alpha_n) = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\,,$$

la suite de fonctions continues (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle ; ce qui entraîne, grâce au théorème de la convergence uniforme,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,dt = 0\,.$$

2) En utilisant 1) et en constatant que

$$\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,dt = 2\int_0^1 s^2\left(1-s^2\right)^n ds$$
$$= 2\sum_{k=0}^{n}\left(\left(-1\right)^k\binom{n}{k}\int_0^1 s^{2k+2}\,ds\right) = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\left(-1\right)^k}{2k+3}\,,$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\left(-1\right)^k}{2k+3} = 0\,.$$

$\boxed{\textbf{6.138}}$ Puisque pour tout entier $n>0$:

$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{k}{n}} = \underline{S}_{\sigma_n}\left(\frac{1}{1+t}\right)$$

où σ_n désigne la subdivision régulière d'ordre n de $[0,1]$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2\,.$$

$\boxed{\textbf{6.139}}$ Puisque pour tout entier $n>0$:

$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \overline{S}_{\sigma_n}(t^2)$$

où σ_n désigne la subdivision régulière d'ordre n de $[0,1]$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}\,.$$

$\boxed{\textbf{6.140}}$ Puisque pour tout entier $n>0$:

$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{k}{n}}} = \underline{S}_{\sigma_n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)$$

où σ_n désigne la subdivision régulière d'ordre n de $[0,1]$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = 2\left(\sqrt{2}-1\right).$$

$\boxed{\textbf{6.141}}$ Pour commencer, on remarquera que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $k=1,\dots,n$: $\frac{2k-1}{2n}$ est le point milieu de l'intervalle fermé $\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$. Ainsi, puisque pour tout entier $n>0$:

$$2^p\underline{S}_{\sigma_n}\left(t^p\right) \le x_n = \frac{2^p}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^p \le 2^p\overline{S}_{\sigma_n}\left(t^p\right)$$

où σ_n désigne la subdivision régulière d'ordre n de $[0,1]$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 2^p \int_0^1 t^p\,dt = \frac{2^p}{1+p}\,.$$

$\boxed{\textbf{6.142}}$ 1) Considérons la fonction auxiliaire $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Puisque pour tout $x \in \,]0,1[\, : f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$, la fonction continue f est strictement croissante. Ainsi, en désignant par σ_n la subdivision régulière d'ordre n de $[0,1]$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\dfrac{k}{n}}{1+\dfrac{k}{n}} = \overline{S}_{\sigma_n}(f)\,;$$

ce qui donne, par passage à la limite, que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n(n+k)} = \int_0^1 f(x)\,dx = (x-\ln x)\Big|_0^1 = 1-\ln 2\,.$$

2) Pour commencer, montrons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-a}{n+k} = 0$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} a_k = a$, il existe un entier $k_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k > k_\varepsilon$: $|a_k - a| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout entier $n > k_\varepsilon$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-a}{n+k}\right| \le \sum_{k=1}^{k_\varepsilon}\frac{|a_k-a|}{n+k} + \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{n}\frac{|a_k-a|}{n+k}$$
$$\le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k_\varepsilon}|a_k-a| + \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{\beta k_\varepsilon}{n} + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

où $\beta = \displaystyle\max_{1\le k\le k_\varepsilon}|a_k-a|$. Comme de plus $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\frac{\beta k_\varepsilon}{n} = 0$, il existe un entier $n_\varepsilon > k_\varepsilon$ tel que pour tout $n \ge n_\varepsilon$: $\frac{\beta k_\varepsilon}{n} \le \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, pour tout entier $n \ge n_\varepsilon$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-a}{n+k}\right| \le \varepsilon\,.$$

Pour conclure, il suffit de constater que pour tout entier $n \ge 1$, on peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{n+k} = a + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{n+k} - \frac{a}{n}\right) = a + \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-a}{n+k} - a\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n(n+k)}$$

et d'utiliser les deux résultats obtenus ci-dessus.

$\boxed{\mathbf{6.143}}$ 1) Soient $x, y > 0$. Alors, en faisant successivement les deux changements de variable $t = xs$ et $s = \frac{1}{r}$, on obtient

$$\begin{aligned} f(xy) &= \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_{\frac{1}{x}}^{y} \frac{ds}{s} = \int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{ds}{s} + \int_1^y \frac{ds}{s} \\ &= \int_1^x \frac{dr}{r} + \int_1^y \frac{ds}{s} = f(x) + f(y)\,. \end{aligned}$$

2) $\forall\, x > 0 : 0 = f(1) = f\left(x\,\frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)\,.$

3a) $\forall\, x > 0 : f'(x) = \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante donc injective.

3b) Puisque pour tout entier $n > 1$:

$$f(n) = \int_1^n \frac{dt}{t} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} > \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\,,$$

on a, la série harmonique étant divergente, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$; ce qui entraîne, f étant strictement croissante, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et , en utilisant 2), $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = -\lim\limits_{x\to 0+} f\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$. Ainsi, f étant continue, on peut conclure, grâce au théorème de la valeur intermédiaire, que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$ ou encore f est surjective.

4) Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors, il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $y = f(x)$. Ainsi, puisque $f'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$, on a

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = x = f^{-1}(y)\,.$$

5) Soit $x \in \mathbb{R}$. Il découle immédiatement de 4) que la fonction f^{-1} est de classe $\mathbf{C}^\infty$ et que pour tout entier $k \geq 0$: $\left(f^{-1}\right)^{(k)} = f^{-1}$; ce qui nous permet d'écrire, en utilisant la formule de MacLaurin et $f^{-1}(0) = 1$, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(f^{-1}\right)^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{\left(f^{-1}\right)^{(n+1)}\left(\theta_n x\right)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{f^{-1}\left(\theta_n x\right)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \end{aligned}$$

avec les $\theta_n \in\,]0,1[$. Comme de plus, $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{x^p}{p!} = 0$ (critère de d'Alembert) et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f^{-1}\left(-|x|\right) < f^{-1}\left(\theta_n x\right) < f^{-1}\left(|x|\right)$ (f^{-1} étant strictement croissante car f l'est), on obtient

$$f^{-1}(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{f^{-1}\left(\theta_n x\right)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\,.$$

6) D'après 5), $f^{-1} = \exp$. Par conséquent $f = \ln$.

6.144 1) Soit un entier $n \geq 2$. Alors,

$$\begin{aligned}
\alpha_n(x) &= \int_0^x \sin^n t\,dt = -\cos t \sin^{n-1} t\Big|_0^x + (n-1)\int_0^x \cos^2 t \sin^{n-2} t\,dt \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\big(\alpha_{n-2}(x) - \alpha_n(x)\big) \\
\Leftrightarrow \alpha_n(x) &= -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\,\alpha_{n-2}(x)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\beta_n(x) &= \int_0^x \cos^n t\,dt = \cos^{n-1} t \sin t\Big|_0^x + (n-1)\int_0^x \sin^2 t \cos^{n-2} t\,dt \\
&= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\big(\beta_{n-2}(x) - \beta_n(x)\big) \\
\Leftrightarrow \beta_n(x) &= \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\,\beta_{n-2}(x)\,.
\end{aligned}$$

2) Puisque pour tout entier $p \geq 0$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p t\,dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^p\left(\frac{\pi}{2} - s\right)ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p t\,dt\,,$$

on obtient, en utilisant 1), que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+4} t\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt - 2\frac{n+1}{n+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt + \left(\frac{n+3}{n+4}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt \\
&= \frac{3}{(n+2)(n+4)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt\,.
\end{aligned}$$

3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t\,dt = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) = \frac{\pi}{32}$ et
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^4 t\,dt = \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\,dt = \frac{3\pi}{256}\,.$

4) Se démontre par un simple raisonnement par récurrence après avoir constaté (voir 1)) que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\beta_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\,\beta_{2n-2} \text{ et } \beta_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\,\beta_{2n-1}\,.$$

5) Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$: $0 < \cos^{2n+1} t < \cos^{2n} t < \cos^{2n-1} t$, on peut écrire que pour tout entier $n \geq 1$: $0 < \beta_{2n+1} < \beta_{2n} < \beta_{2n-1}$ ou encore, en utilisant 1), $\frac{2n}{2n+1} = \frac{\beta_{2n+1}}{\beta_{2n-1}} < \frac{\beta_{2n+1}}{\beta_{2n}} < 1$.

Par conséquent $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\beta_{2n+1}}{\beta_{2n}} = 1\,.$

Finalement, en utilisant 4), on obtient la formule de Wallis

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\right)^2 = \lim_{n\to+\infty} \pi\left(1+\frac{1}{2n}\right)\frac{\beta_{2n+1}}{\beta_{2n}} = \pi\,.$$

$\boxed{\mathbf{6.145}}$ 1) Soit un entier $n \geq 2$. Alors,

$$\begin{aligned}
\gamma_n(x) &= \int_0^x e^t \sin^n t\,dt = e^t\sin^n t\Big|_0^x - n\int_0^x e^t\cos t\sin^{n-1}t\,dt\\
&= e^x\sin^n x - n\left(e^t\sin^{n-1}t\cos t\Big|_0^x - \int_0^x e^t\big(-\sin^n t + (n-1)\cos^2 t\sin^{n-2}t\big)\,dt\right)\\
&= e^x\sin^n x - n\,e^x\sin^{n-1}x\cos x - n^2\gamma_n(x) + n(n-1)\gamma_{n-2}(x)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \gamma_n(x) = \frac{1}{n^2+1}\left(e^x\sin^n x - n\,e^x\sin^{n-1}x\cos x + n(n-1)\gamma_{n-2}(x)\right).$$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t\sin^2 t\,dt = \frac{1}{5}\left(3\,e^{\frac{\pi}{2}} - 2\right)$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t\sin^3 t\,dt = \frac{1}{10}\left(4\,e^{\frac{\pi}{2}} + 3\right).$

$\boxed{\mathbf{6.146}}$ 1) Soit un entier $n \geq 1$. Alors,

$$\begin{aligned}
I_n(x) &= \frac{t}{\left(t^2+1\right)^n}\Big|_0^x + 2n\int_0^x \frac{t^2}{\left(t^2+1\right)^{n+1}}\,dt\\
&= \frac{x}{\left(x^2+1\right)^n} + 2n\big(I_n(x) - I_{n+1}(x)\big)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2nI_{n+1}(x) = \frac{x}{\left(x^2+1\right)^n} + (2n-1)I_n(x)\,.$$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} + \operatorname{Arctg} t\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\left(1+\frac{\pi}{2}\right).$

$\boxed{\mathbf{6.147}}$ 1) $\displaystyle\forall\, n\geq 1\ :\ 0 < I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,dt < \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

2) $\forall\, n \geq 1$:

$$nI_n = t\ln\big(1+t^n\big)\Big|_0^1 - \int_0^1 \ln\big(1+t^n\big)\,dt = \ln 2 - \int_0^1 \ln\big(1+t^n\big)\,dt$$

et

$$0 < \int_0^1 \ln\big(1+t^n\big)\,dt < \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}\,.$$

Par conséquent $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n = \ln 2.$

$\boxed{\mathbf{6.148}}$ 1a) $m \neq -1$.

$$\begin{aligned}
\mu_{n,m}(x) &= \int^x t^m\ln^n t\,dt = \frac{t^{m+1}}{m+1}\,\ln^n t\Big|^x - \frac{n}{m+1}\int^x t^m\ln^{n-1}t\,dt\\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1}\,\ln^n x - \frac{n}{m+1}\,\mu_{n-1,m}(x)\,.
\end{aligned}$$

1b) $m=-1$ et $n \neq -1$.

$$\mu_{n,-1}(x)=\int^x \frac{\ln^n t}{t}\,dt=\frac{1}{n+1}\,\ln^{n+1} t\Big|^x=\frac{1}{n+1}\,\ln^{n+1} x+\text{cste}\,.$$

1c) $m=n=-1$. $\mu_{-1,-1}(x)=\displaystyle\int^x \frac{dt}{t\ln t}=\ln(\ln t)\Big|^x=\ln(\ln x)+\text{cste}.$

2) $$\int_1^2 t^3\ln^2 t\,dt=\frac{t^4}{4}\,\ln^2 t\Big|_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 t^3\ln t\,dt$$
$$=4\ln^2 2-\frac{1}{2}\left(\frac{t^4}{4}\ln t\Big|_1^2-\frac{1}{4}\int_1^2 t^3\,dt\right)=4\ln^2 2-2\ln 2+\frac{15}{32}\,.$$

6.149 1) Soit $f:\,]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Puisque pour tout $x>e$: $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$, la fonction continue f est strictement décroissante sur $[e,+\infty[$; ce qui entraîne que pour tout entier $n\geq 3$ et tout $t\in\,]n,n+1[$: $\frac{\ln(n+1)}{n+1}<\frac{\ln t}{t}<\frac{\ln n}{n}$ ou encore, en intégrant,

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1}<\int_n^{n+1}\frac{\ln t}{t}\,dt<\frac{\ln n}{n}\,.$$

2) Soit $n\geq 3$. Alors,

$$x_{n+1}-x_n=\frac{\ln(n+1)}{n+1}-\frac{1}{2}\big(\ln^2(n+1)-\ln^2 n\big)=\frac{\ln(n+1)}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{\ln t}{t}\,dt<0\,,$$

$$x_n=-\frac{\ln^2 n}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln k}{k}>\frac{\ln 2}{2}+\sum_{k=3}^{n}\left(\int_k^{k+1}\frac{\ln t}{t}\,dt\right)-\frac{\ln^2 n}{2}$$
$$=\frac{\ln 2}{2}+\int_3^{n+1}\frac{\ln t}{t}\,dt-\int_1^n\frac{\ln t}{t}\,dt>\frac{\ln 2}{2}-\int_1^3\frac{\ln t}{t}\,dt\,.$$

La suite (x_n) est strictement décroissante et minorée (pour $n\geq 3$), elle converge.

6.150 Soit $p\in\mathbb{N}^*$.

1) Puisque la fonction $f(x)=x^p$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, on peut écrire pour tout entier $k\geq 1$: $\int_{k-1}^{k} t^p\,dt<k^p<\int_k^{k+1} t^p\,dt$; ce qui entraîne que pour tout entier $n>1$:

$$1+\int_1^n t^p\,dt<\sum_{k=1}^{n}k^p<\int_1^{n+1}t^p\,dt\,.$$

2) Ainsi, en utilisant la double inégalité ci-dessus, on a que pour tout entier $n>1$:

$$\frac{1}{n^{p+1}}\left(1-\frac{1}{p+1}\right)+\frac{1}{1+p}<\frac{1+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}<\frac{1}{1+p}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}-\frac{1}{n^{p+1}}\right).$$

D'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}\,.$

$\boxed{\mathbf{6.151}}$ Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par

$$g(t) = \begin{cases} t^2 \sin^2 \dfrac{1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \,. \end{cases}$$

Alors, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^x g(t)\, dt$$

répond à la question. En effet, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = g(x) \geq 0$, la fonction f est croissante. Montrons à présent, qu'elle est strictement croissante. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $a < b$ tels que $f(a) = f(b)$. Par conséquent, f étant croissante, pour tout $x \in [a, b]$: $f(x) = f(a) = f(b)$; ce qui entraîne que pour tout $x \in [a, b]$: $f'(x) = g(x) = 0$. D'où contradiction.

$\boxed{\mathbf{6.152}}$ Soit $a \in I$. En utilisant le théorème de la convergence uniforme, on peut écrire que pour tout $x \in I$:

$$\int_a^x g(t)\, dt = \lim_{n \to +\infty} \int_a^x f_n'(t) = \lim_{n \to +\infty} \big(f_n(x) - f_n(a)\big) = f(x) - f(a)$$

ou encore $g(x) = f'(x)$.

Remarque : Ce résultat reste valable si la suite $\left(f_n'\right)$ satisfait les hypothèses du théorème de la convergence monotone.

$\boxed{\mathbf{6.153}}$ En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(0) + \int_0^{-x} f'(t)\, dt = f(0) - \int_0^x f'(-s)\, ds \\ &= f(0) + \int_0^x f'(s)\, ds = f(x)\,. \end{aligned}$$

Remarque : f' paire $\not\Rightarrow f$ impaire. Comme contre-exemple, on peut prendre $f(x) = 1 + \sin x$. (ex. 5.258).

$\boxed{\mathbf{6.154}}$ Soit $a > 0$. Alors,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(t)\, dt &= \int_{-a}^0 f(t)\, dt + \int_0^a f(t)\, dt \\ &= -\int_a^0 f(-s)\, ds + \int_0^a f(t)\ dt = 2\int_0^a f(t)\, dt\,. \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6.155}}$ Soit $a > 0$. Alors,

$$\int_{-a}^a f(t)\, dt = \int_{-a}^0 f(t)\, dt + \int_0^a f(t)\, dt = -\int_a^0 f(-s)\, ds + \int_0^a f(t)\, dt = 0.$$

$\boxed{\textbf{6.156}}$ Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,dt$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$, la fonction F est constante. Par conséquent pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^T f(t)\,dt = F(0) = F(u) = \int_u^{u+T} f(t)\,dt\,.$$

Il en découle que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_a^{a+nT} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{a+(k-1)T}^{a+kT} f(t)\,dt = n \int_0^T f(t)\,dt\,.$$

$\boxed{\textbf{6.157}}$ Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x) = \int_0^{x+T} f(t)\,dt$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F'(x) = f(x+T) = f(x)$, on a

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt\,.$$

$\boxed{\textbf{6.158}}$ Puisque la fonction g est périodique, sa fonction dérivée $g' = f$ est aussi périodique. La réciproque est généralement fausse. En effet, $f(t) = \sin^2 t$ est π-périodique mais sa fonction g associée n'est pas périodique car elle est strictement croissante.

$\boxed{\textbf{6.159}}$ 1) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(a+b-s)\,ds = \int_a^b f(a+b-t)\,dt.$

2) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = \int_0^\pi \frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}\,dt = \int_0^\pi \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_0^\pi \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt &= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt\\ &= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^1 \frac{ds}{1+s^2} = \frac{\pi}{2}\ \mathrm{Arctg}\, s\Big|_{-1}^1 = \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\mathrm{tg}\,t)\,dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\mathrm{tg}\,t}{1+\mathrm{tg}\,t}\right)dt\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{tg}\,t}\right)dt = \frac{\pi}{4}\ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\mathrm{tg}\,t)\,dt\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\mathrm{tg}\,t)\,dt = \frac{\pi}{8}\ln 2\,.$$

$\boxed{\textbf{6.160}}$ 1) $$\begin{aligned}I &= \int_0^\pi t\,f(\sin t)\,dt = \int_0^\pi (\pi-s)f(\sin s)\,ds\\ &= \pi\int_0^\pi f(\sin s)\,ds - \int_0^\pi sf(\sin s)\,ds \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin s)\,ds\,.\end{aligned}$$

2) En utilisant 1), on a

$$\int_0^\pi \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = \pi\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \pi\,\mathrm{Arctg}\,x\Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{t\sin^4 t}{\sin^4 t+\cos^4 t}\,dt &= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin^4 t}{\sin^4 t+\cos^4 t}\,dt\\ &= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 t}{\sin^4 t+\cos^4 t}\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^4 t}{\sin^4 t+\cos^4 t}\,dt\right)\\ &= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 t}{\sin^4 t+\cos^4 t}\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 t}{\sin^4 t+\cos^4 t}\,dt\right)\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt=\frac{\pi^2}{4}\,.\end{aligned}$$

6.161 1) Puisque la fonction f est continue, sa fonction réciproque f^{-1} l'est aussi et l'on peut écrire

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt=\int_a^b f^{-1}\big(f(s)\big)f'(s)\,ds=\int_a^b sf'(s)\,ds=sf(s)\Big|_a^b-\int_a^b f(s)\,ds\,.$$

2) Si $f(t)=\sqrt[9]{1-t^{17}}$, on a $f^{-1}(t)=\sqrt[17]{1-t^9}$. Ainsi, d'après 1),

$$\int_0^1 \sqrt[17]{1-t^9}\,dt=\int_0^1 \sqrt[9]{1-t^{17}}\,dt\,.$$

6.162 En utilisant l'inégalité de Jensen, on peut écrire, g étant convexe, que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$g\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g\circ f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

Ainsi, puisque les deux fonctions f et g sont continues, on obtient, par passage à la limite,

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b g\circ f(x)\,dx\,.$$

6.163 1a) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\int_0^1 f\big((1-t)a+tb\big)\,dt$

$$\le(b-a)\int_0^1\big((1-t)f(a)+tf(b)\big)\,dt=\frac{f(a)+f(b)}{2}\,(b-a)\,.$$

1b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f\left(t+\frac{a+b}{2}\right)dt$

$$=\int_0^{\frac{b-a}{2}}\left(f\left(t+\frac{a+b}{2}\right)+f\left(-t+\frac{a+b}{2}\right)\right)dt$$

$$\ge 2\int_0^{\frac{b-a}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}\right)dt=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\,.$$

2) La fonction f étant continue, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \min_{a \le x \le b} f(x)$. Alors,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \\
&= (c-a)\int_0^1 f\big((1-t)a+tc\big)\,dt + (b-c)\int_0^1 f\big((1-t)c+tb\big)\,dt \\
&\le (c-a)\int_0^1 \big((1-t)f(a)+tf(c)\big)\,dt + (b-c)\int_0^1 \big((1-t)f(c)+tf(b)\big)\,dt \\
&= \frac{f(a)+f(c)}{2}\,(c-a) + \frac{f(c)+f(b)}{2}\,(b-c) \le \frac{1}{2}\,(b-a)f(c)\,.
\end{aligned}$$

6.164 En utilisant le théorème de la moyenne, on sait qu'il existe au moins un élément c de $[a,b]$ tel que $\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = g(c)\int_a^b f'(t)\,dt = g(c)\big(f(b)-f(a)\big)$. Ainsi, en intégrant par partie, on obtient que

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)g'(t)\,dt &= f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt \\
&= f(a)\big(g(c)-g(a)\big) + f(b)\big(g(b)-g(c)\big)\,.
\end{aligned}$$

6.165 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par $g(x) = \int_a^x h(t)\,dt$. Puisque que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = h(x)$, on sait, d'après l'exercice précédent, qu'il existe au moins un élément c de $[a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)h(t)\,dt = f(a)\int_a^c h(t)\,dt + f(b)\int_c^b h(t)\,dt\,.$$

6.166 1) On va supposer que $g \neq 0$ (sinon l'inégalité est évidente). Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \le \int_a^b \big(f(t)+xg(t)\big)^2\,dt = x^2\int_a^b g^2(t)\,dt + 2x\int_a^b f(t)g(t)\,dt + \int_a^b f^2(t)\,dt\,,$$

on doit avoir que le discriminant de ce polynôme du second degré en x est non positif. Autrement dit,

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right).$$

2) Pour commencer, on va supposer que les deux fonctions f et g sont linéairement dépendantes et que $g \neq 0$ (sinon l'égalité est évidente). Alors, il existe un nombre réel λ tel que $f = \lambda g$ et l'on a

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 = \left(\int_a^b \lambda g^2(t)\,dt\right)^2 = \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right).$$

Montrons à présent la réciproque. Pour cela, considérons la fonction auxiliaire $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \int_a^b \big(f(t) + xg(t)\big)^2 \, dt = x^2 \int_a^b g^2(t) \, dt + 2x \int_a^b f(t)g(t) \, dt + \int_a^b f^2(t) \, dt$$

et supposons de nouveau pour la même raison que $g \neq 0$. Alors, $\int_a^b g^2(t) \, dt > 0$ et, en posant

$$\alpha = -\frac{\int_a^b f(t)g(t) \, dt}{\int_a^b g^2(t) \, dt},$$

on obtient que $h(\alpha) = 0$; ce qui entraîne que pour tout $t \in [a, b] : f(t) + \alpha g(t) = 0$ ou encore que les deux fonctions f et g sont linéairement dépendantes.

$\boxed{\mathbf{6.167}}$ 1) En utilisant l'exercice précédent (inégalité de Cauchy-Schwarz), on peut écrire que

$$1 = \left(\int_0^1 \sqrt{f(t)} \, \frac{1}{\sqrt{f(t)}} \, dt\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f(t) \, dt\right) \left(\int_0^1 \frac{1}{f(t)} \, dt\right).$$

2) D'après l'exercice précédent, il y a égalité si et seulement si les deux fonctions $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$ sont linéairement dépendantes. Pour cela, il faut et il suffit que la fonction f soit constante.

$\boxed{\mathbf{6.168}}$ Considérons la fonction auxiliaire $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = x \int_0^x f(t)g(t) \, dt - \left(\int_0^x f(t) \, dt\right) \left(\int_0^x g(t) \, dt\right).$$

Puisque pour tout $x \in \,]0, 1[$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \int_0^x f(t)g(t) \, dt + xf(x)g(x) - f(x) \int_0^x g(t) \, dt - g(x) \int_0^x f(t) \, dt \\ &= \int_0^x \big(f(t) - f(x)\big)\big(g(t) - g(x)\big) \, dt \geq 0 \,, \end{aligned}$$

la fonction continue h est croissante. D'où

$$\int_0^1 f(t)g(t) \, dt - \left(\int_0^1 f(t) \, dt\right) \left(\int_0^1 g(t) \, dt\right) = h(1) \geq h(0) = 0 \,.$$

$\boxed{\mathbf{6.169}}$ 1) Soient $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ les deux fonctions continues définies respectivement par $u(x) = \int_a^x f(t)g(t) \, dt$ et $v(x) = u(x) \, e^{-\int_a^x g(t) \, dt}$. Alors, pour tout $x \in \,]a, b[$:

$$u'(x) = f(x)g(x) \leq \big(\alpha + u(x)\big)g(x)$$

et

$$v'(x) = \big(u'(x) - u(x)g(x)\big) \, e^{-\int_a^x g(t) \, dt} \leq \alpha g(x) \, e^{-\int_a^x g(t) \, dt} \,.$$

Ainsi, pour tout $x \in [a,b]$:

$$v(x) = \int_a^x v'(t)\,dt \leq \alpha \int_a^x g(t)\,e^{-\int_a^t g(s)ds}\,dt$$

et

$$\begin{aligned} u(x) &= v(x)\,e^{\int_a^x g(t)\,dt} \\ &\leq \alpha \int_a^x g(t)\,e^{\int_t^x g(s)\,ds}\,dt = -\alpha\,e^{\int_t^x g(s)\,ds}\Big|_a^x = \alpha\big(e^{\int_a^x g(s)\,ds} - 1\big)\,. \end{aligned}$$

Par conséquent pour tout $x \in [a,b]$: $f(x) \leq \alpha + u(x) \leq \alpha\,e^{\int_a^x g(t)\,dt}$.

2) Ici $\alpha = 0$ et $g = 1$. En utilisant l'inégalité ci-dessus, on obtient que pour tout $x \in [a,b]$: $f(x) \leq 0$; ce qui entraîne, puisque par hypothèse $f \geq 0$, que $f = 0$.

$\boxed{\textbf{6.170}}$ Soit $u : I \to \mathbb{R}$ la fonction de classe $\mathbf{C}^1$ définie par $u(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \beta$ où β a été choisi de sorte que

$$\int_a^b u(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt\,.$$

Posons, pour tout $x \in I$, $v(x) = \int_a^x \big(g(t) - u(t)\big)\,dt$. Ainsi, puisque $v(a) = v(b) = 0$, on a

$$\int_a^b f(t)v(t)\,dt = \int_a^b u'(t)v(t)\,dt = u(t)v(t)\Big|_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt = -\int_a^b u(t)v'(t)\,dt\,.$$

D'où

$$0 = \int_a^b \big(f(t)v(t) + g(t)v'(t)\big)\,dt = \int_a^b \big(g(t) - u(t)\big)v'(t)\,dt = \int_a^b \big(g(t) - u(t)\big)^2\,dt\,;$$

ce qui entraîne que pour tout $x \in [a,b]$: $u(x) = g(x)$. De ce résultat, du fait que $[a,b] \subset I$ et que les deux fonctions u et g sont de classe $\mathbf{C}^1$, on peut écrire, sans autre, que pour tout $a \leq x \leq b$: $g'(x) = u'(x) = f(x)$.

$\boxed{\textbf{6.171}}$ Pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} \int_a^x \big(x-t\big)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt &= -f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n}\Big|_a^x + \frac{1}{n}\int_a^x \big(x-t\big)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n} + \frac{1}{n}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt\,. \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{6.172}}$ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + e^x)$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2} > 0$, la fonction f est convexe. Posons, $\mathrm{A} = (0, \ln 2)$ et $\mathrm{B} = \big(1, \ln(1+e)\big)$. Notons par d la droite d'équation $y = \big(\ln(1+e) - \ln 2\big)x + \ln 2$ et par t la droite d'équation $y = \frac{x}{2} + \ln 2$. Si C désigne la courbe de la fonction f, on sait, f étant convexe, qu'entre les deux points

A et B, la courbe C se trouve au-dessus de sa tangente t et en dessous de sa corde d. Par conséquent pour tout $x \in [0,1]$:

$$\frac{x}{2} + \ln 2 \leq \ln(1+e^x) \leq \big(\ln(1+e) - \ln 2\big)x + \ln 2$$

ou encore, en intégrant, $\dfrac{1}{4} + \ln 2 \leq \displaystyle\int_0^1 \ln(1+e^t)\,dt \leq \ln\sqrt{2(1+e)}$.

6.173 1) En effet, pour tout $x \in \,]0,1[$:

$$0 < f(x) \leq \max_{0\leq t\leq 1} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4^n n!} < \frac{1}{n!}\,.$$

2) Puisque

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq k < n \text{ ou } k > 2n \\ (-1)^{k-n}\dfrac{k!}{n!}\dbinom{n}{k-n} & \text{si } n \leq k \leq 2n, \end{cases}$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$: $f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(1-x)$, on a bien que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $f^{(k)}(0)$, $f^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$.

3) Raisonnons par l'absurde et supposons que $\pi \in \mathbb{Q}$. Alors, $\pi^2 \in \mathbb{Q}$ et il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\pi^2 = \frac{p}{q}$. De plus, puisque $\lim\limits_{m\to+\infty} \frac{\pi p^m}{m!} = 0$, il existe un entier $n > 0$ tel que $\frac{\pi p^n}{n!} < 1$.

Considérons à présent les deux fonctions auxiliaires $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$g(x) = q^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2(n-k)} f^{(2k)}(x) \text{ et } h(x) = g'(x)\sin(\pi x) - \pi g(x)\cos(\pi x)\,.$$

Ainsi, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = \big(g''(x) + \pi^2 g(x)\big)\sin(\pi x) = \pi^2 p^n f(x)\sin(\pi x)\,,$$

on obtient, en utilisant 1),

$$0 < \pi \int_0^1 p^n f(x)\sin(\pi x)\,dx = \frac{h(x)}{\pi}\bigg|_0^1 = g(1) + g(0) < 1\,;$$

ce qui est impossible car, d'après 2), $g(1) + g(0) \in \mathbb{Z}$. D'où contradiction.

6.174 1) En faisant le changement de variable $s = kt$ et en intégrant successivement ℓ fois par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 k\,e^{-kt}P(kt)\,dt &= \int_0^k e^{-s}P(s)\,ds = -e^{-s}P(s)\Big|_0^k + \int_0^k e^{-s}P'(s)\,ds \\ &= \cdots = -e^{-s}Q(s)\Big|_0^k = -e^{-k}Q(k) + Q(0)\,.\end{aligned}$$

2) Raisonnons par l'absurde et supposons que e n'est pas transcendant. Alors, il existe $n+1$ entiers $a_0, \dots, a_n$ avec $a_0 a_n \neq 0$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, e^k = 0$$

($n \geq 2$ car e est irrationnel (ex. 2.49)).

2a) D'après 1), pour tout polynôme $P(x)$ de degré $\ell \geq 1$:

$$0 = a_0 Q(0) + \sum_{k=1}^{n} a_k Q(k) + \sum_{k=1}^{n} a_k k\, e^k \int_0^1 e^{-kt} P(kt)\, dt$$

ou encore

$$a_0 Q(0) + \sum_{k=1}^{n} a_k Q(k) = -\sum_{k=1}^{n} a_k k\, e^k \int_0^1 e^{-kt} P(kt)\, dt\,.$$

2b) Désignons par m le plus petit nombre premier strictement supérieur à $n + |a_0|$ tel que

$$\frac{M\, e^n n^{(n+1)m}}{(m-1)!} < 1 \text{ avec } M = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

(ce qui est toujours possible car $\lim\limits_{j \to +\infty} \frac{M\, e^n n^{(n+1)j}}{(j-1)!} = 0$).

Alors, $m \geq 5$ et posons

$$P(x) = \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\,(x-1)^m \cdots (x-n)^m\,.$$

$P(x)$ est un polynôme de degré $nm+m-1$. De plus, puisque la dérivée d'ordre $q \geq m$ du monôme x^p avec $p \geq q$ est

$$p(p-1)\cdots(p-q+1)x^{p-q} = q!\binom{p}{q} x^{p-q}\,,$$

le polynôme $P^{(r)}(x)$ avec $r \geq m$ a tous ses coefficients qui sont entiers et divisibles par m. Ainsi, en constatant que

$$P(0) = P'(0) = \cdots = P^{(m-2)}(0) = 0$$

et pour tout entier $k = 1, \dots, n$: $P(k) = P'(k) = \cdots = P^{(m-1)}(k) = 0$, il existe un $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que $Q(0) = P^{(m-1)}(0) + \lambda m$ et à chaque entier $k = 1, \dots, n$, on peut associer un $\lambda_k \in \mathbb{Z}$ tel que $Q(k) = \lambda_k m$. Par conséquent, $a_0(-1)^{nm}(n!)^m$ n'étant pas un multiple de m, on a

$$a_0 Q(0) + \sum_{k=1}^{n} a_k Q(k) = \left(a_0 \big(-1\big)^{nm} \big(n!\big)^m + \left(a_0\lambda + \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_k\right) m\right) \in \mathbb{Z}^*\,.$$

D'autre part,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k k\, e^k \int_0^1 e^{-kt} P(kt)\, dt\right| \leq M\, e^n \max_{0\leq x\leq n}\bigl|P(x)\bigr| < \frac{M\, e^n n^{(n+1)m}}{(m-1)!} < 1\,.$$

Finalement, en utilisant l'égalité obtenue sous 2a), $a_0Q(0)+\sum\limits_{k=1}^{n} a_k Q(k)$ serait un entier non nul strictement compris entre -1 et 1 ; ce qui est impossible. D'où contradiction.

$\boxed{\textbf{6.175}}$ Soit $\varepsilon > 0$. Puisque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^3\, \sin^2 \dfrac{\varepsilon}{2x}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2x}\right) = 0,$$

il existe un nombre $x_\varepsilon > \frac{\varepsilon}{\pi}$ tel que pour tout $x > x_\varepsilon$:

$$0 < \frac{2}{x^3\, \sin^2 \dfrac{\varepsilon}{2x}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2x}\right) < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Par conséquent pour tout $x > x_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} 0 < x\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x^2\cos t}\, dt &= x\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2x}} e^{-x^2\cos t}\, dt + x\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2x}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x^2\cos t}\, dt \\ &< x\, e^{-x^2\sin\frac{\varepsilon}{2x}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2x}\right) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{2}{x^3 \sin^2 \dfrac{\varepsilon}{2x}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2x}\right) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} x\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x^2\cos t}\, dt = 0\,.$

$\boxed{\textbf{6.176}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{16\, x^4 + 4x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}\,,$$

la fonction f admet exactement 2 points stationnaires, à savoir : $|x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Comme de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = -\frac{64\, x^3 + 8x}{\sqrt{\bigl(16x^4 + 4x^2 + 1\bigr)^3}} + \frac{2x^3 + x}{\sqrt{\bigl(x^4 + x^2 + 1\bigr)^3}}\,,$$

on a $f''\bigl(-\frac{1}{\sqrt{2}}\bigr) > 0$ et $f''\bigl(\frac{1}{\sqrt{2}}\bigr) < 0$. Par conséquent la fonction f admet un minimum local en $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et un maximum local en $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\boxed{\textbf{6.177}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = (1+\cos^4 x)(x^2 - x - 2) = (1+\cos^4 x)(x+1)(x-2)\,,$$

la fonction f admet exactement 2 points stationnaires, à savoir : $x = -1$ et $x = 2$. Comme de plus, $f'(x) > 0$ sur $]-\infty, -1[\, \cup \,]2, +\infty[$ et $f'(x) < 0$ sur $]-1, 2[$, la fonction continue f est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$ et sur $[2, +\infty[$ et strictement décroissante sur $[-1, 2]$. Par conséquent f admet un minimum local en 2 et un maximum local en -1.

$\boxed{\textbf{6.178}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 2x \ln\left(\frac{1}{2} + |x|\right)$, la fonction f admet exactement 3 points stationnaires, à savoir : $|x| = \frac{1}{2}$ et $x = 0$. Comme de plus, $f'(x) < 0$ sur $\left]-\infty, \frac{-1}{2}\right[\cup \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $f'(x) > 0$ sur $\left]\frac{-1}{2}, 0\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, la fonction continue f est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \frac{-1}{2}\right]$ et sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{-1}{2}, 0\right]$ et sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Par conséquent f admet un minimum local aux points $|x| = \frac{1}{2}$ et un maximum local en 0.

$\boxed{\textbf{6.179}}$ En effet, $f(0) = 0$ et pour tout $0 < |x| < 1$: $f(x) > 0$ (car $x^4 < x^2$).

$\boxed{\textbf{6.180}}$ En effet, $f(0) = 0$ et pour tout $x \neq 0$: $f(x) > 0$.

$\boxed{\textbf{6.181}}$ En effet, $f(0) = 0$ et pour tout $0 < |x| \leq 1$: $f(x) < 0$.

$\boxed{\textbf{6.182}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} (1 + \cos^2 t)\, dt = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\right) dt \\ &= \frac{3\pi}{4} + \frac{\sin 2t}{4}\Big|_x^{x+\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\sin 2x}{2}\,, \end{aligned}$$

on a $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$ et $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\textbf{6.183}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = e^{-x} \int_0^{x^2} e^{-t-t^2}\, dt = x^2 + \mathcal{R}_2(x)$, on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 2 > 0$. Par conséquent la fonction f admet un minimum local en 0.

$\boxed{\textbf{6.184}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\, \ln(1+t^2)\, dt = \frac{x^6}{3} + \mathcal{R}_6(x)\,,$$

on a $f'(0) = \cdots = f^{(5)}(0) = 0$ et $f^{(6)}(0) = \frac{6!}{3} > 0$. Par conséquent la fonction f admet un minimum local en 0.

$\boxed{\textbf{6.185}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \int_0^{x^2} e^{1+t} \ln(1+t)\, dt = \frac{e}{2}x^4 + \mathcal{R}_4(x)$, on a $f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0$ et $f^{(4)}(0) = 12\, e > 0$. Par conséquent la fonction f admet un minimum local en 0.

$\boxed{\textbf{6.186}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \int_0^{x^4} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} t}{1+\sqrt{t}}}\, dt = x^4 + \mathcal{R}_4(x)\,,$$

on a $f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0$ et $f^{(4)}(0) = 24 > 0$. Par conséquent la fonction f admet un minimum local en 0.

$\boxed{\textbf{6.187}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{\operatorname{ch} t - \sin t}\, dt = x^2 + \mathcal{R}_2(x)$, on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 2 > 0$. Par conséquent la fonction f admet un minimum local en 0.

$\boxed{\textbf{6.188}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = 2x^3 \int_0^x t\, e^{xt^2}\, dt = x^2(e^{x^3} - 1) = x^5 + \mathcal{R}_5(x)\,,$$

on a $f''(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = 0$ et $f^{(5)}(0) = 120 > 0$. Par conséquent la fonction f admet un point d'inflexion en 0.

$\boxed{\textbf{6.189}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \int_0^x e^{\sin^2 t}\, dt = x + \frac{x^3}{3} + \mathcal{R}_3(x)$, on a $f''(0) = 0$ et $f^{(3)}(0) = 2 > 0$. Par conséquent la fonction f admet un point d'inflexion en 0.

$\boxed{\textbf{6.190}}$ Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \int_0^{\sin x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+e^{\sin t}}} = \frac{x^3}{\sqrt{2}} + \mathcal{R}_3(x)\,,$$

on a $f''(0) = 0$ et $f^{(3)}(0) = \frac{6}{\sqrt{2}} > 0$. Par conséquent la fonction f admet un point d'inflexion en 0.

$\boxed{\textbf{6.191}}$ $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\, dx = \int_0^1 \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x\Big|_0^1 = \operatorname{sh} 1.$

$\boxed{\textbf{6.192}}$
$$\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+s^2}\, ds$$
$$= \frac{1}{4}\left(s\sqrt{1+s^2} + \ln\left(s + \sqrt{1+s^2}\right)\right)\Big|_0^2 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right).$$

$\boxed{\textbf{6.193}}$ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}\right).$

$\boxed{\textbf{6.194}}$ $\displaystyle\int_0^1 e^x\, dx = e^x\Big|_0^1 = e - 1.$

$\boxed{\textbf{6.195}}$ $\displaystyle\int_0^1 e^x \operatorname{ch} x\, dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (e^{2x}+1)\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}}{2} + x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}(e^2+1).$

$\boxed{\textbf{6.196}}$ Pour tout $\alpha > 0$:

$$L(\alpha) = \sqrt{25+\alpha^2}\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{25+\alpha^2-x^2}} = \sqrt{25+\alpha^2}\ \operatorname{Arcsin}\frac{x}{\sqrt{25+\alpha^2}}\Big|_0^5$$
$$= \sqrt{25+\alpha^2}\ \operatorname{Arcsin}\frac{5}{\sqrt{25+\alpha^2}}\,.$$

1) Puisque pour tout $\alpha > 0$:

$$L'(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{25+\alpha^2}}\ \operatorname{Arcsin}\frac{5}{\sqrt{25+\alpha^2}} - \frac{5}{\sqrt{25+\alpha^2}}$$

et

$$L''(\alpha) = \frac{25}{\sqrt{\left(25+\alpha^2\right)^3}}\ \operatorname{Arcsin}\frac{5}{\sqrt{25+\alpha^2}} > 0\,,$$

la fonction $L' :]0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ est strictement croissante. Comme de plus $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} L'(\alpha) = 0$, on a que pour tout $\alpha > 0$: $L'(\alpha) < 0$; ce qui entraîne que la fonction L est strictement décroissante.

2) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} L(\alpha) = 5 \lim\limits_{\alpha\to+\infty} \dfrac{\operatorname{Arcsin}\dfrac{5}{\sqrt{25+\alpha^2}}}{\dfrac{5}{\sqrt{25+\alpha^2}}} = 5.$

$\boxed{\textbf{6.197}}$ $\displaystyle\int_1^2 \left(-2x^2+5x-1-\frac{2}{x}\right)dx$

$$= \left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x - 2\ln x\right)\Big|_1^2 = \frac{11}{6} - 2\ln 2.$$

$\boxed{\textbf{6.198}}$ $\displaystyle\int_{-1}^2 (-x^2+x+2)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x}{2}+2x\right)\Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$

$\boxed{\textbf{6.199}}$ $\displaystyle\int_0^1 (x-x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$

$\boxed{\textbf{6.200}}$ $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}x^2\right)dx$

$$= 2\left(\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\operatorname{Arcsin}\frac{x}{2} - \frac{x^3}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

$\boxed{\textbf{6.201}}$ $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}} \left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} - x\right)dx$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\operatorname{Arcsin}\frac{x}{2} - x^2\right)\Big|_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \operatorname{Arcsin}\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$\boxed{\textbf{6.202}}$ $\displaystyle 4\int_0^1 \sqrt{x^2-x^4}\,dx = -\frac{4}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$

6.203 $$2\left(\int_0^{-1+\sqrt{2}} \sqrt{2x}\,dx + \int_{-1+\sqrt{2}}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx\right)$$
$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{-1+\sqrt{2}} + \left(x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{Arcsin} x\right)\Big|_{-1+\sqrt{2}}^{1}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\left(-1+\sqrt{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}\left(-1+\sqrt{2}\right).$$

6.204 1) Pour tout $0 \le \alpha \le 2$:

$$A(\alpha) = \int_0^{\beta} \sqrt{4-x^2}\,dx - \alpha\beta + \alpha\,(2-\beta) - \int_{\beta}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$$
$$= 4\operatorname{Arcsin}\frac{\beta}{2} + \alpha\,(2-\beta) - \pi\,,\ \text{avec } \beta = \sqrt{4-\alpha^2}.$$

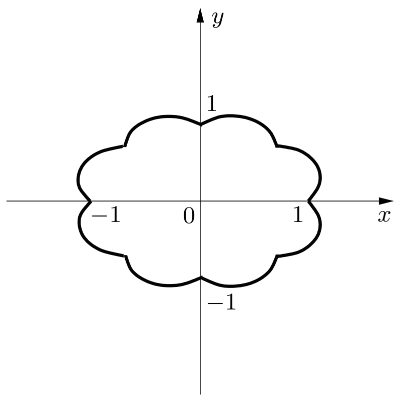
2) Puisque pour tout $\alpha \in \left]0,2\right[$: $A'(\alpha) = 2\,(1-\beta) = \frac{2(\alpha^2-3)}{1+\beta}$, on a

$$A'(\alpha) < 0 \text{ sur } \left]0,\sqrt{3}\right[\quad\text{et}\quad A'(\alpha) > 0 \text{ sur } \left]\sqrt{3},2\right[\,;$$

ce qui entraîne que la fonction continue A est strictement décroissante sur $\left[0,\sqrt{3}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\sqrt{3},2\right]$. Par conséquent

$$\min_{\alpha\in[0,2]} A(\alpha) = A\big(\sqrt{3}\big) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\,.$$

6.205 $$-4\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\left(\sin 4t + \cos 4t - \sin 2t - \cos 2t\right)dt\right.$$
$$\left. + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(\sin 4t - \cos 4t - \sin 2t + \cos 2t\right)dt\right) = 4.$$



6.206 Puisque l'intégrale à minimiser n'est rien d'autre que la longueur de l'arc de la courbe **C** de la fonction f compris entre les deux points $A = (a,\alpha)$

et $B = (b, \beta)$, sa valeur minimale est obtenue pour le segment de droite qui joint ces deux points et dont l'équation est

$$y = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{b - a}\,(x - a)\,.$$

$\boxed{\textbf{6.207}}$ $2\pi \int_0^2 x\sqrt{1+x^4}\,dx = \pi \int_0^4 \sqrt{1+t^2}\,dt$

$$= \pi\bigg(\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\,\ln\Big(t+\sqrt{1+t^2}\Big)\bigg)\bigg|_0^4 = \frac{\pi}{2}\Big(4\sqrt{17} + \ln\Big(4+\sqrt{17}\Big)\Big).$$

$\boxed{\textbf{6.208}}$ $2\pi \int_1^2 x\sqrt{1+\frac{16}{9}x^2}\,dx = \pi \int_1^4 \sqrt{1+\frac{16}{9}t}\,dt = \frac{3\pi}{8}\left(1+\frac{16}{9}\,t\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^4$

$$= \frac{\pi}{72}\left(73\sqrt{73} - 125\right).$$

$\boxed{\textbf{6.209}}$ $2\pi \int_1^2 (x \operatorname{ch} x^2 + \sin^4 x)\,dx$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2}\,\operatorname{sh} x^2\Big|_1^2 + \frac{1}{4}\int_1^2\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right)dx\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2}\,\operatorname{sh} x^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\,\sin 4x\right)\right)\bigg|_1^2 .$$

$\boxed{\textbf{6.210}}$ $2\pi \int_0^1 (x^3+x)\sqrt{1+\left(3x^2+1\right)^2}\,dx = \pi \int_0^1 (t+1)\sqrt{1+\left(3t+1\right)^2}\,dt$

$$= \frac{\pi}{18}\left(\int_0^1 6(3t+1)\sqrt{1+\left(3t+1\right)^2}\,dt + 12\int_0^1 \sqrt{1+\left(3t+1\right)^2}\,dt\right)$$

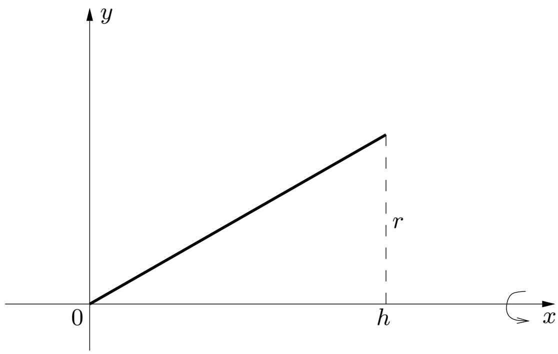
$$= \frac{\pi}{18}\left(\int_1^{16}\sqrt{1+r}\,dr + 4\int_1^4\sqrt{1+s^2}\,ds\right)$$

$$= \frac{\pi}{27}\,(1+r)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{16} + \frac{\pi}{9}\left(s\sqrt{1+s^2} + \ln\left(s+\sqrt{1+s^2}\right)\right)\Big|_1^4$$

$$= \frac{\pi}{9}\left(\frac{29}{3}\sqrt{17} - \frac{5}{3}\sqrt{2} + \ln\left(\frac{4+\sqrt{17}}{1+\sqrt{2}}\right)\right).$$

$\boxed{\textbf{6.211}}$ Ce problème revient à trouver le maximum de la fonction $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ définie par $f(\alpha) = \pi\left(\left(6\alpha-\alpha^2\right)^2 - \alpha^4\right)$. Puisque pour tout $\alpha \in \,]0,3[$: $f'(\alpha) = 36\,\pi\alpha(2-\alpha)$, la fonction continue f est strictement croissante sur $[0,2]$ et strictement décroissante sur $[2,3]$. Par conséquent la fonction f atteint son maximum pour $\alpha = 2$ et celui-ci vaut $48\,\pi$.

$\boxed{\textbf{6.212}}$ Soit h la hauteur du cône Ω et r le rayon de son cercle de base. Pour obtenir le cône Ω, il suffit de faire tourner la partie de la droite d'équation $y = \frac{r}{h}x$ comprise entre $x = 0$ et $x = h$ autour de l'axe Ox.

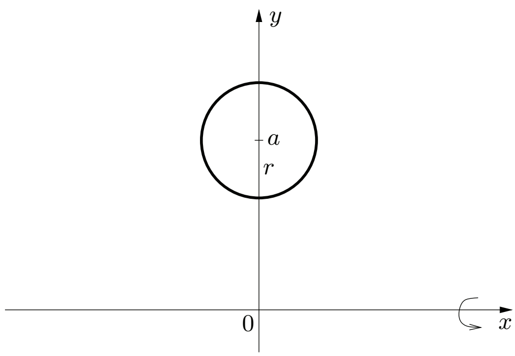


1) $2\pi \displaystyle\int_0^h \frac{r}{h}\, x\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}\, dx = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$.

2) $\pi \displaystyle\int_0^h \frac{r^2}{h^2}\, x^2\, dx = \frac{\pi}{3}\, r^2 h$.

6.213 1) $8\pi ar \displaystyle\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = 8\pi ar \operatorname{Arcsin} \frac{x}{r}\Big|_0^r = 4\pi^2 ar$.

2) $8\pi a \displaystyle\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\, dx = 8\pi a \left(\frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2} + \frac{r^2}{2} \operatorname{Arcsin} \frac{x}{r}\right)\Big|_0^r = 2\pi^2 ar^2$.



6.214 $$\pi \int_0^1 \left(e^{2\sqrt{x}} - e^{2x}\right) dx = 2\pi \int_0^1 t\, e^{2t}\, dt - \frac{\pi}{2}\left(e^2-1\right)$$
$$= 2\pi \left(\frac{t}{2}\, e^{2t} - \frac{e^{2t}}{4}\right)\Big|_0^1 - \frac{\pi}{2}\left(e^2-1\right) = \pi.$$

6.215 $$\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^4 x\, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left((1+\operatorname{tg}^2 x)\operatorname{tg}^2 x - (1+\operatorname{tg}^2 x) + 1\right) dx$$
$$= \pi \left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi^2}{3}.$$

$\boxed{\textbf{6.216}}$ $$\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}^3x)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\operatorname{tg}x)(1+\operatorname{tg}^2x)\,dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\big(1+\operatorname{tg}x\big)^2\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{2}\,(3+2\sqrt{3}).$$

$\boxed{\textbf{6.217}}$ $$\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\big(\sin^2x+\operatorname{tg}^2x\big)^2\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin^4x+2\sin^2x\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}^4x)\,dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{3}{8}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}\right)dx+2\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{\cos^2x}-\frac{3}{2}+\frac{\cos 2x}{2}\right)dx$$
$$+\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\big((1+\operatorname{tg}^2x)\operatorname{tg}^2x-(1+\operatorname{tg}^2x)+1\big)\,dx$$
$$=\pi\left(\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}+2\pi\left(\operatorname{tg}x-\frac{3x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$+\pi\left(\frac{\operatorname{tg}^3x}{3}-\operatorname{tg}x+x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\pi\left(\frac{883}{1\,728}\sqrt{3}-\frac{13\,\pi}{48}\right).$$

$\boxed{\textbf{6.218}}$ $$\pi\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln^3x}=-\frac{\pi}{2\ln^2x}\Big|_e^{e^2}=\frac{3\pi}{8}.$$

$\boxed{\textbf{6.219}}$ $$\pi\int_0^2\Big(\big(3x-x^2\big)^2-x^2\Big)\,dx=\pi\int_0^2(8x^2-6x^3+x^4)\,dx$$
$$=\pi\left(\frac{8}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+\frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_0^2=\frac{56}{15}\,\pi.$$

$\boxed{\textbf{6.220}}$ $$\pi\int_0^1\frac{x(1-x^5)}{1+x^2}\,dx=\pi\int_0^1\left(-1+x^2-x^4+\frac{1+x}{1+x^2}\right)dx$$
$$=\pi\left(-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\operatorname{Arctg}x+\frac{1}{2}\,\ln(1+x^2)\right)\Bigg|_0^1$$
$$=\pi\left(-\frac{13}{15}+\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}\right).$$

$\boxed{\textbf{6.221}}$ 1) Pour tout $|\alpha|<1$:

$$V(\alpha)=\pi\int_0^1\Big(\big(1-\alpha x\big)^2-\big(1-\alpha\big)^2x\Big)\,dx=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\alpha^2}{3}\right).$$

2) $\displaystyle\max_{|\alpha|<1}V(\alpha)=V(0)=\frac{\pi}{2}.$

$\boxed{\textbf{6.222}}$ 1) Pour tout $0\le\alpha\le 4$:

$$V(\alpha)=2\left(\pi\int_0^4\left(4-\frac{x^2}{4}\right)dx-\pi\alpha\left(4-\frac{\alpha^2}{4}\right)\right)=\frac{64}{3}\,\pi-2\pi\alpha\left(4-\frac{\alpha^2}{4}\right).$$

2) Puisque pour tout $\alpha \in]0,4[$: $V'(\alpha) = -8\pi + \frac{3\pi}{2}\,\alpha^2$, on a

$$V'(\alpha) < 0 \text{ sur } \left]0, \frac{4}{\sqrt{3}}\right[\quad \text{et} \quad V'(\alpha) > 0 \text{ sur } \left]\frac{4}{\sqrt{3}}, 4\right[\; ;$$

ce qui entraîne que la fonction continue V est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{4}{\sqrt{3}}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{4}{\sqrt{3}}, 4\right]$. Par conséquent

$$\min_{\alpha\in[0,4]} V(\alpha) = V\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \frac{64}{3}\,\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$\boxed{\textbf{6.223}}$ Equation de l'asymptote : $y = x$. Le volume cherchée est

$$\pi\int_1^{+\infty}\left(x^2 - \left(\frac{x^4+x-2}{x^3+1}\right)^2\right)dx = 4\pi\int_1^{+\infty}\frac{x^4+x-1}{\left(x^3+1\right)^2}\,dx$$
$$= 4\pi\int_1^{+\infty}\left(-\frac{5}{9(x+1)} - \frac{1}{9\left(x+1\right)^2} + \frac{5x}{9(x^2+x-1)} + \frac{-1+x}{3\left(x^2+x-1\right)^2}\right)dx$$
$$= 4\pi\left(-\frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{5}{18}\,\ln\left(\frac{x^2-x+1}{\left(x+1\right)^2}\right)\right)\Bigg|_1^{+\infty}$$
$$= 4\pi\left(\frac{1}{6} + \frac{\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{5}{9}\,\ln 2\right).$$

$\boxed{\textbf{6.224}}$ $$2\pi\int_2^5 x\left(x - \frac{6}{1+x}\right)dx = 2\pi\int_2^5\left(x^2 + 6\left(\frac{1}{1+x} - 1\right)\right)dx$$
$$= 2\pi\left(\frac{x^3}{3} - 6x + 6\ln(1+x)\right)\Bigg|_2^5 = 6\pi(7 + 2\ln 2).$$

$\boxed{\textbf{6.225}}$ $$2\pi\int_2^8 x\left((2x-1) - \left((x-4)^2 - 1\right)\right)dx$$
$$= 2\pi\left(-\tfrac{x^4}{4} + \tfrac{10}{3}\,x^3 - 8x^2\right)\Big|_2^8 = 360\,\pi.$$

$\boxed{\textbf{6.226}}$ $$4\pi\int_{\sqrt{3}}^2 x\sqrt{x^2-3}\,dx = \frac{4\pi}{3}\left(x^2-3\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\sqrt{3}}^2 = \frac{4\pi}{3}.$$

$\boxed{\textbf{6.227}}$ $$2\pi\int_0^1 x^3\left(1 - \sqrt{1-x}\right)\,dx = \frac{\pi}{2} - 2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1-x}\,dx$$
$$= \frac{\pi}{2} - 4\pi\int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^3 dt = \frac{\pi}{2} - 4\pi\int_0^1\left(t^2 - 3t^4 + 3t^6 - t^8\right)dt$$
$$= \frac{\pi}{2} - 4\pi\left(\frac{t^3}{3} - \frac{3}{5}\,t^5 + \frac{3}{7}\,t^7 - \frac{t^9}{9}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{187\,\pi}{630}.$$

6.228 $2\pi \int_0^{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} x\left(\sqrt{1-x^4}-x\right)\,dx$

$$= \pi \int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \sqrt{1-t^2}\,dt - \frac{2\pi}{3}\,x^3\Big|_0^{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}$$

$$= \pi\left(\frac{t}{2}\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{2}\,\operatorname{Arcsin} t\right)\Big|_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{2\pi}{3}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{\pi}{6}\left(\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - 3\operatorname{Arcsin}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right).$$

6.229 $2\pi \int_0^1 x\left(\sqrt{x-x^2}+x\right)\,dx$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}(1-2x)\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+x^2\right)dx$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{3}\left(x-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\left(\frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{8}\,\operatorname{Arcsin}(2x-1)\right)\right.$$

$$\left. + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 2\pi\left(\frac{\pi}{16}+\frac{1}{3}\right).$$

6.230 $2\pi \int_0^2 x^2\sqrt{1+x^6}\,dx = \frac{2\pi}{3}\int_0^8 \sqrt{1+t^2}\,dt$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right)\Big|_0^8$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(8\sqrt{65}+\ln\left(8+\sqrt{65}\right)\right).$$

6.231 $4\pi \int_0^1 x^2(1-x)\,dx = 4\pi\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}.$

6.232 $2\pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x(1+x^6)}-\frac{1}{65\,x}\right)dx$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_1^2 \frac{3x^2}{x^3\left(1+\left(x^3\right)^2\right)}\,dx - \frac{2\pi}{65}\int_1^2 \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_1^8 \frac{dt}{t(1+t^2)} - \frac{2\pi}{65}\ln 2$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_1^8 \left(\frac{1}{t}-\frac{t}{1+t^2}\right)dt - \frac{2\pi}{65}\ln 2 = \frac{\pi}{195}\left(449\ln 2 - 65\ln 65\right).$$

$\boxed{\textbf{6.233}}$ Puisque

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\ln(1+x)\,dx &= \frac{x^2}{2}\,\ln(1+x)\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x^2}{1+x}\,dx\\ &= 2\ln 3 - \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\left(\int_1^2 (x-1)\,dx + \int_1^2 \frac{1}{1+x}\,dx\right)\\ &= 2\ln 3 - \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{(x-1)^2}{2} + \ln(1+x)\right)\Big|_1^2 = \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{1}{4}\,.\end{aligned}$$

et

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{4x^3}{x^4\sqrt{1+x^4}}\,dx = \frac{1}{4}\int_1^{16} \frac{dt}{t\sqrt{1+t}} = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}} \frac{ds}{s^2-1}$$

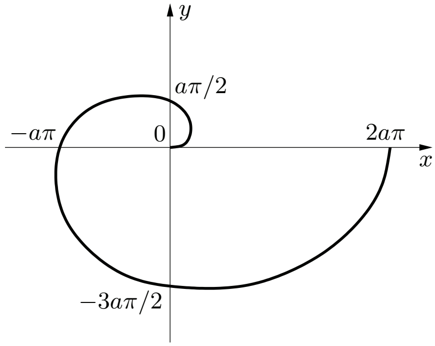
$$= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{s-1}{s+1}\right)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}} = \frac{1}{2}\left(\ln 4 + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{17}+1}\right).$$

Le volume cherché vaut

$$2\pi\left(\int_1^2 x\ln(1+x)\,dx + \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}}\right) = \pi\left(3\ln 3 - \frac{1}{2} + \ln 4 + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{17}+1}\right).$$

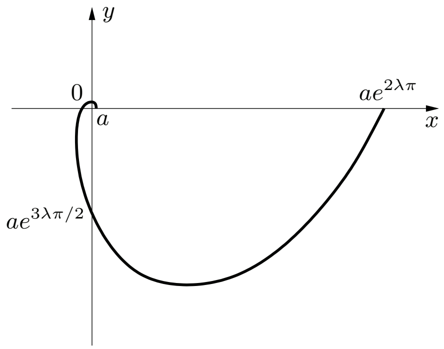
$\boxed{\textbf{6.234}}$ 1) $a\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2}\,dt = a\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right).$

2) $\displaystyle\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} t^2\,dt = \frac{4\pi^3a^2}{3}.$

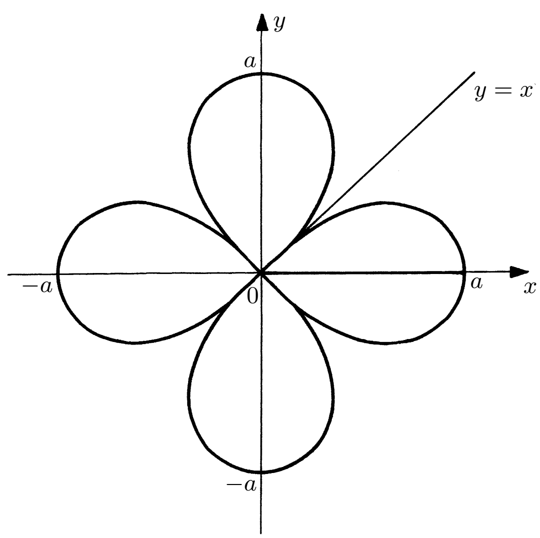


$\boxed{\textbf{6.235}}$ 1) $a\sqrt{1+\lambda^2}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\lambda t}\,dt = \frac{a\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda}\,(e^{2\lambda\pi}-1).$

2) $\displaystyle\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} e^{2\lambda t}\,dt = \frac{a^2}{4\lambda}\,(e^{4\lambda\pi}-1).$



$\boxed{\mathbf{6.236}}$ $4a^2 \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t \, dt = 2a^2.$

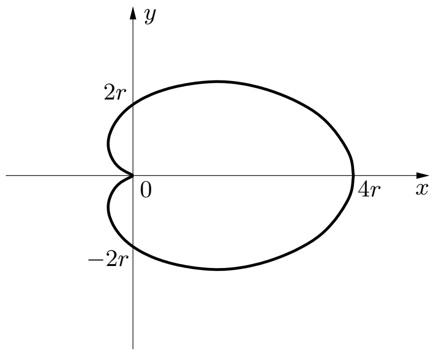


$\boxed{\mathbf{6.237}}$ 1) $8r \displaystyle\int_0^{\pi} \cos \frac{t}{2} \, dt = 16\, r.$

2) $4r^2 \displaystyle\int_0^{\pi} \big(1 + \cos t\big)^2 \, dt = 4r^2 \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\cos t + \frac{\cos 2t}{2}\right) dt = 6\pi r^2.$

$$3)\ S_{\text{latérale}} = 16\,\pi r^2 \int_0^{\pi} (1+\cos t)\sin t \cos\frac{t}{2}\,dt$$
$$= 4\pi r^2 \int_0^{\pi} \left(2\sin\frac{t}{2} + 3\sin\frac{3t}{2} + \sin\frac{5t}{2}\right) dt = \frac{128}{5}\, r^2\pi.$$

$$V = 8\pi r^3 \int_0^{\pi} \big(1+\cos t\big)^2 (1+2\cos t)\sin^3 t\,dt$$
$$= \frac{\pi r^3}{2}\int_0^{\pi} (22\ \sin t + 19\ \sin 2t + \sin 3t - 8\sin 4t - 5\sin 5t - \sin 6t)\,dt$$
$$= \frac{4\pi r^3}{3}.$$

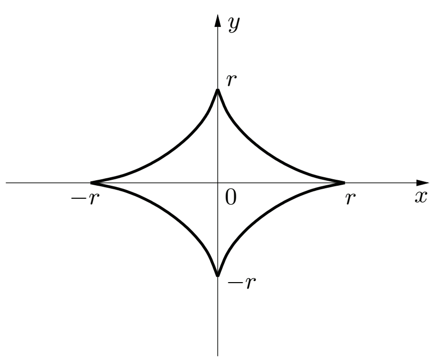


$\boxed{\textbf{6.238}}$ 1) $6r\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt = 6r.$

$$2)\ 12\,r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t\,dt = \frac{3r^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-\cos 2t - 2\cos 4t + \cos 6t)\,dx = \frac{3r^2\pi}{8}\,.$$

$$3)\ S_{\text{latérale}} = 12\,r^2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos t\,dt = \frac{12\,r^2\pi}{5}\ \sin^5 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12\,r^2\pi}{5}\,.$$

$$V = 6r^3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t\cos^2 t\,dt$$
$$= \frac{3r^3\pi}{128}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (14\ \sin t - 8\sin 5t + 5\sin 7t - \sin 9t)\,dt = \frac{32\,r^3\pi}{105}.$$



$\boxed{\textbf{6.239}}$ 1) $2r\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-4r\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8r.$

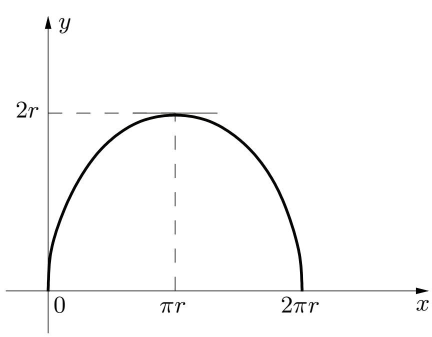
2) $r^2\displaystyle\int_0^{2\pi}\big(1-\cos t\big)^2\,dt=2\pi r^2+\frac{r^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt=3\pi r^2.$

3) $$\begin{aligned}S_{\text{latérale}}&=4\pi r^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt\\&=2\pi r^2\int_0^{2\pi}\left(3\sin\frac{t}{2}-\sin\frac{3t}{2}\right)dt=\frac{64\pi r^2}{3}\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V&=\pi r^3\int_0^{2\pi}\big(1-\cos t\big)^3\,dt\\&=\frac{\pi r^3}{4}\int_0^{2\pi}(10-15\,\cos t+6\cos 2t-\cos 3t)\,dt=5\pi^2r^3\,.\end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned}S_{\text{latérale}}&=4\pi r^2\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}\,dt\\&=4\pi r^2\int_0^{2\pi}t\sin\frac{t}{2}\,dt-8\pi r^2\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}\,\cos\frac{t}{2}\,dt\\&=4\pi r^2\left(-2t\cos\frac{t}{2}+4\sin\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}-\frac{16\,\pi r^2}{3}\,\sin^3\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=16\,\pi^2r^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V&=2\pi r^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2\,dt\\&=2\pi r^3\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}\,t-2t\cos t+\frac{t}{2}\,\cos 2t\right)dt-2\pi r^3\int_0^{2\pi}\big(1-\cos t\big)^2\sin t\,dt\\&=2\pi r^3\left(\frac{3}{4}\,t^2-2\cos t+\frac{1}{8}\,\cos 2t-2t\sin t+\frac{t}{4}\,\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}\\&\quad-\frac{2\pi r^3}{3}\,\big(1-\cos t\big)^3\Big|_0^{2\pi}=6\pi^3r^3.\end{aligned}$$



Solutions des exercices du chapitre 7

Intégrales généralisées

$\boxed{\textbf{7.1}}$ $\displaystyle\int_{0+}^{1} t\ln t\,dt = \frac{t^2}{2}\,\ln t\Big|_{0+}^{1} - \frac{1}{2}\int_0^1 t\,dt = -\frac{1}{4}.$

$\boxed{\textbf{7.2}}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{Arctg} t\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$

$\boxed{\textbf{7.3}}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+6t+10} = \operatorname{Arctg}(t+3)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$

$\boxed{\textbf{7.4}}$ $\displaystyle\forall\, x>1 : \int_1^x \frac{3t-1}{t(4t^2+1)}\,dt = 3\int_1^x \frac{dt}{4t^2+1} - \int_1^x \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{8t}{4t^2+1}\,dt$

$$= \frac{3}{2}\,\operatorname{Arctg}(2t)\Big|_1^x + \ln\left(\frac{\sqrt{4t^2+1}}{t}\right)\Bigg|_1^x$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{3t-1}{t(4t^2+1)}\,dt = \ln\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg} 2\right).$$

$\boxed{\textbf{7.5}}$ $\displaystyle\int_0^{1-} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{Arcsin} t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$

$\boxed{\textbf{7.6}}$ $\displaystyle\int_{1+}^{2} \frac{dt}{\sqrt{t-1}} = 2\sqrt{t-1}\Big|_1^2 = 2.$

$\boxed{\textbf{7.7}}$ $\displaystyle\int_{1+}^{2} \frac{t}{\sqrt{t-1}}\,dt = \int_{1+}^{2}\left(\sqrt{t-1} + \frac{1}{\sqrt{t-1}}\right)dt$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{\left(t-1\right)^3}}{3} + \sqrt{t-1}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{8}{3}.$$

$\boxed{\textbf{7.8}}$ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t-1}} = 2\int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2+1} = 2\operatorname{Arctg} s\Big|_0^{+\infty} = \pi.$

$\boxed{\textbf{7.9}}$ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} = 2\int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2+1} = 2\operatorname{Arctg} s\Big|_0^{+\infty} = \pi.$

$\boxed{\textbf{7.10}}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\sqrt[3]{\left(1+t^2\right)^2}}\,dt = \frac{3}{2}\,\sqrt[3]{1+t^2}\Big|_0^{+\infty} = +\infty.$

7.11 $$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} = \ln\left(s+\sqrt{1+s^2}\right)\Big|_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

7.12 $$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}} = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s^2+s+1}} = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$
$$= \ln\left(\left(s+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{s^2+s+1}\right)\Big|_0^1 = \ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

7.13 $$\int_{0+}^1 \frac{dt}{(t+2)\sqrt{3t-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{3}{20}\right)^2-\left(s-\frac{7}{20}\right)^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{20\,s-7}{3}\right)\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{9}\right).$$

7.14 $$\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t(1-t)}} = \int_{1+}^2 \frac{ds}{\sqrt{s-1}} = 2\sqrt{s-1}\Big|_1^2 = 2.$$

7.15 $$\int_{1+}^{2-} \frac{t}{\sqrt{(t-1)(2-t)}}\,dt = \int_{1+}^{2-} \frac{\left(t-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(t-\frac{3}{2}\right)^2}}\,dt$$
$$= \left(-\sqrt{(t-1)(2-t)}+\frac{3}{2}\,\mathrm{Arcsin}(2t-3)\right)\Big|_1^2 = \frac{3\pi}{2}.$$

7.16 $$\int_{0+}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}} = 2\int_0^{+\infty} \frac{ds}{1+s^2} = 2\,\mathrm{Arctg}\,s\Big|_0^{+\infty} = \pi\ .$$

7.17 $$\int_1^{e-} \frac{dt}{t\sqrt{1-\ln^2 t}} = \int_0^{1-} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \mathrm{Arcsin}\,s\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\ .$$

7.18 $$\int_{\frac{3}{4}}^{1-} \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1-s^2)\,ds$$
$$= 2\left(s\ln(1-s^2)\Big|_0^{\frac{1}{2}} - 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-s^2)-1}{1-s^2}\,ds\right)$$
$$= \ln\frac{3}{4} - 2 + 2\,\ln\left(\frac{1+s}{1-s}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = -2+\ln\frac{27}{4}.$$

7.19 $$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,dt = 2\int_0^{+\infty} s\,e^{-s}\,ds = 2\left(-se^{-s}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-s}\,ds\right) = 2.$$

7.20 $$\int_{0+}^1 \ln t\,dt = t(\ln t-1)\Big|_{0+}^1 = -1.$$

7.21 $$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,dt = -\frac{\ln t}{t}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1.$$

7.22 $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,dt = -t^2\,e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,dt$

$\displaystyle = -2t\,e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 2\,.$

7.23 $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-4t^2}\,dt = -\frac{t}{8}\,e^{-4t^2}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{8}\int_0^{+\infty} e^{-(2t)^2}\,dt$

$\displaystyle = \frac{1}{16}\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = \frac{\sqrt{\pi}}{32}\,.$

7.24 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = 2\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{1+\left(e^t\right)^2}\,dt = 2\operatorname{Arctg} e^t\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$

7.25 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} t}{1+t^2}\,dt = \frac{\operatorname{Arctg}^2 t}{2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}.$

7.26 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} t}{t^2}\,dt = -\frac{\operatorname{Arctg} t}{t}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)}$

$\displaystyle = \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right)dt = \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$

7.27 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-} \frac{dt}{4+\operatorname{tg}^2 t} = \int_0^{+\infty}\frac{ds}{(4+s^2)(1+s^2)} = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+s^2} - \frac{1}{4+s^2}\right)ds$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\left(\operatorname{Arctg} s - \frac{\operatorname{Arctg}\dfrac{s}{2}}{2}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{12}.$

7.28 1) $\displaystyle\forall\, t \geq 1 : 0 \leq \frac{\ln t}{1+t^2} = \frac{2\ln\sqrt{t}}{1+t^2} < \frac{2}{t^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$ converge.

2) $\displaystyle\int_{0+}^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = \lim_{x\to 0+}\int_x^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$

$\displaystyle = -\lim_{x\to 0+}\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln s}{1+s^2}\,ds = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln s}{1+s^2}\,ds.$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = \int_{0+}^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = 0\,.$

7.29 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1}$

$\displaystyle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right) + \operatorname{Arctg}\left(\sqrt{2}\,t-1\right) + \operatorname{Arctg}\left(\sqrt{2}t+1\right)\right)\Bigg|_0^{+\infty}$

$\displaystyle = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,.$

7.30 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^4+1}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{2t}{\left(t^2\right)^2+1}\,dt$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2+1} = \frac{1}{2}\,\operatorname{Arctg} s\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}\,.$

7.31 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\,dt = \int_{+\infty}^{0} \frac{\frac{1}{s^2}}{\frac{1}{s^4}+1}\,\frac{-1}{s^2}\,ds = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

7.32 Diverge car $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t\frac{t^3}{t^4+1} = 1.$

7.33 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos^4 t+\sin^4 t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}-} \frac{1+\mathrm{tg}^2\, t}{\cos^2 t\big(1+\mathrm{tg}^4\, t\big)}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1+s^2}{1+s^4}\,ds = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

7.34 Diverge. En effet,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}-} \frac{dt}{\cos^4 t-\sin^4 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}-} \frac{dt}{\cos 2t} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin 2t}{\cos 2t}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}-} = +\infty\,.$$

7.35
$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\\
&= \int_0^{\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\\
&= 2\int_0^{\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t} = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t} = \frac{4}{b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos^2 t\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\mathrm{tg}^{\,2} t\right)}\\
&= \frac{4}{b^2}\int_0^{+\infty} \frac{ds}{\dfrac{a^2}{b^2}+s^2} = \frac{4}{ab}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{b}{a}\,s\right)\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{2\pi}{ab}\,.
\end{aligned}$$

7.36 Puisque pour tout $0 < t \le \frac{\pi}{2}$: $\ln(\sin t) = \ln\frac{\sin t}{t} + \ln t$, l'intégrale généralisée $\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt$ converge. De plus,

$$\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt = \int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}-} \ln(\cos s)\,ds.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt &= \frac{1}{2}\left(\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}-} \ln(\cos t)\,dt\right)\\
&= \frac{1}{2}\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-} \ln\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)dt = \frac{1}{4}\int_{0+}^{\pi-} \ln\left(\frac{\sin r}{2}\right)dr\\
&= \frac{1}{4}\int_{0+}^{\pi-} \ln(\sin r)\,dr - \frac{\pi\ln 2}{4} = \frac{1}{2}\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin r)\,dr - \frac{\pi\ln 2}{4}\,.
\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-} \ln(\sin t)\,dt = -\frac{\pi\ln 2}{2}\,.$

7.37 En faisant le chagement de variable $t = \operatorname{tg} s$ et en utilisant l'exercice 6.144, on a pour tout entier $n \geq 2$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(1+t^2\right)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}-} \cos^{2(n-1)} s\, ds = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2}\,.$$

7.38 $\lim\limits_{t\to+\infty} t\dfrac{2t^3+t^2+1}{t^4+1} = 2$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t\dfrac{3t^3+4t}{t^4+1} = 3$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{2t^3+t^2+1}{t^4+1}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{3t^3+4t}{t^4+1}\,dt = +\infty.$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\displaystyle\int_0^x \frac{2t^3+t^2+1}{t^4+1}\,dt}{\displaystyle\int_0^x \frac{3t^3+4t}{t^4+1}\,dt} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{2x^3+x^2+1}{x^4+1}}{\dfrac{3x^3+4x}{x^4+1}} = \dfrac{2}{3}\,.$

7.39 $\lim\limits_{t\to3+} \sqrt{t-3}\,\dfrac{1}{\sqrt{\ln(t-2)}} = 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{3+}^4 \frac{dt}{\sqrt{\ln(t-2)}}$ converge.

7.40 $\forall\, t \in \,]0,1]$: $\left|\cos\dfrac{1}{t}\right| < 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^1 \cos\frac{1}{t}\,dt$ converge.

7.41 1) $\lim\limits_{t\to0+} \dfrac{\operatorname{th}(t-t^2)}{t\sin(t-1)} = \dfrac{-1}{\sin 1} \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{th}(t-t^2)}{t\sin(t-1)}\,dt$ converge.

2) $\lim\limits_{t\to1-} \dfrac{\operatorname{th}(t-t^2)}{t\sin(t-1)} = -1 \Rightarrow \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{\operatorname{th}(t-t^2)}{t\sin(t-1)}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\operatorname{th}(t-t^2)}{t\sin(t-1)}\,dt$ converge.

7.42 $\lim\limits_{t\to1-} (1-t)\dfrac{\sin t}{t\ln t} = -\sin 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\sin t}{t\ln t}\,dt$ diverge.

7.43 $\lim\limits_{t\to0+} \sqrt{t}\,\dfrac{\sin\sqrt{t}}{t\ln t} = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin\sqrt{t}}{t\ln t}\,dt$ converge.

7.44 1) $\lim\limits_{t\to0+} \dfrac{\operatorname{sh} t}{t\sqrt{\ln\frac{1}{t}}} = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sh} t}{t\sqrt{\ln\frac{1}{t}}}\,dt$ converge.

2) $\lim\limits_{t\to1-} \sqrt{1-t}\,\dfrac{\operatorname{sh} t}{t\sqrt{\ln\frac{1}{t}}} = \operatorname{sh} 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{\operatorname{sh} t}{t\sqrt{\ln\frac{1}{t}}}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\operatorname{sh} t}{t\sqrt{\ln\frac{1}{t}}}\,dt$ converge.

7.45 $\forall\, t \in \,]0,1]$: $0 < \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{t}} \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^1 \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt$ converge.

7.46 1) $\lim\limits_{t\to 0+} \sqrt{t}\,\dfrac{\ln^2\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}} = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^2\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}}\,dt$ converge.

2) $\lim\limits_{t\to 1-} \sqrt{1-t}\,\dfrac{\ln^2\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}} = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{\ln^2\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\ln^2\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}}\,dt$ converge.

7.47 1) $\lim\limits_{t\to 0+} t^{\frac{3}{4}}\dfrac{\ln t}{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)} = \dfrac{1}{\pi}\lim\limits_{t\to 0+} t^{\frac{1}{4}}\ln t\,\dfrac{\pi\sqrt{t}}{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)} = 0$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln t}{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)}\,dt$ converge.

2) $\lim\limits_{t\to 1-} \dfrac{\ln t}{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)} = \lim\limits_{t\to 1-} \dfrac{2}{\pi\sqrt{t}\cos\left(\pi\sqrt{t}\right)} = -\dfrac{2}{\pi} \Rightarrow \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{\ln t}{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\ln t}{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)}\,dt$ converge.

7.48 1) $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{\operatorname{Argth} t}} = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{\operatorname{Argth} t}}\,dt$ converge.

2) $\lim\limits_{t\to 1-} \dfrac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{\operatorname{Argth} t}} = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{\operatorname{Argth} t}}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{\operatorname{Argth} t}}\,dt$ converge.

7.49 $\lim\limits_{t\to 0+} t\,\dfrac{1}{e^t-1} = 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{1}{e^t-1}\,dt$ diverge.

7.50 Converge, car pour tout $t \in]0,1]$: $\ln(\sin t) = \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) + \ln t$.

7.51 $\lim\limits_{t\to 2+} \dfrac{\ln(t-1)}{t-2} = 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{2+}^{3} \frac{\ln(t-1)}{t-2}\,dt$ converge.

7.52 $\lim\limits_{t\to 1+} \sqrt{t-1}\,\dfrac{1}{\sqrt{t^3-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \displaystyle\int_{1+}^{2} \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}$ converge.

7.53 1) $\lim\limits_{t\to 0+} \sqrt{t}\,\dfrac{1}{\sqrt{t-t^5}} = 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t-t^5}}$ converge.

2) $\lim\limits_{t\to 1-} \sqrt{1-t}\,\dfrac{1}{\sqrt{t-t^5}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{dt}{\sqrt{t-t^5}}$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{dt}{\sqrt{t-t^5}}$ converge.

7.54 1) $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\sin t}{\sqrt{t-t^2}} = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \dfrac{\sin t}{\sqrt{t-t^2}}\,dt$ converge.

2) $\lim\limits_{t\to 1-} \sqrt{1-t}\,\dfrac{\sin t}{\sqrt{t-t^2}} = \sin 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1-} \dfrac{\sin t}{\sqrt{t-t^2}}$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \dfrac{\sin t}{\sqrt{t-t^2}}$ converge.

7.55 $\lim\limits_{t\to \frac{\pi}{2}-} \left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)\dfrac{1}{1-e^{\cos t}} = -1 \Rightarrow \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}-} \dfrac{dt}{1-e^{\cos t}}$ diverge.

7.56 $\forall\, t \geq 1 : \sqrt{\dfrac{1+t^2}{1+t^4}} = \dfrac{1}{t}\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{1}{t^2}}{1+\dfrac{1}{t^4}}} \geq \dfrac{1}{t} \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \sqrt{\dfrac{1+t^2}{1+t^4}}\,dt$ diverge.

7.57 1) $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\sin t}{\ln(1+t)} = 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} \dfrac{\sin t}{\ln(1+t)}\,dt$ converge.

2) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \dfrac{\sin t}{\ln(1+t)}\,dt$ converge (critère de Abel-Dirichlet).

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \dfrac{\sin t}{\ln(1+t)}\,dt$ converge.

7.58 1) $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\ln(1+t)}{\operatorname{sh} t + \sin^2 t} = \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\dfrac{1}{1+t}}{\operatorname{ch} t + \sin 2t} = 1$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} \dfrac{\ln(1+t)}{\operatorname{sh} t + \sin^2 t}\,dt < +\infty\,.$

2) $\forall\, t \geq 1 : 0 < \dfrac{\ln(1+t)}{\operatorname{sh} t + \sin^2 t} < \dfrac{t}{\operatorname{sh} t} < \dfrac{12}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \dfrac{\ln(1+t)}{\operatorname{sh} t + \sin^2 t}\,dt < +\infty.$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \dfrac{\ln(1+t)}{\operatorname{sh} t + \sin^2 t}\,dt < +\infty.$

7.59 $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\sin t}{t} = 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} \dfrac{\sin t}{t}\,dt$ converge.

7.60 $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\operatorname{tg} t}{t} = 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} \dfrac{\operatorname{tg} t}{t}\,dt$ converge.

7.61 $\forall\, t \in \,]0,1] : \left|\sin \dfrac{1}{\sqrt{t}}\right| < \dfrac{1}{\sqrt{t}} \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} \sin \dfrac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ converge.

7.62 1) $\forall\, t \in \,]0,1] : \left|\dfrac{1}{\sqrt{t}}\sin \dfrac{1}{t}\right| < \dfrac{1}{\sqrt{t}} \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} \dfrac{1}{\sqrt{t}}\sin \dfrac{1}{t}\,dt$ converge.

2) $\forall\, t \geq 1 : \left|\dfrac{1}{\sqrt{t}}\sin \dfrac{1}{t}\right| < \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{t}}\sin \dfrac{1}{t}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{t}}\sin \dfrac{1}{t}\,dt$ converge.

7.63 1) $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}} = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$ converge.

2) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$ converge (critère de Abel-Dirichlet).

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$ converge.

7.64 $\lim\limits_{t \to +\infty} t \sin \dfrac{1}{t} = 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \sin \frac{1}{t}\, dt$ diverge.

7.65 $\lim\limits_{t \to +\infty} t \sin \dfrac{1}{t} = 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} t \sin \frac{1}{t}\, dt$ diverge.

7.66 $\forall\, t \geq 1 : \left| \dfrac{1}{t}\, \sin \dfrac{1}{t} \right| < \dfrac{1}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t}\, \sin \frac{1}{t}\, dt$ converge.

7.67 $\forall\, t \geq 0 : 0 < \sin e^{-t} < e^{-t} \Rightarrow \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \sin e^{-t}\, dt$ converge.

7.68 $\forall\, t \geq 1 : 0 < e^{-t} \ln t < \dfrac{6}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^{-t} \ln t\, dt$ converge.

7.69 1) $\lim\limits_{t \to 0+} t^t = 1 \Rightarrow \lim\limits_{t \to 0+} e^{-t} \ln t^t = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} e^{-t} \ln t^t\, dt$ converge.

2) $\forall\, t \geq 1 : 0 \leq e^{-t} \ln t^t < t^2\, e^{-t} < \dfrac{4!}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^{-t} \ln t^t\, dt < +\infty.$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} e^{-t} \ln t^t\, dt$ converge.

7.70 $\displaystyle\int_{4}^{+\infty} \frac{dt}{t \ln^2 t} = \left.\frac{-1}{\ln t}\right|_{4}^{+\infty} = \frac{1}{2 \ln 2}.$

7.71 $\forall\, t \geq 1 : 0 < \ln \left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right) < \dfrac{1}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$ converge.

7.72 1) $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{\sin t \ln t}{e^t + t} = \lim\limits_{t \to 0+} \left(\dfrac{\sin t}{t}\, \dfrac{t \ln t}{e^t + t} \right) = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{\sin t \ln t}{e^t + t}\, dt$ converge.

2) $\forall\, t \geq 1 : 0 \leq \left| \dfrac{\sin t \ln t}{e^t + t} \right| \leq t\, e^{-t} \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{1} \frac{\sin t \ln t}{e^t + t}\, dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t \ln t}{e^t + t}\, dt$ converge.

$\boxed{\mathbf{7.73}}$ Puisque $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{\ln t}}{\left(1+\frac{1}{\ln^2 t}\right)\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = 1\,,$

$$\exists\ \alpha > 1 \text{ tel que } \forall\, t \geq \alpha\ :\ \frac{1+\frac{1}{\ln t}}{\left(1+\frac{1}{\ln^2 t}\right)\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} > \frac{1}{2}\,.$$

Ainsi, pour tout $t \geq \alpha$: $\frac{1+\ln t}{(1+\ln^2 t)\sqrt{t^2+1}} > \frac{1}{2t\ln t}$. Par conséquent l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln t}{(1+\ln^2 t)\sqrt{t^2+1}}\,dt \text{ diverge.}$$

$\boxed{\mathbf{7.74}}$ $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t-\sin t}{t+\sin t} = 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t+\sin t}\,dt$ diverge.

$\boxed{\mathbf{7.75}}$ $\displaystyle\forall\, t > 1 : \left|\frac{\sqrt{t}\sin t}{t^2-1}\right| \leq \frac{\sqrt{t}}{t^2-1} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin t}{t^2-1}\,dt$ converge.

$\boxed{\mathbf{7.76}}$ $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t\frac{1}{t+\sqrt{t^2+5}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+\sqrt{t^2+5}}$ diverge.

$\boxed{\mathbf{7.77}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to0+} \sqrt{t}\,\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = 1 \Rightarrow \int_{0+}^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$ converge.

2) $\displaystyle\forall\, t \geq 1 : 0 < \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \leq e^{-t} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$ converge.

$\boxed{\mathbf{7.78}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to0+} \frac{t}{\sqrt{e^t-1}} = 0 \Rightarrow \int_{0+}^1 \frac{t}{\sqrt{e^t-1}}\,dt$ converge.

2) $\displaystyle\forall\, t \geq 1 : 0 < \frac{t}{\sqrt{e^t-1}} < \frac{\sqrt{6!}}{t^2} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{e^t-1}}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{e^t-1}}\,dt$ converge.

$\boxed{\mathbf{7.79}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to0+} \sqrt{t}\,\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} t}} = 1 \Rightarrow \int_{0+}^1 \frac{dt}{\sqrt{\operatorname{sh} t}}$ converge.

2) $\displaystyle\forall\, t \geq 1 : 0 < \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} t}} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^t-1}} < \frac{4\sqrt{3}}{t^2} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{\operatorname{sh} t}}$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{\operatorname{sh} t}}$ converge.

7.80 $\forall t \geq 1 : 0 < \left|\dfrac{\cos t^2}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t^2}{t^2}\, dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin t^2\, dt = -\frac{\cos t^2}{2t}\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t^2}{2t^2}\, dt$ converge.

7.81 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} t^{\frac{3}{4}} \frac{\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+t)} = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{2} \frac{\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+t)}\, dt$ converge.

2) $\forall t \geq 2 : \left|\dfrac{\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+t)}\right| < \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+t)}\, dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+t)}\, dt$ converge.

7.82 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{\sin(1-\operatorname{ch} t)}{t\operatorname{sh} t} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \int_{0+}^{1} \frac{\sin(1-\operatorname{ch} t)}{t\operatorname{sh} t}\, dt$ converge.

2) $\forall t \geq 1 : 0 < \left|\dfrac{\sin(1-\operatorname{ch} t)}{t\operatorname{sh} t}\right| < \dfrac{1}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(1-\operatorname{ch} t)}{t\operatorname{sh} t}\, dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin(1-\operatorname{ch} t)}{t\operatorname{sh} t}\, dt$ converge.

7.83 $\displaystyle\lim_{t\to 1+} (t-1)\frac{t^2+8}{t^4-t^2} = \frac{9}{2} \Rightarrow \int_{1+}^{+\infty} \frac{t^2+8}{t^4-t^2}\, dt$ diverge.

7.84 1) $\displaystyle\lim_{t\to 1+} \sqrt{t-1}\, \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t\sqrt{\ln t}} = \frac{\sin 1}{\operatorname{ch} 1} \Rightarrow \int_{1+}^{2} \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t\sqrt{\ln t}}\, dt$ converge.

2) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t\sqrt{\ln t}}\, dt$ converge (critère de Abel-Dirichlet).

D'où $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t\sqrt{\ln t}}\, dt$ converge.

7.85 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \sqrt{t}\, \frac{\sin t}{\sqrt{\operatorname{sh} t}} = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{1} \frac{\sin t}{\sqrt{\operatorname{sh} t}}\, dt$ converge.

2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{\operatorname{sh} t}}\, dt$ converge (critère de Abel-Dirichlet). D'où

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{\operatorname{sh} t}}\, dt \text{ converge.}$$

7.86 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \sqrt{t}\, \frac{\cos t}{\sqrt{e^t-1}} = 1 \Rightarrow \int_{0+}^{1} \frac{\cos t}{\sqrt{e^t-1}}\, dt$ converge.

2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{e^t-1}}\, dt$ converge (critère de Abel-Dirichlet).

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{e^t-1}}\, dt$ converge.

7.87 1) $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\ln(\operatorname{ch} t)}{\operatorname{sh} t}=0\Rightarrow\displaystyle\int_{0+}^{1}\frac{\ln(\operatorname{ch} t)}{\operatorname{sh} t}\,dt$ converge.

2) $\forall\, t\geq 1:\ \ln(\operatorname{ch} t)=\ln\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)<t$ et $\operatorname{sh} t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}>\dfrac{e^t-1}{2}>\dfrac{t^3}{12}$

$$\Rightarrow\forall\, t\geq 1:\ 0<\frac{\ln(\operatorname{ch} t)}{\operatorname{sh} t}<\frac{12}{t^2}\Rightarrow\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln(\operatorname{ch} t)}{\operatorname{sh} t}\,dt \text{ converge.}$$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{\ln(\operatorname{ch} t)}{\operatorname{sh} t}\,dt$ converge.

7.88 $\lim\limits_{t\to+\infty}t^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{Arctg} t^2\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\operatorname{Arctg}\dfrac{1}{t^2}}{\dfrac{1}{t^2}}=1$

$$\Rightarrow\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctg} t^2\right)dt \text{ converge.}$$

7.89 1) $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\operatorname{Arctg}^3 t}{t^3}\ln(\operatorname{ch} t)=0\Rightarrow\displaystyle\int_{0+}^{1}\frac{\operatorname{Arctg}^3 t}{t^3}\ln(\operatorname{ch} t)\,dt$ converge.

2) $\forall\, t\geq 1:\ \ln(\operatorname{ch} t)=\ln\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)<t$

$$\Rightarrow\forall\, t\geq 1:\ 0<\frac{\operatorname{Arctg}^3 t}{t^3}\ln(\operatorname{ch} t)<\frac{\pi^3}{8t^2}$$

$$\Rightarrow\int_{1}^{+\infty}\frac{\operatorname{Arctg}^3 t}{t^3}\ln(\operatorname{ch} t)\,dt \text{ converge.}$$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{\operatorname{Arctg}^3 t}{t^3}\ln(\operatorname{ch} t)\,dt$ converge.

7.90 1) $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\operatorname{Arctg}^3 t}{t\ln(\operatorname{ch} t)}=2\Rightarrow\displaystyle\int_{0+}^{1}\frac{\operatorname{Arctg}^3 t}{t\ln(\operatorname{ch} t)}\,dt$ converge.

2) $\forall\, t\geq 1:,\ln(\operatorname{ch} t)=\ln\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)>t-\ln 2$

$$\Rightarrow\forall\, t\geq 1:\ 0<\frac{\operatorname{Arctg}^3 t}{t\ln(\operatorname{ch} t)}<\frac{\pi^3}{8t(t-\ln 2)}\Rightarrow\int_{1}^{+\infty}\frac{\operatorname{Arctg}^3 t}{t\ln(\operatorname{ch} t)}\,dt \text{ converge.}$$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{\operatorname{Arctg}^3 t}{t\ln(\operatorname{ch} t)}\,dt$ converge.

7.91 1) $\lim\limits_{t\to 0+}\sqrt{t}\,\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{\ln(1+t)}}=1\Rightarrow\displaystyle\int_{0+}^{2}\frac{e^{-t}}{\sqrt{\ln(1+t)}}\,dt$ converge.

2) $\forall\, t\geq 2:0<\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{\ln(1+t)}}<e^{-t}\Rightarrow\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{\ln(1+t)}}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{\ln(1+t)}}\,dt$ converge.

7.92 1) $\lim\limits_{t\to 1+}\sqrt{t-1}\dfrac{1}{\sqrt{t^4-1}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\displaystyle\int_{1+}^{2}\frac{dt}{\sqrt{t^4-1}}$ converge.

2) $\lim\limits_{t\to+\infty}t^2\dfrac{1}{\sqrt{t^4-1}}=1\Rightarrow\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t^4-1}}$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t^4-1}}$ converge.

7.93 1) $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\sin t^2}{\ln(1+t)\operatorname{sh}t}=1\Rightarrow\displaystyle\int_{0+}^{2}\frac{\sin t^2}{\ln(1+t)\operatorname{sh}t}\,dt$ converge.

2) $\forall\,t\geq 2:0<\left|\dfrac{\sin t^2}{\ln(1+t)\operatorname{sh}t}\right|<\dfrac{1}{\operatorname{sh}t}\Rightarrow\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{\sin t^2}{\ln(1+t)\operatorname{sh}t}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{\sin t^2}{\ln(1+t)\operatorname{sh}t}\,dt$ converge.

7.94 $\forall\,t\geq 1:0<\left|\dfrac{\sin t^4}{t^3}\right|\leq\dfrac{1}{t^3}\Rightarrow\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{\sin t^4}{t^3}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}t\cos t^4\,dt=\frac{\sin t^4}{4t^2}\Big|_1^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty}\frac{\sin t^4}{t^3}\,dt$ converge.

7.95 1) $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{t\,e^{\sin t}}{\operatorname{Arctg}t+t^2\operatorname{ch}t}=1\Rightarrow\displaystyle\int_{0+}^{1}\frac{t\,e^{\sin t}}{\operatorname{Arctg}t+t^2\operatorname{ch}t}\,dt$ converge.

2) $\forall\,t\geq 1:\ 0<\dfrac{t\,e^{\sin t}}{\operatorname{Arctg}t+t^2\operatorname{ch}t}<\dfrac{e}{\operatorname{ch}t}\Rightarrow\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{t\,e^{\sin t}}{\operatorname{Arctg}t+t^2\operatorname{ch}t}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{t\,e^{\sin t}}{\operatorname{Arctg}t+t^2\operatorname{ch}t}\,dt$ converge.

7.96 1) $\lim\limits_{t\to 0+}\sqrt{t}\,\dfrac{\ln^3 t}{\operatorname{ch}^2 t}=0\Rightarrow\displaystyle\int_{0+}^{1}\frac{\ln^3 t}{\operatorname{ch}^2 t}\,dt$ converge.

2) $\forall\,t\geq 1:\ \operatorname{ch}t>\dfrac{e^t}{2}>\dfrac{t^3}{12}$

$\Rightarrow\forall\,t\geq 1:\ 0<\dfrac{\ln^3 t}{\operatorname{ch}^2 t}<\dfrac{144}{t^3}\Rightarrow\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln^3 t}{\operatorname{ch}^2 t}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{\ln^3 t}{\operatorname{ch}^2 t}\,dt$ converge.

7.97 1) $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\sqrt{\ln(2+t^2)}}{e^t-1}\sin t=\sqrt{\ln 2}\Rightarrow\displaystyle\int_{0+}^{2}\frac{\sqrt{\ln(2+t^2)}}{e^t-1}\sin t\,dt$ converge.

2) $\forall\,t\geq 2:\ \left|\dfrac{\sqrt{\ln(2+t^2)}}{e^t-1}\sin t\right|\leq\dfrac{t}{e^t-1}<\dfrac{3!}{t^2}$

$\Rightarrow\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{\sqrt{\ln(2+t^2)}}{e^t-1}\sin t\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{\sqrt{\ln(2+t^2)}}{e^t-1}\sin t\,dt$ converge.

$\boxed{\textbf{7.98}}$ 1) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = \lim\limits_{x\to 0+} e^{x\ln x} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 1+} \frac{1}{(\ln t)^{\ln t}} = 1 \Rightarrow \int_{1+}^{2} \frac{dt}{(\ln t)^{\ln t}} \text{ converge.}$$

2) $\forall\, s \geq e^2 : \left(\dfrac{e}{s}\right)^s \leq e^{-s} \Rightarrow \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{(\ln t)^{\ln t}} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \left(\frac{e}{s}\right)^s ds$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{dt}{(\ln t)^{\ln t}}$ converge.

$\boxed{\textbf{7.99}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{e^{-2t}\,\mathrm{sh}\, t}{\ln\left(1+\mathrm{th}\,\sqrt[3]{t}\right)} = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{1} \frac{e^{-2t}\,\mathrm{sh}\, t}{\ln\left(1+\mathrm{th}\,\sqrt[3]{t}\right)}\, dt$ converge.

2) $\forall\, t \geq 1 : \left|\dfrac{e^{-2t}\,\mathrm{sh}\, t}{\ln\left(1+\mathrm{th}\,\sqrt[3]{t}\right)}\right| < \dfrac{e^{-t}}{\ln(1+\mathrm{th}\, 1)} \Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-2t}\,\mathrm{sh}\, t}{\ln\left(1+\mathrm{th}\,\sqrt[3]{t}\right)}\, dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-2t}\,\mathrm{sh}\, t}{\ln\left(1+\mathrm{th}\,\sqrt[3]{t}\right)}\, dt$ converge.

$\boxed{\textbf{7.100}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{t^2\, e^{-t}}{t - e^{\cos t} + e} = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{1} \frac{t^2\, e^{-t}}{t - e^{\cos t} + e}\, dt$ converge.

2) $\forall\, t \geq 1 : 0 < \dfrac{t^2\, e^{-t}}{t - e^{\cos t} + e} \leq t\, e^{-t} < \dfrac{3!}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^2\, e^{-t}}{t - e^{\cos t} + e}\, dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{t^2\, e^{-t}}{t - e^{\cos t} + e}\, dt$ converge.

$\boxed{\textbf{7.101}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} t^{\frac{3}{4}} \frac{\ln t}{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}\, e^{-\,\mathrm{sh}\, t} = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{4} \frac{\ln t}{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}\, e^{-\,\mathrm{sh}\, t}\, dt$ converge.

2) $\forall\, t \geq 4 :\ 0 < \dfrac{\ln t}{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}\, e^{-\,\mathrm{sh}\, t} < t\, e^{-t} < \dfrac{3!}{t^2}$

$$\Rightarrow \int_4^{+\infty} \frac{\ln t}{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}\, e^{-\,\mathrm{sh}\, t}\, dt \text{ converge.}$$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln t}{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}\, e^{-\,\mathrm{sh}\, t}\, dt$ converge.

$\boxed{\textbf{7.102}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{t}\, e^{-\sqrt{t}} = 1 \Rightarrow \int_{0+}^{1} \frac{\sin t}{t}\, e^{-\sqrt{t}}\, dt$ converge.

2) $\forall\, t \geq 1 : \left|\dfrac{\sin t}{t}\, e^{-\sqrt{t}}\right| \leq e^{-\sqrt{t}} < \dfrac{4!}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-\sqrt{t}}\, dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-\sqrt{t}}\, dt$ converge.

$\boxed{\textbf{7.103}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+}\sqrt{t}\,\frac{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{\operatorname{th} t}\,e^{-t}=1 \Rightarrow \int_{0+}^{1}\frac{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{\operatorname{th} t}e^{-t}\,dt$ converge.

2) $\displaystyle\forall\, t\geq 1: 0<\frac{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{\operatorname{th} t}\,e^{-t}<\frac{t\,e^{-t}}{\operatorname{th} 1}<\frac{3!}{t^2\operatorname{th} 1}$

$\displaystyle\Rightarrow \int_{1}^{+\infty}\frac{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{\operatorname{th} t}\,e^{-t}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{\operatorname{th} t}\,e^{-t}\,dt$ converge.

$\boxed{\textbf{7.104}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 1+}\frac{\ln\sqrt{t}}{t^2-1}=\frac{1}{4}\Rightarrow \int_{1+}^{2}\frac{\ln\sqrt{t}}{t^2-1}\,dt$ converge.

2) $\displaystyle\forall\, t\geq 2: 0<\frac{\ln\sqrt{t}}{t^2-1}<\frac{\sqrt{t}}{t^2-1}\Rightarrow \int_{2}^{+\infty}\frac{\ln\sqrt{t}}{t^2-1}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty}\frac{\ln\sqrt{t}}{t^2-1}\,dt$ converge.

$\boxed{\textbf{7.105}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+}\sqrt{t}\,\frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-t^2}}=1\Rightarrow \int_{0+}^{\frac{1}{2}}\frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge.

2) $\displaystyle\lim_{t\to 1-}\sqrt{1-t}\,\frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-t^2}}=\frac{\sin 1}{\sqrt{2}}\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1-}\frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-}\frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge.

$\boxed{\textbf{7.106}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+}\frac{\sin t}{t\sqrt{1+t^2}}=1\Rightarrow \int_{0+}^{1}\frac{\sin t}{t\sqrt{1+t^2}}\,dt$ converge.

2) $\displaystyle\forall\, t\geq 1: \left|\frac{\sin t}{t\sqrt{1+t^2}}\right|\leq\frac{1}{t^2}\Rightarrow \int_{1}^{+\infty}\frac{\sin t}{t\sqrt{1+t^2}}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{\sin t}{t\sqrt{1+t^2}}\,dt$ converge.

$\boxed{\textbf{7.107}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+}\frac{1-\cos t^2}{t^4}=\frac{1}{2}\Rightarrow \int_{0+}^{1}\frac{1-\cos t^2}{t^4}\,dt$ converge.

2) $\displaystyle\forall\, t\geq 1: 0\leq\frac{1-\cos t^2}{t^4}\leq\frac{2}{t^4}\Rightarrow \int_{1}^{+\infty}\frac{1-\cos t^2}{t^4}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{1-\cos t^2}{t^4}\,dt$ converge.

$\boxed{\textbf{7.108}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+}\sqrt{t}\,\frac{e^{-t}}{\sqrt{\operatorname{Arctg} t}}=1\Rightarrow \int_{0+}^{1}\frac{e^{-t}}{\sqrt{\operatorname{Arctg} t}}\,dt$ converge.

2) $\displaystyle\forall\, t\geq 1: 0<\frac{e^{-t}}{\sqrt{\operatorname{Arctg} t}}\leq\frac{2e^{-t}}{\sqrt{\pi}}\Rightarrow \int_{1}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{\operatorname{Arctg} t}}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{\operatorname{Arctg} t}}\,dt$ converge.

$\boxed{\textbf{7.109}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{\ln(1+t)}\, e^{-\sqrt{t}} = 1 \Rightarrow \int_{0+}^{2} \frac{\sin t}{\ln(1+t)}\, e^{-\sqrt{t}}\, dt$ converge.

2) $\displaystyle\forall\, t \geq 2 : \ \left|\frac{\sin t}{\ln(1+t)}\, e^{-\sqrt{t}}\right| \leq e^{-\sqrt{t}} \leq \frac{4!}{t^2}$

$\displaystyle\Rightarrow \int_{2}^{+\infty} \frac{\sin t}{\ln(1+t)}\, e^{-\sqrt{t}}\, dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{\ln(1+t)}\, e^{-\sqrt{t}}\, dt$ converge.

$\boxed{\textbf{7.110}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{\ln(1-t)} = -1 \Rightarrow \int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin t}{\ln(1-t)}\, dt$ converge.

2) $\displaystyle\lim_{t\to 1-} \frac{\sin t}{\ln(1-t)} = 0 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{\sin t}{\ln(1-t)}\, dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\sin t}{\ln(1-t)}\, dt$ converge.

$\boxed{\textbf{7.111}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \sqrt{t}\, \frac{\ln t}{\ln(2-t)} = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln t}{\ln(2-t)}\, dt$ converge.

2) $\displaystyle\lim_{t\to 1-} \frac{\ln t}{\ln(2-t)} = -1 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{\ln t}{\ln(2-t)}\, dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\ln t}{\ln(2-t)}\, dt$ converge.

$\boxed{\textbf{7.112}}$ 1) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \sqrt{t}\, \frac{\ln t}{1+t^2} = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{1} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt$ converge.

2) $\displaystyle\forall\, t \geq 1 : 0 \leq \frac{\ln t}{1+t^2} = 2\frac{\ln \sqrt{t}}{1+t^2} < 2\frac{\sqrt{t}}{1+t^2} < \frac{2}{t^{\frac{3}{2}}}$

$\displaystyle\Rightarrow \int_{1}^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt$ converge.

$\boxed{\textbf{7.113}}$ Elle diverge car

$$\forall\, t \geq e : \frac{t \ln t}{1+t^2 \sin^4 t} \geq \frac{t}{1+t^2} \text{ et } \int_{e}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\, dt = +\infty\,.$$

$\boxed{\textbf{7.114}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \sqrt{t}\, \frac{\ln^4 t}{\left(1-t\right)^2} = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^4 t}{(1-t)^2}\, dt$ converge.

2) $\displaystyle\lim_{t\to 1-} \frac{\ln^4 t}{\left(1-t\right)^2} = 0 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{\ln^4 t}{(1-t)^2}\, dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\ln^4 t}{(1-t)^2}\, dt$ converge.

$\boxed{\mathbf{7.115}}$ 1) $\displaystyle\int_{0+}^{1} e^{-\sqrt{t}}\ln(\operatorname{sh} t)\,dt$ converge, car pour tout $t>0$:

$$\ln(\operatorname{sh} t)=\ln\left(\frac{\operatorname{sh} t}{t}\right)+\ln t\,.$$

2) $\forall\, t\geq 1:\ 0<e^{-\sqrt{t}}\ln(\operatorname{sh} t)<t\,e^{-\sqrt{t}}<\dfrac{6!}{t^2}\Rightarrow\displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\ln(\operatorname{sh} t)\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\ln(\operatorname{sh} t)\,dt$ converge.

$\boxed{\mathbf{7.116}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+}\sqrt{t}\,\frac{\operatorname{th}^2 t}{t^2\sqrt{\ln(1+t)}}=1\Rightarrow\int_{0+}^{2}\frac{\operatorname{th}^2 t}{t^2\sqrt{\ln(1+t)}}\,dt$ converge.

2) $\forall\, t\geq 2:0<\dfrac{\operatorname{th}^2 t}{t^2\sqrt{\ln(1+t)}}<\dfrac{1}{t^2}\Rightarrow\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{\operatorname{th}^2 t}{t^2\sqrt{\ln(1+t)}}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{\operatorname{th}^2 t}{t^2\sqrt{\ln(1+t)}}\,dt$ converge.

$\boxed{\mathbf{7.117}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+}\frac{t\,e^{-\operatorname{sh} t}}{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}\,\sin\frac{1}{t}=0\Rightarrow\int_{0+}^{4}\frac{t\,e^{-\operatorname{sh} t}}{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}\,\sin\frac{1}{t}\,dt$ converge.

2) $\forall\, t\geq 4:\left|\dfrac{t\,e^{-\operatorname{sh} t}}{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}\,\sin\dfrac{1}{t}\right|<t\,e^{-t}<\dfrac{3!}{t^2}$

$\Rightarrow\displaystyle\int_{4}^{+\infty}\frac{t\,e^{-\operatorname{sh} t}}{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}\,\sin\frac{1}{t}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{t\,e^{-\operatorname{sh} t}}{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}\,\sin\frac{1}{t}\,dt$ converge.

$\boxed{\mathbf{7.118}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+}\sqrt{t}\,\frac{e^{-t}\sin t}{\ln(1+t)\operatorname{Arctg}\sqrt{t}}=1$

$$\Rightarrow\int_{0+}^{2}\frac{e^{-t}\sin t}{\ln(1+t)\operatorname{Arctg}\sqrt{t}}\,dt\text{ converge.}$$

2) $\forall\, t\geq 2:\ \left|\dfrac{e^{-t}\sin t}{\ln(1+t)\operatorname{Arctg}\sqrt{t}}\right|<\dfrac{e^{-t}}{\operatorname{Arctg}\sqrt{2}}$

$\Rightarrow\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin t}{\ln(1+t)\operatorname{Arctg}\sqrt{t}}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin t}{\ln(1+t)\operatorname{Arctg}\sqrt{t}}\,dt$ converge.

$\boxed{\mathbf{7.119}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+}\frac{\sin t\ln(1+t)}{\operatorname{sh}\sqrt{t}\ \operatorname{Arctg}\sqrt{t^3}}$

$$=\lim_{t\to 0+}\left(\frac{\sin t}{t}\,\frac{\sqrt{t}}{\operatorname{sh}\sqrt{t}}\,\frac{\ln(1+t)}{t}\,\frac{\sqrt{t^3}}{\operatorname{Arctg}\sqrt{t^3}}\right)=1$$

$$\Rightarrow\int_{0+}^{1}\frac{\sin t\ln(1+t)}{\operatorname{sh}\sqrt{t}\ \operatorname{Arctg}\sqrt{t^3}}\,dt\text{ converge.}$$

2) *Rappels* : $\forall\, s > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$: $\operatorname{sh} s = \dfrac{e^s - e^{-s}}{2} > \dfrac{e^s - 1}{2} > \dfrac{s^k}{2\,k!}$;

$$\forall\, t \geq 1 : \left|\frac{\sin t \ln(1+t)}{\operatorname{sh}\sqrt{t}\ \operatorname{Arctg}\sqrt{t^3}}\right| \leq \frac{8\,6!}{\pi t^2} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin t \ln(1+t)}{\operatorname{sh}\sqrt{t}\ \operatorname{Arctg}\sqrt{t^3}}\,dt \text{ converge.}$$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t \ln(1+t)}{\operatorname{sh}\sqrt{t}\ \operatorname{Arctg}\sqrt{t^3}}\,dt$ converge.

7.120 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{\ln(\operatorname{tg} t)}{\ln t} = \lim_{t\to 0+} \frac{1+\operatorname{tg}^2 t}{\dfrac{\operatorname{tg} t}{t}} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0+} \sqrt{t}\,\cos t \ln(\operatorname{tg} t) = \lim_{t\to 0+} \cos t\left(\sqrt{t}\ln t\right)\frac{\ln(\operatorname{tg} t)}{\ln t} = 0$$

$$\Rightarrow \int_1^{0+} \cos t\ \ln(\operatorname{tg} t)\,dt \text{ converge.}$$

2) $\displaystyle\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-} \cos t \ln(\operatorname{tg} t) = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\ln(\operatorname{tg} t)}{\dfrac{1}{\cos t}} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\cos t}{\sin^2 t} = 0$

$$\Rightarrow \int_1^{\frac{\pi}{2}-} \cos t \ln(\operatorname{tg} t)\,dt \text{ converge.}$$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-} \cos t \ln(\operatorname{tg} t)\,dt$ converge.

7.121 1) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\sin t^2}{t\ln\sqrt{1+t}}\,e^{-\operatorname{sh} t} = 2 \Rightarrow \int_{0+}^{2} \frac{\sin t^2}{t\ln\sqrt{1+t}}\,e^{-\operatorname{sh} t}\,dt$ converge.

2) $\displaystyle\forall\, t \geq 2 : \left|\frac{\sin t^2}{t\ln\sqrt{1+t}}\,e^{-\operatorname{sh} t}\right| \leq e^{-\operatorname{sh} t} \leq e^{-t}$

$$\Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{\sin t^2}{t\ln\sqrt{1+t}}\,e^{-\operatorname{sh} t}\,dt \text{ converge.}$$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t^2}{t\ln\sqrt{1+t}}\,e^{-\operatorname{sh} t}\,dt$ converge.

7.122 1) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\sin t}{t(1+t\ln t)} = 1 \Rightarrow \int_{0+}^{3} \frac{\sin t}{t(1+t\ln t)}\,dt$ converge.

2) $\displaystyle\forall\, t \geq 3 : \left|\frac{\sin t}{t(1+t\ln t)}\right| < \frac{1}{t^2} \Rightarrow \int_3^{+\infty} \frac{\sin t}{t(1+t\ln t)}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{t(1+t\ln t)}\,dt$ converge.

7.123 1) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \sqrt{t}\frac{\big(1-\cos(\sin t)\big)\sin t}{\sqrt{t^3}} = \lim_{x\to 0+} \big(1-\cos(\sin t)\big)\frac{\sin t}{t} = 0$

$$\Rightarrow \int_{0+}^{1} \frac{\big(1-\cos(\sin t)\big)\sin t}{\sqrt{t^3}}\,dt \text{ converge.}$$

2) $\forall\, t \geq 1 : \left|\dfrac{\big(1-\cos(\sin t)\big)\sin t}{\sqrt{t^3}}\right| \leq \dfrac{2}{t^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\big(1-\cos(\sin t)\big)\sin t}{\sqrt{t^3}}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \dfrac{\big(1-\cos(\sin t)\big)\sin t}{\sqrt{t^3}}\,dt$ converge.

$\boxed{\textbf{7.124}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} t^{\frac{3}{4}} \dfrac{\ln t}{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)} = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{\frac{1}{2}} \dfrac{\ln t}{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)}\,dt$ converge.

2) $\displaystyle\lim_{t\to 1-} \dfrac{\ln t}{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)} = \lim_{t\to 1-} \dfrac{2}{\pi\sqrt{t}\cos\left(\pi\sqrt{t}\right)} = -\dfrac{2}{\pi}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1-} \dfrac{\ln t}{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \dfrac{\ln t}{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)}\,dt$ converge.

$\boxed{\textbf{7.125}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} t^t = \lim_{t\to 0+} e^{t\ln t} = 1$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{t\to 0+} \dfrac{\ln^2 t^t}{t^t} = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{3} \dfrac{\ln^2 t^t}{t^t}\,dt$ converge.

2) $\forall\, t \geq 3 : 0 < \dfrac{\ln^2 t^t}{t^t} = \dfrac{t^2\ln^2 t}{t^t} < \dfrac{4!}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_3^{+\infty} \dfrac{\ln^2 t^t}{t^t}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \dfrac{\ln^2 t^t}{t^t}\,dt$ converge.

$\boxed{\textbf{7.126}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \sqrt{t}\dfrac{\ln\left(1-\sqrt{t}\right)}{\ln(1-t)} = \lim_{t\to 0+} \dfrac{\ln\left(1-\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}\,\dfrac{t}{\ln(1-t)} = 1$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \dfrac{\ln\left(1-\sqrt{t}\right)}{\ln(1-t)}\,dt < +\infty.$

2) $\displaystyle\lim_{t\to 1-} \dfrac{\ln\left(1-\sqrt{t}\right)}{\ln(1-t)} = \lim_{t\to 1-} \dfrac{\dfrac{-1}{2\sqrt{t}\left(1-\sqrt{t}\right)}}{\dfrac{-1}{1-t}} = \dfrac{1}{2}\lim_{t\to 1-} \dfrac{1+\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = 1$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1-} \dfrac{\ln\left(1-\sqrt{t}\right)}{\ln(1-t)}\,dt < +\infty.$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \dfrac{\ln\left(1-\sqrt{t}\right)}{\ln\left(1-t\right)}\,dt < +\infty.$

$\boxed{\textbf{7.127}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \dfrac{\operatorname{Arctg} t}{\sqrt{\operatorname{sh} t}\,\ln\left(1+\sqrt{t}\right)} = \lim_{t\to 0+} \dfrac{\operatorname{Arctg} t}{t}\sqrt{\dfrac{t}{\operatorname{sh} t}}\,\dfrac{\sqrt{t}}{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)} = 1$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{4} \dfrac{\operatorname{Arctg} t}{\sqrt{\operatorname{sh} t}\,\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}\,dt$ converge.

2) *Rappel* : $\forall\, t > 0 : \operatorname{sh} t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} > \dfrac{e^t - 1}{2} > \dfrac{t^4}{48}$.

$$\forall\, t \geq 4\ : 0 < \frac{\operatorname{Arctg} t}{\sqrt{\operatorname{sh} t}\, \ln\left(1+\sqrt{t}\right)} < \frac{\pi}{2\sqrt{\operatorname{sh} t}} < \frac{2\sqrt{3}\pi}{t^2}$$

$$\Rightarrow \int_4^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} t}{\sqrt{\operatorname{sh} t}\, \ln\left(1+\sqrt{t}\right)}\, dt \text{ converge.}$$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} t}{\sqrt{\operatorname{sh} t}\, \ln\left(1+\sqrt{t}\right)}\, dt$ converge.

7.128 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{\operatorname{Arctg} t \ln \sqrt[t]{1+t}}{\operatorname{sh} t} = \lim_{t\to 0+} \frac{\operatorname{Arctg} t}{\operatorname{sh} t}\, \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

$$\Rightarrow \int_{0+}^{1} \frac{\operatorname{Arctg} t \ln \sqrt[t]{1+t}}{\operatorname{sh} t}\, dt \text{ converge.}$$

2) *Rappel* : $\forall\, t > 0 : \operatorname{sh} t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} > \dfrac{e^t - 1}{2} > \dfrac{t^2}{4}$.

$$\forall\, t \geq 1 : 0 < \frac{\operatorname{Arctg} t \ln \sqrt[t]{1+t}}{\operatorname{sh} t} < \frac{\pi}{2}\, \frac{4}{t^2}\, \frac{\ln(1+t)}{t} < \frac{2\pi}{t^2}$$

$$\Rightarrow \int_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} t \ln \sqrt[t]{1+t}}{\operatorname{sh} t}\, dt \text{ converge.}$$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} t \ln \sqrt[t]{1+t}}{\operatorname{sh} t}\, dt$ converge.

7.129 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{t}\, \ln\bigl(1+\sqrt{t}\bigr) \operatorname{sh}\sqrt{t}} = 0$

$$\Rightarrow \int_{0+}^{4} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{t}\, \ln\bigl(1+\sqrt{t}\bigr) \operatorname{sh}\sqrt{t}}\, dt \text{ converge.}$$

2) *Rappel* : $\forall\, s > 0 : \operatorname{sh} s = \dfrac{e^s - e^{-s}}{2} > \dfrac{e^s - 1}{2} > \dfrac{s^4}{48}$.

$$\forall\, t \geq 4 : \left| \frac{\sin^2 t}{\sqrt{t}\, \ln\bigl(1+\sqrt{t}\bigr) \operatorname{sh}\sqrt{t}} \right| \leq \frac{1}{\operatorname{sh}\sqrt{t}} < \frac{48}{t^2}$$

$$\Rightarrow \int_{4}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{t}\, \ln\bigl(1+\sqrt{t}\bigr) \operatorname{sh}\sqrt{t}}\, dt \text{ converge.}$$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{t}\, \ln\bigl(1+\sqrt{t}\bigr) \operatorname{sh}\sqrt{t}}\, dt$ converge.

$\boxed{\mathbf{7.130}}$ Puisque $\lim\limits_{t\to 0+} t^\alpha \frac{1}{t^\alpha} = 1$, on a $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow 0 < \alpha < 1$.

$\boxed{\mathbf{7.131}}$ Puisque $\lim\limits_{t\to +\infty} t^\alpha \frac{1}{t^\alpha} = 1$, on a $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

$\boxed{\mathbf{7.132}}$ $\displaystyle\lim_{t\to +\infty} t^{1-\alpha} \frac{t^\alpha}{1+t} = 1 \Rightarrow \int_{1}^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t}\,dt$ diverge pour tout $\alpha > 0$.

$\boxed{\mathbf{7.133}}$ $\displaystyle\lim_{t\to 0+} t^\alpha \ln t = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{1} t^\alpha \ln t\,dt$ converge pour tout $\alpha > 0$.

$\boxed{\mathbf{7.134}}$ 1) $0 < \alpha < 1$. $\displaystyle\lim_{t\to 0+} t^{\frac{\alpha+1}{2}} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{1} \frac{\ln t}{t^\alpha}\,dt$ converge.

2) $\alpha \geq 1$. $\forall\, t \in \left]0, \frac{1}{2}\right[: -\dfrac{\ln t}{t^\alpha} > \dfrac{\ln 2}{t^\alpha} \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{\ln t}{t^\alpha}\,dt$ diverge.

$\boxed{\mathbf{7.135}}$ 1) $0 < \alpha \leq 1$. $\forall\, t \geq 3 : \dfrac{\ln t}{t^\alpha} > \dfrac{1}{t^\alpha} \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha}\,dt$ diverge.

2) $\alpha > 1$. $\displaystyle\lim_{t\to +\infty} t^{\frac{\alpha+1}{2}} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0 \Rightarrow \int_{1}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha}\,dt$ converge.

$\boxed{\mathbf{7.136}}$ 1) Puisque $\displaystyle\lim_{t\to 1+} \big(t-1\big)^{\frac{\alpha}{2}-1} \frac{\ln t}{\sqrt{(t-1)^\alpha}}\, e^{-t} = \frac{1}{e}$, on a

$$\int_{1+}^{2} \frac{\ln t}{\sqrt{(t-1)^\alpha}}\, e^{-t}\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow 0 < \alpha < 4.$$

2) $\forall\, t \geq 2 :\ 0 < \dfrac{\ln t}{\sqrt{(t-1)^\alpha}}\, e^{-t} < t\, e^{-t} < \dfrac{3!}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{(t-1)^\alpha}}\, e^{-t}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{(t-1)^\alpha}}\, e^{-t}\,dt$ converge $\Leftrightarrow 0 < \alpha < 4$.

$\boxed{\mathbf{7.137}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{t\big(-\ln t\big)^\alpha} = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin t}{t\big(-\ln t\big)^\alpha}\,dt$ converge.

2) Puisque $\displaystyle\lim_{t\to 1-} (1-t)^\alpha \frac{\sin t}{t\big(-\ln t\big)^\alpha} = \sin 1$, on a

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{\sin t}{t\big(-\ln t\big)^\alpha}\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha < 1.$$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\sin t}{t\big(-\ln t\big)^\alpha}\,dt$ converge $\Leftrightarrow 0 < \alpha < 1$.

$\boxed{\mathbf{7.138}}$ Puisque $\lim\limits_{t\to 0+} t^{\alpha-1} \dfrac{\sin t}{t^\alpha} = 1$, on a $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$ converge $\Leftrightarrow 0 < \alpha < 2$.

7.139 1) Puisque $\lim\limits_{t\to 0+} t^{2\alpha-\frac{1}{2}}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t}\,\operatorname{sh}^{2\alpha} t} = 1$, on a

$$\int_{0+}^{1} \frac{\sin t}{\sqrt{t}\,\operatorname{sh}^{2\alpha} t}\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow 0 < \alpha < \frac{3}{4}\,.$$

2) Soit $\alpha > 0$ et posons $k = [\frac{1}{\alpha}] + 1$. Alors, pour tout $t \geq 1$:

$$\left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}\,\operatorname{sh}^{2\alpha} t}\right| < \frac{(2k!)^{2\alpha}}{\operatorname{sh}^{2\alpha} t} < \frac{(2k!)^{2\alpha}}{t^2} \Rightarrow \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}\,\operatorname{sh}^{2\alpha} t}\,dt \text{ converge.}$$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}\,\operatorname{sh}^{2\alpha} t}\,dt$ converge $\Leftrightarrow 0 < \alpha < \dfrac{3}{4}$.

7.140 1) Puisque $\lim\limits_{t\to 0+} t^{\frac{3}{4}-\alpha}\dfrac{t^\alpha}{\sqrt[4]{t^3(1-t)}} = 1$, on a $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{t^\alpha}{\sqrt[4]{t^3(1-t)}}\,dt$ converge.

2) Puisque $\lim\limits_{t\to 1-} \sqrt[4]{1-t}\,\dfrac{t^\alpha}{\sqrt[4]{t^3(1-t)}} = 1$, on a $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{t^\alpha}{\sqrt[4]{t^3(1-t)}}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{t^\alpha}{\sqrt[4]{t^3(1-t)}}\,dt$ converge pour tout $\alpha > 0$.

7.141 Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\frac{\alpha}{3}-1}\dfrac{1+t}{\sqrt[3]{1+t^\alpha}} = 1$, on a

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1+t}{\sqrt[3]{1+t^\alpha}}\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 6.$$

7.142 $0 < \alpha < 1$.

$$\lim_{t\to\alpha+} (t-\alpha)\frac{\sqrt[3]{1-t}}{\sqrt{t}(t-\alpha)} = \frac{\sqrt[3]{1-\alpha}}{\sqrt{\alpha}} \neq 0 \Rightarrow \int_{0+}^{1} \frac{\sqrt[3]{1-t}}{\sqrt{t}(t-\alpha)}\,dt \text{ diverge.}$$

$\alpha = 1$. 1) $\lim\limits_{t\to 0+} \sqrt{t}\,\dfrac{\sqrt[3]{1-t}}{\sqrt{t}(t-1)} = -1 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[3]{1-t}}{\sqrt{t}(t-1)}\,dt$ converge.

2) $\lim\limits_{t\to 1-} \big(1-t\big)^{\frac{2}{3}}\dfrac{\sqrt[3]{1-t}}{\sqrt{t}(t-1)} = -1 \Rightarrow \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{\sqrt[3]{1-t}}{\sqrt{t}(t-1)}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\sqrt[3]{1-t}}{\sqrt{t}(t-1)}\,dt$ converge.

$\alpha > 1$. $\lim\limits_{t\to 0+} \sqrt{t}\,\dfrac{\sqrt[3]{1-t}}{\sqrt{t}(t-\alpha)} = -\dfrac{1}{\alpha} \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{\sqrt[3]{1-t}}{\sqrt{t}(t-\alpha)}\,dt$ converge.

7.143 $\forall t \geq 1 : 0 < e^{-t}t^\alpha < \dfrac{([\alpha]+3)!}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{\infty} e^{-t}t^\alpha\,dt$ converge pour tout $\alpha > 0$.

7.144 1) Puisque $\lim\limits_{t\to 0+} t^\alpha \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} = 1$, on a $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt$ converge $\Leftrightarrow 0<\alpha<1$.

2) $\forall t \geq 1 : 0 < \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} \leq e^{-t} \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt$ converge $\Leftrightarrow 0<\alpha<1$.

7.145 Puisque $\lim\limits_{t\to \frac{\pi}{4}} \left(\dfrac{\pi}{4}-t\right)^\alpha \dfrac{1}{\left(\cos^2 t - \dfrac{1}{2}\right)^\alpha} = 1$, on a

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}-} \frac{dt}{\left(\cos^2 t - \dfrac{1}{2}\right)^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow 0<\alpha<1.$$

7.146 1) Puisque $\lim\limits_{t\to 0+} t^\alpha \dfrac{e^{-t^2}}{t^\alpha\left(2+\sin\sqrt{t}\right)} = \dfrac{1}{2}$, on a

$$\int_{0+}^{1} \frac{e^{-t^2}}{t^\alpha\left(2+\sin\sqrt{t}\right)}\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow 0<\alpha<1.$$

2) $\forall t \geq 1 : 0 < \dfrac{e^{-t^2}}{t^\alpha\left(2+\sin\sqrt{t}\right)} < \dfrac{1}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^\alpha\left(2+\sin\sqrt{t}\right)}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^\alpha\left(2+\sin\sqrt{t}\right)}\,dt$ converge $\Leftrightarrow 0<\alpha<1$.

7.147 1) Puisque $\lim\limits_{t\to 0+} t^\alpha \dfrac{e^{\sin t}}{t^\alpha\left(\sqrt{t}+\operatorname{ch}^2 t\right)} = 1$, on a

$$\int_{0+}^{1} \frac{e^{\sin t}}{t^\alpha\left(\sqrt{t}+\operatorname{ch}^2 t\right)}\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow 0<\alpha<1.$$

2) $\forall t \geq 1 : 0 < \dfrac{e^{\sin t}}{t^\alpha\left(\sqrt{t}+\operatorname{ch}^2 t\right)} < \dfrac{e}{\operatorname{ch}^2 t} \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t^\alpha\left(\sqrt{t}+\operatorname{ch}^2 t\right)}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t^\alpha\left(\sqrt{t}+\operatorname{ch}^2 t\right)}\,dt$ converge $\Leftrightarrow 0<\alpha<1$.

7.148 $\lim\limits_{t\to 0+} \sqrt{t}\left(\ln\dfrac{1}{t}\right)^\alpha = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^\alpha dt$ converge pour tout $\alpha>0$.

7.149 $\alpha = 1$. $\displaystyle\int_{3}^{+\infty} \frac{dt}{t\ln t\big(\ln(\ln t)\big)} = \ln\big(\ln(\ln t)\big)\Big|_{3}^{+\infty} = +\infty$ diverge.

$\alpha \neq 1$. $\displaystyle\int_{3}^{+\infty} \frac{dt}{t\ln t\big(\ln(\ln t)\big)^\alpha} = \frac{\big(\ln(\ln t)\big)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_{3}^{+\infty}$ converge $\Leftrightarrow \alpha>1$.

7.150 1) Puisque $\lim_{t\to 0+} t^\alpha \dfrac{e^{-\frac{\alpha}{1-t}}}{\sin^\alpha t} = e^{-\alpha}$, on a

$$\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-\frac{\alpha}{1-t}}}{\sin^\alpha t}\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow 0<\alpha<1.$$

2) $\lim_{t\to 1-} \dfrac{e^{-\frac{\alpha}{1-t}}}{\sin^\alpha t} = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{e^{-\frac{\alpha}{1-t}}}{\sin^\alpha t}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{e^{-\frac{\alpha}{1-t}}}{\sin^\alpha t}\,dt$ converge $\Leftrightarrow 0<\alpha<1$.

7.151 1) Puisque $\lim_{t\to 0+} t^\alpha \dfrac{e^{-\operatorname{sh} t}}{\operatorname{sh}^\alpha t} = 1$, on a

$$\int_{0+}^{1} \frac{e^{-\operatorname{sh} t}}{\operatorname{sh}^\alpha t}\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow 0<\alpha<1.$$

2) $\forall\, t\geq 1 : 0 < \dfrac{e^{-\operatorname{sh} t}}{\operatorname{sh}^\alpha t} < \dfrac{e^{-t}}{\operatorname{sh}^\alpha 1} \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{-\operatorname{sh} t}}{\operatorname{sh}^\alpha t}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-\operatorname{sh} t}}{\operatorname{sh}^\alpha t}\,dt$ converge $\Leftrightarrow 0<\alpha<1$.

7.152 1) $\lim_{t\to 0+} t^{2\alpha} \dfrac{t^\alpha \operatorname{ch}^{2\alpha} t}{\operatorname{sh}^{3\alpha} t} = 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{t^\alpha \operatorname{ch}^{2\alpha} t}{\operatorname{sh}^{3\alpha} t}\,dt < +\infty \Leftrightarrow 0<\alpha<\frac{1}{2}$.

2) Soit $\alpha>0$ et posons $k=[\frac{\alpha+2}{\alpha}]+1$. Alors, pour tout $t\geq 1$:

$$\begin{aligned}
&0 < \frac{t^\alpha \operatorname{ch}^{2\alpha} t}{\operatorname{sh}^{3\alpha} t} = \frac{t^\alpha}{\operatorname{th}^{2\alpha} t \operatorname{sh}^\alpha t} \leq \frac{t^\alpha}{(\operatorname{th} 1)^{2\alpha} \operatorname{sh}^\alpha t} < \frac{2^\alpha (k!)^\alpha}{(\operatorname{th} 1)^{2\alpha} t^2}\\
&\Rightarrow \int_{1}^{+\infty} \frac{t^\alpha \operatorname{ch}^{2\alpha} t}{\operatorname{sh}^{3\alpha} t}\,dt < +\infty\,.
\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{t^\alpha \operatorname{ch}^{2\alpha} t}{\operatorname{sh}^{3\alpha} t}\,dt < +\infty \Leftrightarrow 0<\alpha<\frac{1}{2}$.

7.153 $\forall\, t\geq 1 :\ 0 < \dfrac{t^\alpha e^{\sin t}}{\sqrt{t}+\operatorname{ch}^2 t} < 2\,e\dfrac{t^\alpha}{e^t} < \dfrac{2\,e\big([\alpha]+3\big)!}{t^2}$

$$\Rightarrow \int_{0}^{+\infty} \frac{t^\alpha e^{\sin t}}{\sqrt{t}+\operatorname{ch}^2 t}\,dt \text{ converge.}$$

7.154 $\forall\, t\geq 1 :\ 0 < \dfrac{t^{\alpha-1} e^{-t^2}}{2+\sin t} < t^{\alpha-1} e^{-t} < \dfrac{\big([\alpha]+2\big)!}{t^2}$

$$\Rightarrow \int_{0}^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1} e^{-t^2}}{2+\sin t}\,dt \text{ converge.}$$

$\boxed{\mathbf{7.155}}$ 1) Puisque $\lim\limits_{t\to 0+} t^{2\alpha-2}\dfrac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}} = 1$, on a

$$\int_{0+}^{1} \frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}}\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow 0 < \alpha < \frac{3}{2}\,.$$

2a) $\alpha > \frac{1}{2}$. $\forall\, t \geq 1 : 0 \leq \dfrac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}} \leq \dfrac{1}{t^{2\alpha}} \Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}}\,dt$ converge.

2b) $\alpha = \frac{1}{2}$. $\forall\, t \geq 1 : \dfrac{\sin^2 t}{t} = \dfrac{1-\cos 2t}{2t}$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t}\,dt$ converge (critère de Abel-Dirichlet)

$\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\,dt$ diverge.

2c) $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. $\forall\, t \geq 1 : \dfrac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}} \geq \dfrac{\sin^2 t}{t} \Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}}\,dt$ diverge.

Finalement, $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}}\,dt$ converge $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < \alpha < \dfrac{3}{2}\,.$

$\boxed{\mathbf{7.156}}$ 1) Puisque $\lim\limits_{t\to 1+} (t-1)^{\alpha-1}\dfrac{\operatorname{Arctg}(t-1)}{\left(t^2-1\right)^{\alpha}} = \dfrac{1}{2^{\alpha}}$, on a

$$\int_{0+}^{1} \frac{\operatorname{Arctg}(t-1)}{\left(t^2-1\right)^{\alpha}}\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow 0 < \alpha < 2.$$

2) Puisque $\lim\limits_{t\to +\infty} t^{2\alpha}\dfrac{\operatorname{Arctg}(t-1)}{\left(t^2-1\right)^{\alpha}} = \dfrac{\pi}{2}$, on a

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg}(t-1)}{\left(t^2-1\right)^{\alpha}}\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}\,.$$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg}(t-1)}{\left(t^2-1\right)^{\alpha}}\,dt$ converge $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < \alpha < 2.$

$\boxed{\mathbf{7.157}}$ 1) $\forall\, t \in \,]0,1] : \left|\sin \dfrac{1}{t^{\alpha}}\right| \leq 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} \sin\frac{1}{t^{\alpha}}\,dt$ converge.

2) Puisque $\lim\limits_{t\to +\infty} t^{\alpha}\sin\dfrac{1}{t^{\alpha}} = 1$, on a

$$\int_{1}^{+\infty} \sin\frac{1}{t^{\alpha}}\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \sin\frac{1}{t^{\alpha}}\,dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1.$

$\boxed{\textbf{7.158}}$ Converge pour tout $\alpha > 0$ car

$$\forall\, t \in]0,1] :\ \ln(\sin t^\alpha) = \ln\left(\frac{\sin t^\alpha}{t^\alpha}\right) + \alpha \ln t\,.$$

$\boxed{\textbf{7.159}}$ 1) Puisque $\lim\limits_{t\to 0+} t^{\alpha-1}\dfrac{\ln(1+\operatorname{Arctg} t)}{\operatorname{sh}^\alpha t} = 1$, on a

$$\int_{0+}^{1} \frac{\ln(1+\operatorname{Arctg} t)}{\operatorname{sh}^\alpha t}\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow 0<\alpha<2.$$

2) $\forall\, t \geq 1 :\ 0 < \dfrac{\ln(1+\operatorname{Arctg} t)}{\operatorname{sh}^\alpha t} < \dfrac{\operatorname{Arctg} t}{\operatorname{sh}^\alpha t} < \dfrac{2^{\alpha-1}\pi\Big(\Big(\Big[\dfrac{2}{\alpha}\Big]+1\Big)!\Big)^\alpha}{t^{\alpha\left(\left[\frac{2}{\alpha}\right]+1\right)}}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(1+\operatorname{Arctg} t)}{\operatorname{sh}^\alpha t}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln(1+\operatorname{Arctg} t)}{\operatorname{sh}^\alpha t}\,dt$ converge $\Leftrightarrow 0<\alpha<2$.

$\boxed{\textbf{7.160}}$ 1) Puisque $\lim\limits_{t\to 1+} (t-1)^{\alpha-1}\dfrac{\ln t}{(t-1)^\alpha}\, e^{-t} = \dfrac{1}{e}$, on a

$$\int_{1+}^{2} \frac{\ln t}{(t-1)^\alpha}\, e^{-t}\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow 0<\alpha<2.$$

2) $\forall\, t \geq 2 : 0 < \dfrac{\ln t}{(t-1)^\alpha}\, e^{-t} \leq t\, e^{-t} < \dfrac{3!}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\ln t}{(t-1)^\alpha}\, e^{-t}\,dt$ converge.

D'où, $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\ln t}{(t-1)^\alpha}\, e^{-t}\,dt$ converge pour tout $0<\alpha<2$.

$\boxed{\textbf{7.161}}$ $\lim\limits_{t\to+\infty} t\dfrac{1}{\ln^\alpha(1+t)} = +\infty \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{dt}{\ln^\alpha(1+t)}$ diverge.

$\boxed{\textbf{7.162}}$ 1) Puisque $\lim\limits_{t\to 0+} t^{-\alpha+2}\dfrac{\ln(1+t^\alpha)}{1+t-e^t} = -2$, on a

$$\int_{0+}^{1} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{1+t-e^t}\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha>1.$$

2) $\forall\, t \geq 1 :\ \left|\dfrac{\ln(1+t^\alpha)}{1+t-e^t}\right| < \dfrac{t^\alpha}{e^t-1-t} < \dfrac{\big([\alpha]+3\big)!}{t^2}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{1+t-e^t}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{1+t-e^t}\,dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha>1$.

$\boxed{\mathbf{7.163}}$ 1) $\alpha = 1$. Puisque pour tout entier $n > 1$:

$$\int_1^n \frac{t-[t]}{t}\,dt \geq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k+\frac{1}{4}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{t-[t]}{t}\,dt \geq \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4k+2} \text{ et } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k+2} = +\infty\,,$$

l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t-[t]}{t}\,dt$ diverge.

2) $0 < \alpha < 1$. $\forall\, t \geq 1 : \dfrac{t-[t]}{t^\alpha} \geq \dfrac{t-[t]}{t} \Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t-[t]}{t^\alpha}\,dt$ diverge.

3) $\alpha > 1$. $\forall\, t \geq 1 : \dfrac{t-[t]}{t^\alpha} \leq \dfrac{1}{t^\alpha} \Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t-[t]}{t^\alpha}\,dt$ converge.

$\boxed{\mathbf{7.164}}$ Puisque $\displaystyle\lim_{t\to 0+} t^\alpha \frac{1}{t^\alpha(1-t)^\beta} = 1$ et $\displaystyle\lim_{t\to 1-} (1-t)^\beta \frac{1}{t^\alpha\big(1-t\big)^\beta} = 1$, on a

$$\int_{0+}^{1-} \frac{dt}{t^\alpha(1-t)^\beta} \text{ converge } \Leftrightarrow 0 < \alpha, \beta < 1.$$

$\boxed{\mathbf{7.165}}$ 1) $\beta = 0$. $\forall\, t \geq 0 : 1 + \alpha\, e^{-t} > 1 \Rightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} (1+\alpha\, e^{-t})\,dt$ diverge pour tout $\alpha > 0$.

2) $\beta \neq 0$. $\forall\, t \geq 0 : 0 < \dfrac{1+\alpha\, e^{-t}}{1+\beta\, e^t} < \dfrac{1+\alpha}{\beta}\, e^{-t} \Rightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+\alpha\, e^{-t}}{1+\beta\, e^t}\,dt$ converge pour tout $\alpha > 0$.

$\boxed{\mathbf{7.166}}$ 1) Puisque $\displaystyle\lim_{t\to 1+} \big(t-1\big)^\alpha \frac{t^{\beta-2}}{\ln^\alpha t} = 1$, on a

$$\int_{1+}^{3} \frac{t^{\beta-2}}{\ln^\alpha t}\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow 0 < \alpha < 1 \text{ et } \beta > 0.$$

2a) $0 < \beta < 1$. $\forall\, t \geq 3 : 0 < \dfrac{t^{\beta-2}}{\ln^\alpha t} < t^{\beta-2} \Rightarrow \displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{t^{\beta-2}}{\ln^\alpha t}\,dt$ converge pour tout $\alpha > 0$.

2b) $\beta \geq 1$ et $0 < \alpha < 1$. $\forall\, t \geq 3 : \dfrac{t^{\beta-2}}{\ln^\alpha t} > \dfrac{1}{t\ln t} \Rightarrow \displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{t^{\beta-2}}{\ln^\alpha t}\,dt$ diverge.

En résumé, $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{t^{\beta-2}}{\ln^\alpha t}\,dt$ converge $\Leftrightarrow 0 < \alpha,\ \beta < 1$.

$\boxed{\mathbf{7.167}}$ 1) Puisque $\displaystyle\lim_{t\to 0+} t^\beta \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} = 1$, on a

$$\int_{0+}^{1} \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 0 \text{ et } 0 < \beta < 1.$$

2) $\forall\, t \geq 1 : (1+t)^\alpha - t^\alpha = t^\alpha\left(\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^\alpha - 1\right) = t^{\alpha-1}\left(\alpha + t\mathcal{R}_1\left(\dfrac{1}{t}\right)\right)$ avec

$$\lim_{t\to+\infty} t\mathcal{R}_1\left(\frac{1}{t}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} t^{\beta-\alpha+1}\frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} = \alpha.$$

Par conséquent $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}\, dt$ converge $\Leftrightarrow \beta > \alpha > 0$.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}\, dt$ converge $\Leftrightarrow 0 < \alpha < \beta < 1$.

7.168 1) Puisque $\displaystyle\lim_{t\to 1+} (t-1)^{\alpha-1} \frac{\ln t}{t^\beta \big(t-1\big)^\alpha} = 1$, on a

$$\int_{1+}^{2} \frac{\ln t}{t^\beta (t-1)^\alpha}\, dt \text{ converge } \Leftrightarrow 0 < \alpha < 2 \text{ et } \beta > 0.$$

2a) $0 < \alpha + \beta \leq 1$. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{\alpha+\beta} \frac{\ln t}{t^\beta (t-1)^\alpha} = +\infty \Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\beta \big(t-1\big)^\alpha}\, dt$ diverge.

2b) $\alpha + \beta > 1$. Posons $\mu = \frac{\alpha+\beta-1}{2} > 0$. Alors,

$$\gamma = \alpha + \beta - \mu > 1 \text{ et } \lim_{t\to+\infty} t^\gamma \frac{\ln t}{t^\beta (t-1)^\alpha} = 0\ ;$$

ce qui entraîne que $\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\beta (t-1)^\alpha}\, dt$ converge.

En résumé, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\beta (t-1)^\alpha}\, dt$ converge $\Leftrightarrow 0 < \alpha < 2$ et $\alpha + \beta > 1$.

7.169 Puisque

$$\lim_{t\to -1+} \big(1+t\big)^{\frac{\beta}{2}} \frac{|t|^\alpha \cos t}{\big(\sqrt{1-t^2}\big)^\beta} = \lim_{t\to 1-} \big(1-t\big)^{\frac{\beta}{2}} \frac{|t|^\alpha \cos t}{\big(\sqrt{1-t^2}\big)^\beta} = \frac{\cos 1}{2^{\frac{\beta}{2}}},$$

on a $\displaystyle\int_{-1+}^{1+} \frac{|t|^\alpha \cos t}{\big(\sqrt{1-t^2}\big)^\beta}\, dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 0$ et $0 < \beta < 2$.

7.170 1) Puisque $\displaystyle\lim_{t\to -1+} (1+t)^\beta \frac{|t|^\alpha}{(1+t)^\beta} = 1$, on a

$$\int_{-1+}^{0} \frac{|t|^\alpha}{(1+t)^\beta}\, dt \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 0 \text{ et } < \beta < 1.$$

2) Puisque $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{\beta-\alpha} \frac{|t|^\alpha}{\big(1+t\big)^\beta} = 1$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{|t|^\alpha}{(1+t)^\beta}\, dt \text{ converge } \Leftrightarrow \beta > 1 + \alpha.$$

D'où $\displaystyle\int_{-1+}^{+\infty} \frac{|t|^\alpha}{(1+t)^\beta}\, dt$ diverge.

$\boxed{\textbf{7.171}}$ 1) Puisque $\lim\limits_{t\to 0+} t^{2\alpha}\dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{2\alpha}\left(1+t^3\right)^{\beta}} = 1$, on a

$$\int_{0+}^{1} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{2\alpha}\left(1+t^3\right)^{\beta}}\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow 0<\alpha<\frac{1}{2} \text{ et } \beta>0.$$

2) $\forall\, t\geq 1 : 0 < \dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{2\alpha}\left(1+t^3\right)^{\beta}} < e^{-\sqrt{t}} < \dfrac{4!}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{2\alpha}\left(1+t^3\right)^{\beta}}\,dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{2\alpha}\left(1+t^3\right)^{\beta}}\,dt$ converge $\Leftrightarrow 0<\alpha<\dfrac{1}{2}$ et $\beta>0$.

$\boxed{\textbf{7.172}}$ 1) Puisque $\lim\limits_{t\to 0+} t^{\alpha-1}\dfrac{\operatorname{Arctg} t}{t^{\alpha}\left(1+\sqrt{t}\right)^{\beta}} = 1$, on a

$$\int_{0+}^{1} \frac{\operatorname{Arctg} t}{t^{\alpha}\left(1+\sqrt{t}\right)^{\beta}}\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow 0<\alpha<2 \text{ et } \beta>0\,.$$

2) Puisque $\lim\limits_{t\to +\infty} t^{\alpha+\frac{\beta}{2}}\dfrac{\operatorname{Arctg} t}{t^{\alpha}\left(1+\sqrt{t}\right)^{\beta}} = \dfrac{\pi}{2}$, on a

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} t}{t^{\alpha}\left(1+\sqrt{t}\right)^{\beta}}\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha+\frac{\beta}{2}>1.$$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} t}{t^{\alpha}\left(1+\sqrt{t}\right)^{\beta}}\,dt$ converge $\Leftrightarrow 0<\alpha<2$ et $\alpha+\dfrac{\beta}{2}>1$.

$\boxed{\textbf{7.173}}$ $\forall\, t\geq 0 : \dfrac{e^{(1+\alpha)t}}{e^t+\beta\, e^{-t}} > \dfrac{e^t}{e^t+\beta\, e^{-t}} = \dfrac{1}{1+\beta\, e^{-2t}}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{1+\beta\, e^{-2t}} = 1$

$$\Rightarrow \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{(1+\alpha)t}}{e^t+\beta\, e^{-t}}\,dt \text{ diverge pour tout } \alpha,\beta>0.$$

$\boxed{\textbf{7.174}}$ $\forall\, t>0 : |e^{-\alpha t}\cos\beta t| \leq e^{-\alpha t} \Rightarrow \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t}\cos\beta t\,dt$ converge pour tout $\alpha,\beta>0$.

$\boxed{\textbf{7.175}}$ En faisant le changement de variable $s=t^{\alpha}$, on obtient pour $x\in\,]1,+\infty[$:

$$\int_{1}^{x} t^{\beta}\sin t^{\alpha}\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_{1}^{x^{\alpha}} s^{\gamma}\sin s\,ds \text{ où } \gamma=\tfrac{\beta+1}{\alpha}-1.$$

1) $-1<\gamma<0$. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} s^{\gamma}\sin s\,ds$ converge (critère de Abel-Dirichlet). D'où

$$\begin{aligned}\int_{1}^{+\infty} t^{\beta}\sin t^{\alpha}\,dt &= \lim_{x\to+\infty}\int_{1}^{x} t^{\beta}\sin t^{\alpha}\,dt\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha}\int_{1}^{x^{\alpha}} s^{\gamma}\sin s\,ds = \frac{1}{\alpha}\int_{1}^{+\infty} s^{\gamma}\sin s\,ds.\end{aligned}$$

2) $\gamma = 0$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x t^\beta \sin t^\alpha \, dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha} \int_1^{x^\alpha} \sin s \, ds$

$$= \frac{-1}{\alpha} \lim_{x\to+\infty} (\cos x^\alpha - \cos 1) \text{ n'existe pas } \Rightarrow \int_1^{+\infty} t^\beta \sin t^\alpha \, dt \text{ diverge.}$$

3) $\gamma > 0$. Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^{x^\alpha} s^\gamma \sin s \, ds$ n'existe pas. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que cette limite existe. Alors, en posant $f(x) = \int_1^{x^\alpha} s^\gamma \sin s \, ds$ pour $x > 1$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. Ainsi, il existe $a > 1$ tel que pour tout $x \geq a$: $\left|f(x) - \ell\right| \leq 1$. Par conséquent pour tout $u, v \geq a$:

$$\left|f(u) - f(v)\right| \leq \left|f(u) - \ell\right| + \left|f(v) - \ell\right| \leq 2\ ;$$

ce qui entraîne que pour tout entier $k \geq [a^\alpha] + 1$:

$$2 \geq \left| f\left(\sqrt[\alpha]{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \right) - f\left(\sqrt[\alpha]{\frac{\pi}{6} + 2k\pi} \right) \right| = \int_{\frac{\pi}{6}+2k\pi}^{\frac{\pi}{2}+2k\pi} s^\gamma \sin s \, ds$$
$$\geq \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}+2k\pi}^{\frac{\pi}{2}+2k\pi} s^\gamma \, ds \geq \frac{\pi}{6} \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)^\gamma.$$

Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)^\gamma = +\infty$, ce résultat est impossible. D'où contradiction. L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} t^\beta \sin t^\alpha \, dt$ est donc divergente.

7.176 Puisque

$$\lim_{t\to0+} t^\alpha \frac{1}{\sin^\alpha t \sqrt{\left(1 - t^2\right)^\beta}} = 1 \text{ et } \lim_{t\to1-} \left(1 - t\right)^{\frac{\beta}{2}} \frac{1}{\sin^\alpha t \sqrt{\left(1 - t^2\right)^\beta}} = \frac{1}{2^{\frac{\beta}{2}} \sin^\alpha 1},$$

on a $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{1}{\sin^\alpha t \sqrt{\left(1 - t^2\right)^\beta}} \, dt$ converge $\Leftrightarrow 0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta < 2$.

7.177 1) Puisque $\displaystyle\lim_{t\to2+} \left(t - 2\right)^{\alpha\beta} \frac{e^{-t}}{\left(t^2 - 4\right)^{\alpha\beta}} = \frac{e^{-2}}{4^{\alpha\beta}}$, on a

$$\int_{2+}^{3} \frac{e^{-t}}{\left(t^2 - 4\right)^{\alpha\beta}} \, dt \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha\beta < 1.$$

2) Puisque $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{2\alpha\beta} \frac{1}{\left(t^2 - 4\right)^{\alpha\beta}} = 1$, on a

$$\int_{2+}^{3} \frac{e^{-t}}{\left(t^2 - 4\right)^{\alpha\beta}} \, dt \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha\beta > \frac{1}{2}.$$

D'où $\displaystyle\int_{2+}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\left(t^2 - 4\right)^{\alpha\beta}} \, dt$ converge $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < \alpha\beta < 1$.

$\boxed{\mathbf{7.178}}$ 1a) $\alpha \geq \beta$. Puisque

$$\lim_{t\to 0+} t^{\beta}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{\alpha}+\operatorname{th}^{\beta} t} = \lim_{t\to 0+} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{\alpha-\beta}+\left(\dfrac{\operatorname{th} t}{t}\right)^{\beta}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } \alpha=\beta \\ 1 & \text{si } \alpha\neq\beta, \end{cases}$$

on a $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{\alpha}+\operatorname{th}^{\beta} t}\,dt$ converge $\Leftrightarrow 0<\beta<1$.

1b) $\beta>\alpha$. Puisque $\displaystyle\lim_{t\to 0+} t^{\alpha}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{\alpha}+\operatorname{th}^{\beta} t} = \lim_{t\to 0+} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{1+t^{\beta-\alpha}\left(\dfrac{\operatorname{th} t}{t}\right)^{\beta}} = 1$,

on a $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{\alpha}+\operatorname{th}^{\beta} t}\,dt$ converge $\Leftrightarrow 0<\alpha<1$.

2) $\forall\, t\geq 1 : 0 < \dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{\alpha}+\operatorname{th}^{\beta} t} < e^{-\sqrt{t}} < \dfrac{4!}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{\alpha}+\operatorname{th}^{\beta} t}\,dt$ converge pour tout $\alpha,\beta>0$.

En résumé, $\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{\alpha}+\operatorname{th}^{\beta} t}\,dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha\geq\beta$ et $0<\beta<1$ ou $0<\alpha<1$ et $\beta>\alpha$.

$\boxed{\mathbf{7.179}}$ 1) Puisque $\displaystyle\lim_{t\to 1+} (t-1)^{\beta}\frac{1}{t^{\alpha}\ln^{\beta} t} = 1$, on a

$$\int_{1+}^{3} \frac{dt}{t^{\alpha}\ln^{\beta} t} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha>0 \text{ et } 0<\beta<1.$$

2a) $0<\alpha<1$ et $\beta>0$. En constatant que $\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{1-\alpha}}{\ln^{\beta} t} = +\infty$, il existe $a>3$ tel que pour tout $t>a$: $\frac{t^{1-\alpha}}{\ln^{\beta} t} > 1$. Par conséquent pour tout $t>a$:

$$\frac{1}{t^{\alpha}\ln^{\beta} t} = \frac{t^{1-\alpha}}{t\ln^{\beta} t} > \frac{1}{t}\ ;$$

ce qui entraîne que $\displaystyle\int_{3}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}\ln^{\beta} t}$ diverge.

2b) $\alpha=1$. Puisque pour tout $x>3$: $\displaystyle\int_{3}^{x} \frac{dt}{t\ln^{\beta} t} = \int_{\ln 3}^{\ln x} \frac{ds}{s^{\beta}}$, on a

$$\int_{3}^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^{\beta} t} \text{ converge } \Leftrightarrow \beta>1.$$

2c) $\alpha>1$. $\forall\, t\geq 3 : 0 < \dfrac{1}{t^{\alpha}\ln^{\beta} t} < \dfrac{1}{t^{\alpha}} \Rightarrow \displaystyle\int_{3}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}\ln^{\beta} t}$ converge pour tout $\beta>0$.

En résumé, $\int_{1+}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}\ln^{\beta} t}$ converge $\Leftrightarrow \alpha>1$ et $0<\beta<1$.

7.180 $\lim_{t\to 0+} t^\alpha \ln^\beta \frac{1}{t} = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{1} t^\alpha \ln^\beta \frac{1}{t}\, dt$ converge pour tout $\alpha, \beta > 0$.

7.181 $\forall\, t \geq 2 :\ 0 < \dfrac{t^\alpha \ln^\beta t}{e^t} < \dfrac{t^{\alpha+\beta}}{e^t} < \dfrac{\big([\alpha+\beta]+3\big)!}{t^2}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{t^\alpha \ln^\beta t}{e^t}\, dt$ converge pour tout $\alpha, \beta > 0$.

7.182 $\lim_{t\to 1+} \big(t-1\big)^{1-\alpha} \dfrac{\ln^\alpha t}{e^{\beta t}(t-1)} = \dfrac{1}{e^\beta}$ et

$\forall\, t \geq 2 :\ 0 < \dfrac{\ln^\alpha t}{e^{\beta t}(t-1)} < \dfrac{t^\alpha}{e^{\beta t}} < \dfrac{\big([\alpha]+3\big)!}{\beta^{[\alpha]+3} t^2}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\ln^\alpha t}{e^{\beta t}(t-1)}\, dt$ converge pour tout $\alpha, \beta > 0$.

7.183 1) $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 0$. Puisque $\lim_{t\to 0+} t^\alpha \dfrac{1}{t^\alpha \ln^\beta \frac{1}{t}} = 0$, l'intégrale généralisée $\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta \frac{1}{t}}$ converge.

2) $\alpha = 1$. En constatant que pour $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$: $\displaystyle\int_x^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t \ln^\beta \frac{1}{t}} = \int_{\ln 2}^{-\ln x} \frac{ds}{s^\beta}$, on a

$$\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta \frac{1}{t}} \quad \text{converge} \ \Leftrightarrow \beta > 1\,.$$

3) $\alpha > 1$ et $\beta > 0$. Puisque $\lim_{t\to 0+} \frac{1}{t^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{1}{t}} = +\infty$, il existe $0 < a < \frac{1}{2}$ tel que pour tout $t \in]0, a[$: $\frac{1}{t^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{1}{t}} > 1$. Par conséquent pour tout $0 < t < a$:

$$\frac{1}{t^\alpha \ln^\beta \frac{1}{t}} = \frac{1}{t} \frac{1}{t^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{1}{t}} > \frac{1}{t}\ ;$$

ce qui entraîne que l'intégrale généralisée $\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta \frac{1}{t}}$ diverge.

7.184 $\lim_{t\to 0+} \left(\dfrac{\sin t^n}{\ln t^n}\right)^n = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} \left(\frac{\sin t^n}{\ln t^n}\right)^n dt$ converge pour tout $n > 0$.

7.185 $\lim_{t\to 1+} \big(t-1\big)^n \dfrac{2-t}{\big(-t^2+3t-2\big)^n} = 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{1+}^{2-} \frac{2-t}{\big(-t^2+3t-2\big)^n}\, dt$ diverge pour tout $n > 0$.

7.186 1) $\lim_{t\to 1+} \dfrac{e^{-\sin t} \ln^n t}{\big(t-1\big)^n} = e^{-\sin 1} \Rightarrow \displaystyle\int_{1+}^{3} \frac{e^{-\sin t} \ln^n t}{\big(t-1\big)^n}\, dt$ converge pour tout $n > 0$.

2a) $n = 1$. $\forall\, t \geq 3$: $\dfrac{e^{-\sin t} \ln t}{t-1} > e^{-1} \dfrac{\ln t}{t} \Rightarrow \displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{e^{-\sin t} \ln t}{t-1}\, dt$ diverge.

2b) $n>1$. $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{n-\frac{1}{2}}\dfrac{e^{-\sin t}\ln^n t}{(t-1)^n}=0 \Rightarrow \displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{e^{-\sin t}\ln t}{t-1}\,dt$ converge.

En résumé, $\int_{1+}^{+\infty}\frac{e^{-\sin t}\ln^n t}{(t-1)^n}\,dt$ converge $\Leftrightarrow n>1$.

$\boxed{\textbf{7.187}}$ 1) $\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{\big(t^n-[t^n]\big)^n}{\ln(e^{t^n}-1)}=0 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1}\frac{\big(t^n-[t^n]\big)^n}{\ln(e^{t^n}-1)}\,dt$ converge pour tout $n>0$.

2a) $n=1$. $\forall\, t>1:\ \dfrac{t-[t]}{\ln(e^t-1)}>\dfrac{t-[t]}{t}\Rightarrow\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{t-[t]}{\ln(e^t-1)}\,dt$ diverge (ex. 7.163).

2b) $n>1$. $\forall\, t>1:\ 0<\dfrac{\big(t^n-[t^n]\big)^n}{\ln(e^{t^n}-1)}\le\dfrac{1}{\ln(e^{t^n}-1)}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}t^n\dfrac{1}{\ln(e^{t^n}-1)}=1$

$$\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{\big(t^n-[t^n]\big)^n}{\ln(e^{t^n}-1)}\,dt \text{ converge.}$$

En résumé, $\int_{0+}^{+\infty}\frac{\left(t^n-[t^n]\right)^n}{\ln(e^{t^n}-1)}\,dt$ converge $\Leftrightarrow n>1$.

$\boxed{\textbf{7.188}}$ Puisque $\forall\, x>1$: $\displaystyle\int_{1+}^{x-}\frac{dt}{\sqrt{(t-1)(x-t)}}=\operatorname{Arcsin}\frac{t-\frac{x+1}{2}}{\frac{x-1}{2}}\Bigg|_{1+}^{x-}=\pi,$

on a $\dfrac{\pi}{\sqrt{x}}\le\displaystyle\int_{1+}^{x-}\frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(x-t)}}\le\pi$. D'où $\lim\limits_{x\to1+}\displaystyle\int_{1+}^{x-}\frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(x-t)}}=\pi$.

$\boxed{\textbf{7.189}}$ Pour commencer, on constate que l'intégrale généralisée $\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-}\ln(\operatorname{tg} t)\,dt$ converge. En effet,

$$\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-}\ln(\operatorname{tg} t)\,dt=\int_{0+}^{+\infty}\frac{\ln s}{1+s^2}\,ds$$

et cette dernière converge, car $\lim\limits_{s\to0+}\sqrt{s}\,\frac{\ln s}{1+s^2}=0$ et pour tout $s\ge1$:

$$0\le\frac{\ln s}{1+s^2}=\frac{2\ln\sqrt{s}}{1+s^2}<\frac{2}{s^{\frac{3}{2}}}.$$

Ainsi, puisque pour tout $x\in\,]0,1[$: $e^{\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-}\ln(x\operatorname{tg} t)\,dt}=x^{\frac{\pi}{2}}e^{\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-}\ln(\operatorname{tg} t)\,dt}$, on a $\lim\limits_{x\to0+}e^{\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-}\ln(x\operatorname{tg} t)\,dt}=0$.

$\boxed{\textbf{7.190}}$ Puisque pour tout $x\in\,]0,1[$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{t}{\sin x}}}{1+t^2}\,dt&=\int_0^{\sin x}\frac{e^{-\frac{t}{\sin x}}}{1+t^2}\,dt+\int_{\sin x}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{t}{\sin x}}}{1+t^2}\,dt\\&<\sin x+\int_{\sin x}^{+\infty}\frac{2\sin^2 x}{t^2}\,dt=3\sin x,\end{aligned}$$

on a $\lim\limits_{x\to0+}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{t}{\sin x}}}{1+t^2}\,dt=0$.

7.191 Puisque pour tout $|x| \in]0,1[$ et $t \in]0,1[$: $\left|\frac{t\ln t}{t^2+x^2}\right| \leq \frac{-\ln t}{x^2}$, on obtient que pour tout $|x| \in]0,1[$:

$$\left|x^3 \int_{0+}^{1} \frac{t\ln t}{t^2+x^2}\,dt\right| \leq |x| t(1-\ln t)\Big|_{0+}^{1} = |x|.$$

Par conséquent $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{t\ln t}{t^2+x^2}\,dt = 0$.

7.192 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^{x^2} e^{-\frac{t^2}{x^2}}\,dt = \lim\limits_{x\to 0} \int_0^{x} e^{-s^2}\,ds = 0.$

7.193 $\forall\, x \neq 0$:

$$x^2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2 t}\,dt = -e^{-x^2 t}\Big|_0^{+\infty} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} x^2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2 t}\,dt = 1.$$

7.194 $$\begin{aligned}\forall\, x > 0 : \int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\,dt &= -\frac{1}{x}e^{-xt}\sin t\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos t\,dt \\ &= -\frac{1}{x^2}e^{-xt}\cos t\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\,dt \\ \Rightarrow \forall\, x > 0 : \int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\,dt &= \frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{x\to 0+} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\,dt = 1$.

7.195 En remarquant que pour tout $0 < t < 1$: $0 < \frac{t^n}{\sqrt{t(1-t)}} \leq \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$, l'intégrale généralisée $\int_{0+}^{1-} \frac{t^n}{\sqrt{t(1-t)}}\,dt$ converge pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'une part, puisque

$$\lim_{x\to 1-} \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}\,,$$

il existe $a \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ tel que

$$\int_a^{1-} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \left|\int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} - \int_{\frac{1}{2}}^{a} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

D'autre part, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geq n_\varepsilon$:

$$0 < a^n \leq \frac{\varepsilon}{2}\left(\int_{0+}^{a} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}\right)^{-1}.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq n_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}\int_{0+}^{1-} \frac{t^n}{\sqrt{t(1-t)}}\,dt &\leq \int_{0+}^{a} \frac{t^n}{\sqrt{t(1-t)}}\,dt + \int_{a}^{1-} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}\\ &\leq a^n \int_{0+}^{a} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{0+}^{1-} \frac{t^n}{\sqrt{t(1-t)}}\,dt = 0.$

$\boxed{\textbf{7.196}}$ 1) D'après le critère de Abel-Dirichlet, l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge.

2) Non. En effet, pour tout entier $n > 2$:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt &> \int_1^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt > \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt\\ &> \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\,dt = \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k\pi}.\end{aligned}$$

et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ (la série harmonique diverge).

$\boxed{\textbf{7.197}}$ 1) $\forall\, t \geq 1 : \displaystyle\left|\frac{\cos t^4}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos t^4}{t^2}\,dt$ converge

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} t^2 \sin t^4\,dt = -\frac{\cos t^4}{4t}\Big|_1^{+\infty} - \frac{1}{4}\int_1^{+\infty} \frac{\cos t^4}{t^2}\,dt$ converge.

2) Non. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons qu'elle converge. Alors, pour tout entier $n > 0$:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} |t^2 \sin t^4|\,dt &> \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k = \sqrt[4]{\frac{\pi}{6}+2k\pi}}^{b_k = \sqrt[4]{\frac{\pi}{2}+2k\pi}} t^2 \sin t^4\,dt > \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} t^2\,dt\\ &> \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2(b_k - a_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2\,(b_k^4 - a_k^4)}{b_k^3 + a_k b_k^2 + a_k^2 b_k + a_k^3}\\ &> \frac{\pi}{24}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{b_k^3} > \frac{\pi}{24\,\sqrt[4]{\left(4\pi\right)^3}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{3}{4}}}\ ;\end{aligned}$$

ce qui est impossible car $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{4}}} = +\infty$. D'où contradiction.

$\boxed{\textbf{7.198}}$ 1) $A = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_1^{+\infty} = +\infty.$

2) $S_{\text{latérale}} = 2\pi \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\sqrt{1+\frac{1}{t^4}}\, dt = +\infty.$

3) $V = \pi \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = -\frac{\pi}{t}\Big|_1^{+\infty} = \pi.$

Paradoxe du peintre : Il est possible de peindre une surface infinie avec une quantité finie de peinture !

$\boxed{\textbf{7.199}}$ Puisque $f(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = x^4 \int_0^{+\infty} e^{-x^4 t}\, dt = -e^{-x^4 t}\Big|_0^{+\infty} = 1,$$

la fonction est discontinue en 0 et continue ailleurs.

$\boxed{\textbf{7.200}}$ 1) La fonction g étant continue sur $]a, b]$, montrons qu'elle est aussi continue à droite en a. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Puisque

$$\lim_{x \to a+} \int_x^b f(t)\, dt = \int_{a+}^b f(t)\, dt,$$

il existe un nombre $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$ tel que pour tout $0 < x - a \leq \delta$:

$$\left| \int_{a+}^b f(t)\, dt - \int_x^b f(t)\, dt \right| \leq \varepsilon\ ;$$

ce qui entraîne $\big|g(x) - g(a)\big| = \left| \displaystyle\int_{a+}^x f(t)\, dt \right| = \left| \displaystyle\int_{a+}^b f(t)\, dt - \int_x^b f(t)\, dt \right| \leq \varepsilon.$

2) Puisque l'intégrale généralisée $\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, dt$ converge (ex. 7.50), on a, d'après 1), que $\lim\limits_{x \to 0+} \int_{0+}^x \ln(\sin t)\, dt = 0$. Ainsi, en utilisant deux fois la règle de Bernoulli-L'Hospital,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0+} \frac{\displaystyle\int_{0+}^x \ln(\sin t)\, dt}{x(\ln x - 1)} &= \lim_{x \to 0+} \frac{\displaystyle\int_{0+}^1 \ln(\sin t)\, dt + \int_1^x \ln(\sin t)\, dt}{x(\ln x - 1)} \\
&= \lim_{x \to 0+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln x} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1\,.
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{7.201}}$ 1a) $\forall\, t \in \left]0, \frac{1}{e}\right[\ : -\dfrac{\ln t}{t^2} > \dfrac{1}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^1 \frac{\ln t}{t^2}\, dt$ diverge.

1b) $\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty \Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \ln t\, dt$ diverge.

2a) $\forall\, x > 1 :\ \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^x f(t)\, dt = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{\ln t}{t^2}\, dt + \int_1^x \ln t\, dt = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \int_{\frac{1}{x}}^x f(t)\, dt = 0.$

2b) $\forall x > 1 :\ \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x^2} f(t)\,dt = \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)\,dt + \int_{x}^{x^2} f(t)\,dt = \int_{x}^{x^2} \ln t\,dt \geq (x^2 - x)\ln x$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} f(t)\,dt = +\infty.$$

7.202 1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}+}^{0} \operatorname{tg} t\,dt = -\ln\cos t\Big|_{-\frac{\pi}{2}+}^{0} = -\infty\,,$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} t\,dt = -\ln\cos t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}-} = +\infty.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0+} g(x) = \ln 2.$

7.203 Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell \neq 0$. Pour les besoins de la démonstration, on va supposer que $\ell > 0$ (pour le cas $\ell < 0$ remplacer f par $-f$). Alors, il existe un nombre $a > 0$ tel que pour tout $t \geq a : f(t) \geq \frac{\ell}{2}$ et l'on aurait pour tout $x > a$:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt \geq \int_0^x f(t)\,dt + \frac{\ell}{2}(x-a)$$

et, par passage à la limite, $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty$, ce qui est impossible. D'où contradiction.

7.204 Il suffit de constater que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$ et d'utiliser le résultat de l'exercice précédent.

7.205 Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ pour lequel $f(a) \neq 0$. Il découle de la continuité de f, l'existence d'un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [a, a+\delta]$: $f(x)f(a) > 0$; ce qui entraîne, entre autres, que $\int_a^{a+\delta} f(t)\,dt \neq 0$. D'autre part, puisque l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^{a+nT} f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} n \int_0^T f(t)\,dt$$

où $T > 0$ est une période de la fonction f, on doit obligatoirement avoir $\int_0^T f(t)\,dt = 0$. Il en résulte immédiatement que $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = 0$ et que pour tout entier $n \geq 1$ (ex. 6.156) :

$$\begin{aligned}\int_a^{a+\delta+nT} f(t)\,dt &= \int_a^{a+\delta} f(t)\,dt + \int_{a+\delta}^{a+\delta+nT} f(t)\,dt \\ &= \int_a^{a+\delta} f(t)\,dt + n\int_0^T f(t)\,dt = \int_a^{a+\delta} f(t)\,dt.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$0 = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^{a+\delta+nT} f(t)\,dt = \int_a^{a+\delta} f(t)\,dt \neq 0$$

D'où contradiction.

$\boxed{\textbf{7.206}}$ Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour commencer, remarquons que puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $s > 0$:

$$\left| \frac{s}{\left(x-t\right)^2 + s^2}\, f(t) \right| \leq \frac{Ms}{\left(x-t\right)^2 + s^2}$$

avec $M = 1 + \sup\left\{\left|f(t)\right| : t \in \mathbb{R}\right\}$, l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s}{\left(x-t\right)^2+s^2} f(t)\, dt$ est absolument convergente quel que soit $s > 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il découle de la continuité de f, qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout $|t - x| \leq \alpha$: $\left|f(t) - f(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. De plus, comme $\lim\limits_{s \to 0+} \operatorname{Arctg} \frac{\alpha}{s} = \frac{\pi}{2}$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout $0 < s \leq \delta$: $0 < \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg} \frac{\alpha}{s} \leq \frac{\varepsilon}{8M}$. Ainsi, pour tout $0 < s \leq \delta$:

$$\begin{aligned}
0 \leq &\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s}{\left(x-t\right)^2 + s^2}\, f(t)\, dt - f(x) \right| \\
&= \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s}{\left(x-t\right)^2 + s^2} \big(f(t) - f(x)\big)\, dt \right| \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s}{\left(x-t\right)^2 + s^2} \left|f(t) - f(x)\right| dt \\
&\leq \frac{2M}{\pi} \int_{-\infty}^{x-\alpha} \frac{s}{\left(x-t\right)^2 + s^2}\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \frac{s}{\left(x-t\right)^2 + s^2} \left|f(t) - f(x)\right| dt \\
&\quad + \frac{2M}{\pi} \int_{x+\alpha}^{+\infty} \frac{s}{\left(x-t\right)^2 + s^2}\, dt \\
&\leq \frac{4M}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg} \frac{\alpha}{s} \right) + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \frac{s}{\left(x-t\right)^2 + s^2}\, dt \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s}{\left(x-t\right)^2 + s^2}\, dt = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\lim\limits_{s \to 0+} s \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{\left(x-t\right)^2 + s^2}\, dt = \pi f(x)$.

$\boxed{\textbf{7.207}}$ La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{\cos t^4}{1+t^2}$ répond à la question. En effet,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right| dt < \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{Arctg} t \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

tandis que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f'(t)\right| dt = +\infty\,.$$

Pour montrer cette dernière égalité, raisonnons par l'absurde et supposons que $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f'(t)\right| dt < +\infty$. Alors, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(t) = \frac{-4t^3 \sin t^4}{1+t^2} - \frac{2t \cos t^4}{\left(1+t^2\right)^2}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{2t\cos t^4}{\left(1+t^2\right)^2}\right|dt = 2\int_0^{+\infty}\frac{t|\cos t^4|}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt$$
$$< \int_0^{+\infty}\frac{2t}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt = -\left.\frac{1}{1+t^2}\right|_0^{+\infty} = 1\,,$$

on aurait $\int_0^{+\infty}\frac{t^3|\sin t^4|}{1+t^2}\,dt < +\infty$, ce qui est impossible car pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{(2m+1)\pi}\frac{t^3|\sin t^4|}{1+t^2}\,dt\\
&\geq \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{m}\int_{\sqrt[4]{\frac{\pi}{6}+2k\pi}}^{\sqrt[4]{\frac{\pi}{2}+2k\pi}} t\,dt = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{m}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}+2k\pi}-\sqrt{\frac{\pi}{6}+2k\pi}\right)\\
&= \frac{\pi}{24}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2k\pi}+\sqrt{\frac{\pi}{6}+2k\pi}} > \frac{\pi}{48}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2k\pi}} > \frac{\sqrt{\pi}}{96}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{k}}
\end{aligned}$$

et $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty$. D'où contradiction.

7.208 La fonction $f : [0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \sum_{n=1}^{[t]+1} f_n(t)$ où pour tout $n \geq 2$:

$$f_n(t) = \begin{cases} n^4\left(t-\left(n-\frac{1}{n^3}\right)\right) & \text{si } t \in \left[n-\frac{1}{n^3}, n\right] \\ n^4\left(t-\left(n+\frac{1}{n^3}\right)\right) & \text{si } t \in \left[n, n+\frac{1}{n^3}\right] \\ 0 & \text{si } t \notin \left[n-\frac{1}{n^3}, n+\frac{1}{n^3}\right] \end{cases}$$

et $f_1 = 0$ répond à la question. En effet, $\int_0^{+\infty}\left|f(t)\right|dt < +\infty$ car pour tout $x > 0$:

$$\int_0^x \left|f(t)\right|dt < \sum_{n=1}^{[x]+1}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=1}^{[x]+1}\frac{1}{n^2} < \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

tandis que

$$\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt = +\infty\,.$$

Cette dernière égalité est le résultat des deux constatations suivantes :

1) pour tout $t \geq 0$: $f^2(t) = \sum_{n=1}^{[t]+1} f_n^2(t)$;

2) pour tout $m > 1$:

$$\int_0^{m+1} f^2(t)\,dt > 2\sum_{n=2}^{m} n^8 \int_n^{n+\frac{1}{n^3}} \left(t - \left(n + \frac{1}{n^3}\right)\right)^2 dt = \frac{2}{3}\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{n}$$

et $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Remarque : On notera que la fonction f n'est pas majorée.

$\boxed{\textbf{7.209}}$ Pour démontrer que $\ell = 0$, il nous suffit de prouver que les deux autres cas possibles, à savoir $\ell < 0$ et $\ell > 0$, sont à exclure. En effet, si $\ell > 0$, il existerait un nombre $a > 0$ tel que pour tout $t \geq a$: $f(t) > \frac{\ell}{2}$ et par conséquent

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{a} f(t)\,dt + \int_a^{+\infty} f(t)\,dt \geq \int_0^{a} f(t)\,dt + \frac{\ell}{2}\int_a^{+\infty} dt = +\infty\,.$$

De même pour $\ell < 0$ (en remplaçant f par $-f$).

$\boxed{\textbf{7.210}}$ Il suffit de constater que pour tout $s > 0$: $f(s) = f(0) + \int_0^s f'(t)\,dt$ et d'utiliser le résultat de l'exercice précédent.

$\boxed{\textbf{7.211}}$ Soit $\varepsilon > 0$. D'une part, puisque $\int_0^{+\infty} \left|f(t)\right| dt < +\infty$, il existe un nombre $a > 0$ tel que

$$\int_a^{+\infty} \left|f(t)\right| dt < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

D'autre part, d'après le théorème d'approximation de Weierstrass (ex. 4.174), on sait qu'il existe un polynôme $P_\varepsilon(t)$ tel que

$$\sup_{0\leq t\leq a} \left|f(t) - P_\varepsilon(t)\right| < \frac{\varepsilon}{3a}\,.$$

Comme de plus

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^a P_\varepsilon(t)\cos(xt)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(P_\varepsilon(a)\sin(ax) - \int_0^a P'_\varepsilon(t)\sin(xt)\,dt\right) = 0\,,$$

il existe un nombre $x_0 > 0$ tel que pour tout $x \geq x_0$:

$$\left|\int_0^a P_\varepsilon(t)\cos(xt)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Ainsi, pour tout $x \geq x_0$:

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^{+\infty} f(t)\cos(xt)\,dt\right| \\ &\leq \int_a^{+\infty} \left|f(t)\right| dt + \int_0^a \left|f(t) - P_\varepsilon(t)\right| dt + \left|\int_0^a P_\varepsilon(t)\cos(xt)\,dt\right| < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Ce résultat étant valable quel que soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)\cos(xt)\,dt = 0\,.$$

De même $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\sin(xt)\,dt = 0\,.$

$\boxed{\textbf{7.212}}$ 1) Soit $x \geq 0$. Puisque $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$ et

$$\int_0^x \bigl|f'(t)\bigr|\,dt = \int_0^x e^{-\beta_0 t}e^{\beta_0 t}\bigl|f'(t)\bigr|\,dt \leq e^{\beta_0 x}\int_0^{+\infty} e^{-\beta_0 t}\bigl|f'(t)\bigr|\,dt,$$

on a

$$\bigl|f(x)\bigr| \leq \bigl|f(0)\bigr| + \int_0^x \bigl|f'(t)\bigr|\,dt \leq \left(\bigl|f(0)\bigr| + \int_0^{+\infty} e^{-\beta_0 t}\bigl|f'(t)\bigr|\,dt\right)e^{\beta_0 x}\,.$$

Par conséquent, cette inégalité étant valable quel que soit $x \geq 0$,

$$c = \sup_{x\geq 0}\bigl|f(x)\bigr|\,e^{-\beta_0 x} \leq \bigl|f(0)\bigr| + \int_0^{+\infty} e^{-\beta_0 t}\bigl|f'(t)\bigr|\,dt\,.$$

2a) En effet,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\bigl|f(t)\bigr|\,dt &= \int_0^{+\infty} e^{-(\beta-\beta_0)t}\,e^{-\beta_0 t}\bigl|f(t)\bigr|\,dt\\ &\leq c\int_0^{+\infty} e^{-(\beta-\beta_0)t}\,dt = \frac{c}{\beta-\beta_0} < +\infty\,.\end{aligned}$$

2b) Il suffit de constater que pour tout $t \geq 0$:

$$\bigl|f(t)\,e^{-\beta t}\bigr| = \bigl(\bigl|f(t)\bigr|\,e^{-\beta_0 t}\bigr)\,e^{-(\beta-\beta_0)t} \leq c\,e^{-(\beta-\beta_0)t}\,.$$

2c) Puisque pour tout $x > 0$:

$$\int_0^x f'(t)\,e^{-\beta t}\,dt = f(t)\,e^{-\beta t}\Big|_0^x + \beta\int_0^x f(t)\,e^{\beta t}\,dt\,,$$

et, en utilisant les deux résultats précédents, on obtient, par passage à la limite, que

$$\int_0^{+\infty} f'(t)\,e^{-\beta t}\,dt = \beta\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-\beta t}\,dt - f(0)\,.$$

$\boxed{\textbf{7.213}}$ Puisque (ex. 7.28) $\int_{0+}^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = 0$, on a

$$\begin{aligned}\int_{0+}^{+\infty}\frac{\ln t}{\alpha^2+t^2}\,dt &= \frac{1}{\alpha}\int_{0+}^{+\infty}\frac{\ln \alpha s}{1+s^2}\,ds\\ &= \frac{\ln\alpha}{\alpha}\int_{0+}^{+\infty}\frac{ds}{1+s^2} + \frac{1}{\alpha}\int_{0+}^{+\infty}\frac{\ln s}{1+s^2}\,ds = \frac{\pi\ln\alpha}{2\alpha}.\end{aligned}$$

2) En effectuant le changement de variable $t = \operatorname{Arctg} \frac{s}{\alpha}$, on obtient

$$\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-} \ln(\alpha \operatorname{tg} t)\, dt = \alpha \int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln s}{\alpha^2 + s^2}\, ds = \frac{\pi \ln \alpha}{2}.$$

$\boxed{\textbf{7.214}}$ Puisque $\lim\limits_{t\to 0+} t^{1-\alpha} \frac{t^\alpha}{\ln(1+t)} = 1$, on a $\int_{0+}^{1} \frac{t^\alpha}{\ln(1+t)}\, dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ et posons $\mu = \min\{1, \varepsilon\}$. D'une part, $\lim\limits_{\alpha\to 0+} \alpha \int_{\frac{\mu}{2}}^{1} \frac{t^\alpha}{\ln(1+t)}\, dt = 0$ implique l'existence d'un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout $0 < \alpha \leq \delta$:

$$\left| \alpha \int_{\frac{\mu}{2}}^{1} \frac{t^\alpha}{\ln(1+t)}\, dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, on sait, grâce à la formule de MacLaurin, qu'à chaque $t > 0$, on peut associer un élément θ_t de $]0,1[$ tel que

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3\big(1+\theta_t t\big)^3} > \frac{t}{2}\,(2-t).$$

Ainsi, pour tout $0 < t < \frac{\mu}{2}$ et tout $\alpha > 0$:

$$0 < \frac{t^\alpha}{\ln(1+t)} < \frac{t^\alpha}{\frac{t}{2}(2-t)} < \frac{2t^{\alpha-1}}{2 - \frac{\mu}{2}},$$

ce qui entraîne que pour tout $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} \alpha \int_{0+}^{\frac{\mu}{2}} \frac{t^\alpha}{\ln(1+t)}\, dt &\leq \frac{2\alpha}{2-\frac{\mu}{2}} \int_{0+}^{\frac{\mu}{2}} t^{\alpha-1}\, dt = \frac{2}{2-\frac{\mu}{2}} \left(\frac{\mu}{2}\right)^\alpha \\ &\leq \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \left(\frac{\mu}{2}\right)^\alpha \leq \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Par conséquent pour tout $0 < \alpha \leq \delta$:

$$\alpha \int_{0+}^{1} \frac{t^\alpha}{\ln(1+t)}\, dt = \alpha \int_{0+}^{\frac{\mu}{2}} \frac{t^\alpha}{\ln(1+t)}\, dt + \alpha \int_{\frac{\mu}{2}}^{1} \frac{t^\alpha}{\ln(1+t)}\, dt \leq 1 + \varepsilon.$$

Comme de plus pour tout $t \geq 0$: $\ln(1+t) \leq t$, on a aussi que pour tout $\alpha > 0$,

$$\alpha \int_{0+}^{1} \frac{t^\alpha}{\ln(1+t)}\, dt \geq \alpha \int_{0+}^{1} t^{\alpha-1}\, dt = 1.$$

D'où pour tout $0 < \alpha \leq \delta$: $\left| \alpha \int_{0+}^{1} \frac{t^\alpha}{\ln(1+t)}\, dt - 1 \right| \varepsilon.$

Ce résultat étant valable quel que soit $\varepsilon > 0$, on a démontré que

$$\lim_{\alpha \leftarrow 0+} \alpha \int_{0+}^{1} \frac{t^\alpha}{\ln(1+t)}\, dt = 1\,.$$

$\boxed{\textbf{7.215}}$ 1) Pour tout $t \in]0, \pi]$:

$$\begin{aligned}
&2\left(\frac{1}{2}+\cos t+\cdots+\cos nt\right)\sin\frac{t}{2}\\
&=\sin\frac{t}{2}+2\sin\frac{t}{2}\,\cos t+\cdots+2\sin\frac{t}{2}\,\cos nt\\
&=\sin\frac{t}{2}+\left(\sin\frac{3t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)+\cdots+\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t\right)\\
&=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t
\end{aligned}$$

ou encore $\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} = \dfrac{1}{2}+\cos t+\cdots+\cos nt.$

2) $\displaystyle\int_{0+}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$

$$= \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos t+\cdots+\cos nt\right)dt = \left(\frac{t}{2}+\sin t+\cdots+\frac{\sin nt}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

$\boxed{\textbf{7.216}}$ 1) La fonction f étant continue sur $]0, \pi]$, montrons qu'elle l'est aussi à droite en 0. En effet,

$$\lim_{t\to 0+} f(t) = \lim_{t\to 0+}\frac{t-2\sin\frac{t}{2}}{2t\sin\frac{t}{2}} = \lim_{t\to 0+}\frac{\mathcal{R}_2(t)}{t^2+\mathcal{R}_2(t)} = 0 = f(0).$$

2) Pour tout $t \in]0, \pi[$: $f'(t) = -\dfrac{\cos\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}} + \dfrac{1}{t^2}$ et

$$\lim_{t\to 0+} f'(t) = \lim_{t\to 0+}\frac{-t^2\cos\frac{t}{2}+4\sin^2\frac{t}{2}}{4t^2\sin^2\frac{t}{2}} = \lim_{t\to 0+}\frac{\frac{t^4}{24}+\mathcal{R}_4(t)}{t^4+\mathcal{R}_4(t)} = \frac{1}{24}\,.$$

Par conséquent la fonction $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = \begin{cases} -\dfrac{\cos\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}} + \dfrac{1}{t^2} & \text{si } 0 < t \leq \pi \\[2ex] \dfrac{1}{24} & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

est continue et pour tout entier $n \geq 0$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} f(t) \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) t\, dt \\
&= -\frac{f(t)}{n+\frac{1}{2}} \cos\left(n+\frac{1}{2}\right) t \Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \int_0^{\pi} g(t) \cos\left(n+\frac{1}{2}\right) t\, dt \\
&= \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \int_0^{\pi} g(t) \cos\left(n+\frac{1}{2}\right) t\, dt\ ;
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{\pi} f(t) \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) t\, dt = 0.$

3) De ce qui précède et en utilisant l'exercice précédent, on obtient pour tout entier $n \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\int_{0+}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt &= \int_{0+}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right) t}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt - \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) t\, dt \\
&= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) t\, dt.
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{0+}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$

4a) Comme l'intégrale généralisée (ex. 7.196) $\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ converge, on a

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_{0+}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

4b) Puisque l'intégrale généralisée $\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt$ converge et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{x}{2}} \frac{\sin 2s}{s}\, ds = \frac{\sin^2 s}{s}\Bigg|_{\frac{1}{2x}}^{\frac{x}{2}} + \int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{x}{2}} \frac{\sin^2 s}{s^2}\, ds\ ;$$

on obtient, par passage à la limite,

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt\,.$$

$\boxed{\mathbf{7.217}}$ 1) On sait, d'après la formule de MacLaurin, qu'à chaque $x \in \mathbb{R}$, on peut associer $\theta_x \in\ ]0,1[$ tel que

$$e^x = 1 + x + \frac{e^{\theta_x x}}{2} x^2\,.$$

Par conséquent

- $\forall\, t \in \left]0, \sqrt{n}\right] : e^{-\frac{t^2}{n}} > \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)$ ou encore $e^{-t^2} > \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n$;
- b) $\forall\, t \in \mathbb{R}^* : e^{\frac{t^2}{n}} > \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)$ ou encore $e^{-t^2} < \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

2) Soit $n > 1$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt &> \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\, dt \\ &> \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 s\right)^n \cos s\, ds = x_n\end{aligned}$$

et

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt < \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}-} \left(1 + \mathrm{tg}^2\, s\right)^{-n+1} ds = y_n\,.$$

3a) En utilisant l'exercice 6.144, on peut écrire que pour tout entier $n > 1$:

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \cdot \frac{\beta_{2n+1}}{\beta_{2n-1}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \cdot \frac{2n}{2n+1} > 1$$

et

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\beta_{2n}}{\beta_{2n-2}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2n-1}{2n} < 1\,,$$

ce qui entraîne que la suite $\left(x_n\right)$ est strictement croissante et majorée (voir 2)) tandis que la suite $\left(y_n\right)$ est strictement décroissante et minorée. Elles sont donc toutes les deux convergentes. Ainsi, en posant $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$ et en utilisant la formule de Wallis, on a

$$\frac{x}{y} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\beta_{2n+1}}{\beta_{2n-2}} = 1\,,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Par conséquent, puisque $x \le \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \le y$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

3b) D'après 2) et 3a),

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$

ce qui nous permet d'écrire, en utilisant l'exercice 5.256 et le théorème de la convergence uniforme, que

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}dt\\
&\quad=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}dt=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\,dt\\
&\quad=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}dt=\lim_{x\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\int_0^x\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{7.218}}$ Pour $x\geq 0$, posons $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. D'une part,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt&=g(t)\sin t\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}g(t)\cos t\,dt\\
&=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)\cos t\,dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}g(t)\cos t\,dt\\
&=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)\cos t\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(\pi-t)\cos t\,dt\\
&=g(\pi)-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(g(t)+g(\pi)-g(\pi-t)\big)\cos t\,dt\,.
\end{aligned}$$

D'autre part, puisque $f\geq 0$ et décroissante, pour tout $t\in\,]0,\frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{aligned}
g(t)+g(\pi)-g(\pi-t)&=g(t)+\big(g(\pi)-g(\pi-t)\big)\\
&\geq\frac{1}{n_t}\sum_{k=1}^{n_t}\int_{(k-1)t}^{kt}f(s)\,ds+\int_{\pi-t}^{\pi}f(s)\,ds\\
&\geq\frac{1}{n_t}\left(\sum_{k=1}^{n_t}\int_{(k-1)t}^{kt}f(s)\,ds+\int_{\pi-t}^{\pi}f(s)\,ds\right)\\
&\geq\frac{1}{n_t}\int_0^{\pi}f(s)\,ds\geq\frac{t}{\pi}\int_0^{\pi}f(s)\,ds\,,
\end{aligned}$$

où $n_t=[\frac{\pi}{t}]-1$. Par conséquent

$$\int_0^{\pi}f(t)\sin t\,dt\leq g(\pi)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(s)\,ds\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos t\,dt=\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi}f(t)\,dt\,.$$

De plus, étant donné que sur $[\pi,2\pi]$: $\sin t\leq 0$, on a

$$\int_0^{2\pi}f(t)\sin t\,dt\leq\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\int_0^{2\pi}f(t)\,dt\,.$$

A présent, soit $m \in \mathbb{N}$. Alors, puisque la fonction $f(t+2m\pi)$ vérifie les hypothèses de la fonction $f(t)$, en utilisant le résultat obtenu ci-dessus, on peut écrire

$$\begin{aligned}&\int_{2m\pi}^{2(m+1)\pi} f(t)\sin t\,dt = \int_0^{2\pi} f(s+2m\pi)\sin s\,ds\\ &\leq \left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\int_0^{2\pi} f(s+2m\pi)\,ds = \left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\int_{2m\pi}^{2(m+1)\pi} f(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

Finalement, en constatant que pour tout entier $p \geq 1$:

$$\begin{aligned}&\int_0^{2(p+1)\pi} f(t)\sin t\,dt = \sum_{m=0}^{p}\int_{2m\pi}^{2(m+1)\pi} f(t)\sin t\,dt\\ &\leq \left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\sum_{m=0}^{p}\int_{2m\pi}^{2(m+1)\pi} f(t)\,dt = \left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\int_0^{2(p+1)\pi} f(t)\,dt\,;\end{aligned}$$

on obtient, par passage à la limite, que

$$\int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,dt \leq \left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\int_0^{+\infty} f(t)\,dt\,.$$

$\boxed{\mathbf{7.219}}$ Posons $c=\frac{a+b}{2}$. Ainsi, puisque $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)$ existe, l'intégrale généralisée $\int_{a+}^{c} f'(t)\,dt$ converge et

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+}\left(-\int_x^c f'(t)\,dt + f(c)\right) = -\int_{a+}^{c} f'(t)\,dt + f(c)\,.$$

Par contre, la réciproque est fausse. Comme contre-exemple, il suffit de prendre $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ avec $x\in\,]0,1[\,$.

$\boxed{\mathbf{7.220}}$ 1) Soit $x>0$ fixé.

- Puisque $\lim\limits_{t\to 0+} t^{1-x}t^{x-1}\,e^{-t}=1$, l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}\,e^{-t}\,dt$ (qui est généralisée pour $0<x<1$) converge.
- Posons $m=[x]+2$. Alors, puisque pour tout $t\geq 1$:

$$0 < t^{x-1}e^{-t} < \frac{m!}{t^{m+1-x}} < \frac{m!}{t^2}\,,$$

l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\,dt$ converge.
De plus, pour tout $x>0$: $\Gamma(x)>0$. Par conséquent la fonction Γ est bien définie.

2) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $g_t : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g_t(x) = t^{x-1}$. Puisque pour tout $x > 0$: $g_t''(x) = (\ln t)^2\, t^{x-1} \geq 0$, la fonction g_t est convexe ; ce qui entraîne que la fonction Γ l'est aussi car pour tout couple r, s de $\mathbb{R}_+^*$ et tout $\lambda \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}\Gamma\big(\lambda r + (1-\lambda)s\big) &= \int_0^{+\infty} g_t\big(\lambda r + (1-\lambda)s\big)\, e^{-t}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \big(\lambda g_t(r) + (1-\lambda) g_t(s)\big)\, e^{-t}\, dt \\ &= \lambda\Gamma(r) + (1-\lambda)\Gamma(s)\,.\end{aligned}$$

La fonction Γ étant convexe sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$, elle est aussi continue.

3) En effet, en intégrant par parties,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x\, e^{-t}\, dt = -t^x\, e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt = x\Gamma(x)\,.$$

4) En utilisant le résultat obtenu sous 3), on a pour tout $x > 0$ et tout entier $n > 0$:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n!\Gamma(1)$$

et

$$\begin{aligned}\Gamma(x+n+1) &= (x+n)\Gamma(x+n) = (x+n)(x+n-1)\Gamma(x+n-1) \\ &= \cdots = (x+n)\cdots(x+1)x\Gamma(x)\,.\end{aligned}$$

De plus,

$$\Gamma\,(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = -e^{-t}\Big|_0^{+\infty} = 1\,.$$

Remarque : Le fait que $\Gamma(n+1) = n!$, nous permet de prolonger la notion de factorielle aux nombres réels positifs en posant pour tout $x > 0$:

$$x! = \Gamma(x+1)\,.$$

5a) En utilisant la continuité de la fonction Γ et le résultat obtenu sous 3) :

$$\lim_{x\to 0} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0+} \Gamma(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = +\infty\,.$$

5b) En remarquant que pour tout $x > 1$:

$$\Gamma(x) > \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt > \int_1^{+\infty} e^{-t}\, dt = \frac{1}{e}\,,$$

on obtient, en utilisant de nouveau le résultat obtenu sous 3), pour tout $x > 2$:

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) > \frac{x-1}{e}\,;$$

ce qui entraîne

$$\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty\,.$$

6a) Pour commencer, on va démontrer ce résultat pour $0 < x < 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et posons

$$I_n = \int_0^n t^{x+n-1}\, e^{-t}\, dt \text{ et } J_n = \int_n^{+\infty} t^{x+n-1}\, e^{-t}\, dt\,.$$

- $0 < t < n$. Alors, puisque $t^x < n^x$ et $t^{x-1} > n^{x-1}$, on a

$$n^{x-1} \int_0^n t^n\, e^{-t}\, dt < I_n < n^x \int_0^n t^{n-1}\, e^{-t}\, dt\,.$$

  Ainsi, en faisant l'intégration par parties

$$\int_0^n t^n e^{-t}\, dt = -n^n\, e^{-n} + n \int_0^n t^{n-1} e^{-t}\, dt\,,$$

  on obtient

$$-n^{x+n-1}\, e^{-n} + n^x \int_0^n t^{n-1} e^{-t}\, dt < I_n < n^{x+n-1}\, e^{-n} + n^{x-1} \int_0^n t^n e^{-t}\, dt\,.$$

- $t > n$. Alors, $t^{x-1} < n^{x-1}$ et $t^x > n^x$. D'où

$$n^x \int_n^{+\infty} t^{n-1}\, e^{-t}\, dt < J_n < n^{x-1} \int_n^{+\infty} t^n\, e^{-t}\, dt\,.$$

Par conséquent, en constatant que $\Gamma(x+n) = I_n + j_n$ et en utilisant le résultat obtenu sous 3), on a

$$-n^{x+n-1}\, e^{-n} + n^x\Gamma(n) < \Gamma(x+n) < n^{x+n-1}\, e^{-n} + n^x\Gamma(n)$$

ou encore, en utilisant le résultat obtenu sous 4a),

$$\left|\frac{\Gamma(x+n)}{n^x\Gamma(n)} - 1\right| < \frac{n^{x+n-1}\, e^{-n}}{n^x\Gamma(n)} = \frac{n^n\, e^{-n}}{n!}\,.$$

Finalement, puisque d'après la formule de Stirling (ex. 5.277),

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n\, e^{-n}}{n!} = 0\,,$$

on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\Gamma(x+n)}{n^x\Gamma(n)} = 1.$

6b) Pour $x = 1$, le résultat découle immédiatement de 3).

6c) Reste à montrer le résultat pour $x > 1$. Pour cela, soit $0 < \sigma \leq 1$ et considérons la relation P_k avec $k \geq 0$ définie par

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Gamma(\sigma+k+n)}{n^{\sigma+k}\Gamma(n)} = 1\,.$$

P_0 est vraie (voir 6a) et 6b)) et montrons que pour tout entier $k \geq 0$: $P_k \Rightarrow P_{k+1}$. En effet, en utilisant de nouveau le résultat obtenu sous 3),

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Gamma(\sigma+k+n+1)}{n^{\sigma+k+1}\Gamma(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sigma+k+n)\Gamma(\sigma+k+n)}{nn^{\sigma+k}\Gamma(n)} = 1\,.$$

On a ainsi démontré, par récurrence, que la relation P_k est vraie pour tout entier naturel k.

Finalement, puisque $x > 1$, il existe un unique couple $(\sigma, k) \in \,]0,1[\, \times \mathbb{N}$ tel que $x = \sigma + k$. Par conséquent, en utilisant le résultat obtenu ci-dessus,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Gamma(x+n)}{n^x\Gamma(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\Gamma(\sigma+k+n)}{n^{\sigma+k}\Gamma(n)} = 1\,.$$

7) Soit $x > 0$. Ainsi, puisque d'après 4) :

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \frac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1)\cdots(x+n)}\\ &= \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\left(\frac{\Gamma(x+n+1)}{(n+1)^x\Gamma(n+1)}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^x,\end{aligned}$$

on obtient, en utilisant le résultat obtenu sous 6),

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\,.$$

8) Soit $x \in \,]0,1[$. En utilisant le résultat obtenu sous 7) ainsi que l'exercice 3.55, on a

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2 n}{x(x+1)\cdots(x+n)(1-x)\cdots(1+n-x)}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{x(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)(1-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n+1}\right)}\cdot\frac{n}{n+1}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{x\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{x}{n+1}\right)}\right)\\ &= \frac{1}{x\prod\limits_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)} = \frac{\pi}{\sin \pi x}.\end{aligned}$$

9) On a, d'après 7), que pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(x)} &= \lim_{n\to+\infty} x\, e^{-x\ln n} \prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{x}{k}\Big) \\ &= \lim_{n\to+\infty} x\, e^{x(-\ln n+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k})} \prod_{k=1}^{n}\Big(\Big(1+\frac{x}{k}\Big)e^{-\frac{x}{k}}\Big) \\ &= x\, e^{\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}\Big(\Big(1+\frac{x}{k}\Big)e^{-\frac{x}{k}}\Big)\,.\end{aligned}$$

10) Pour commencer, on va démontrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale généralisée

$$g(x) = \int_{0+}^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t} \ln t\, dt$$

converge. Effectivement, pour un $x > 0$ fixé,

$$\lim_{t\to 0+} t^{1-\frac{x}{2}}\, t^{x-1}\, e^{-t}\ln t = \lim_{t\to 0+} e^{-t} t^{\frac{x}{2}} \ln t = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{1} t^{x-1}\, e^{-t}\ln t\, dt \text{ converge}$$

et

$$\forall\, t \geq 1 : 0 \leq t^{x-1}\, e^{-t} \ln t < t^{x}\, e^{-t} \Rightarrow \int_{1}^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\ln t\, dt < +\infty\,.$$

A présent, posons pour tout $x > 0$ et tout $n > 1$: $\Gamma_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} t^{x-1}e^{-t}\, dt$. La suite $\big(\Gamma_n\big)$ converge simplement vers Γ et montrons que pour tout $x > 0$ et tout $n > 1$:

$$\Gamma_n'(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} t^{x-1}\, e^{-t}\ln t\, dt\,.$$

En effet, d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\Gamma_n(x+h)-\Gamma_n(x)}{h} - \int_{\frac{1}{n}}^{n} t^{x-1}\, e^{-t}\ln t\, dt\right| \\ &\qquad \leq \int_{\frac{1}{n}}^{n} \big|t^{\theta_{t,h}h} - 1\big| t^{x-1}e^{-t} |\ln t|\, dt \leq \Gamma(x)\big(n^{|h|} - n^{-|h|}\big)\ln n\end{aligned}$$

avec $0 < \theta_{t,h} < 1$ et $\lim\limits_{h\to 0}\big(n^{|h|} - n^{-|h|}\big) = 0$.

Soit $a > 0$. Sur l'intervalle ouvert $]\frac{a}{2}, a[$, la suite des fonctions dérivées $\big(\Gamma_n'\big)$ converge uniformément vers la fonction g car pour tout $x \in\,]\frac{a}{2}, a[$ et tout $n > 1$:

$$\begin{aligned}\left|\int_{0+}^{\frac{1}{n}} t^{x-1}\, e^{-t}\ln t\, dt\right| &< -\int_{0+}^{\frac{1}{n}} t^{x-1}\ln t\, dt \\ &= -\frac{t^{x}\ln t}{x}\Big|_{0+}^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{x}\int_{0+}^{\frac{1}{n}} t^{x-1}\, dt < \frac{2(2+a\ln n)}{a^2 n^{\frac{a}{2}}}\end{aligned}$$

et

$$0 < \int_n^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln t\,dt < \int_n^{+\infty} t^{x}e^{-t}\,dt < \int_n^{+\infty} t^{a}e^{-t}\,dt$$

ou encore

$$\begin{aligned}\left|\Gamma_n'(x)-g(x)\right| &= \left|\int_{0+}^{\frac{1}{n}} t^{x-1}\,e^{-t}\ln t\,dt + \int_n^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\ln t\,dt\right| \\ &< \frac{2(2+a\ln n)}{a^2 n^{\frac{a}{2}}} + \int_n^{+\infty} t^a\,e^{-t}\,dt\end{aligned}$$

et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2(2+a\ln n)}{a^2n^{\frac{a}{2}}} + \int_n^{+\infty} t^a\,e^{-t}\,dt\right) = 0.$

Ainsi, d'après l'exercice 6.152, sur $\left]\frac{a}{2}, a\right[$,

$$\Gamma'(x) = \int_{0+}^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\ln t\,dt\,.$$

Ce résultat étant valable quel que soit $a>0$, il l'est sur $]0,+\infty[$. Finalement, notons que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ car elle l'est, en tant que limite uniforme, sur chaqu'un des intervalles ouverts $\left]\frac{a}{2}, a\right[$.

11) De 9), il découle que pour tout $x>0$:

$$\ln\Gamma(x) = -\gamma x - \ln x + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{k} - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)$$

et donc, par dérivation (ex. 8.110),

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x}{k(k+x)}\,.$$

7.221 Puisque $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi,$

on a $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$

7.222 $\displaystyle\sqrt{\pi} = \int_{0+}^{+\infty}\frac{e^{-s}}{\sqrt{s}}\,ds = 2\int_{0+}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \Rightarrow \int_{0+}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

7.223 $\displaystyle\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} s^{-\frac{2}{3}}\,e^{-s}\,ds = \int_0^{+\infty} e^{-t^3}\,dt\,.$

7.224 *Rappel* : $\displaystyle\int_{0+}^{\pi-}\ln\sin t\,dt = 2\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt = -\pi\ln 2.$

Puisque $\displaystyle\int_{0+}^{1} \ln\Gamma(t)\,dt = \int_{0}^{1-} \ln\Gamma(1-t)\,dt$, on a

$$\begin{aligned}2\int_{0+}^{1} \ln\Gamma(t)\,dt &= \int_{0+}^{1} \ln\Gamma(t)\,dt + \int_{0}^{1-} \ln\Gamma(1-t)\,dt\\ &= \int_{0+}^{1-} \ln\big(\Gamma(t)\Gamma(1-t)\big)\,dt = \int_{0+}^{1-} \ln\frac{\pi}{\sin\pi t}\,dt\\ &= \ln\pi - \int_{0+}^{1-} \ln\sin\pi t\,dt = \ln\pi - \frac{1}{\pi}\int_{0+}^{\pi-} \ln\sin s\,ds\\ &= \ln\pi + \ln 2 = \ln 2\pi\end{aligned}$$

ou encore

$$\int_{0+}^{1} \ln\Gamma(t)\,dt = \frac{\ln 2\pi}{2}\,.$$

7.225 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^{2n}\,e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x^{2n+1}}\int_{0}^{+\infty} s^{2n}\,e^{-s}\,ds = \frac{\Gamma(2n+1)}{x^{2n+1}}.$

7.226 $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{x-1} dt = \int_{0}^{+\infty} s^{x-1}\,e^{-s}\,ds = \Gamma(x).$

7.227 Puisque $\displaystyle\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$, on a

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Par conséquent, en faisant le changement de variable $s = t-1$,

$$\int_{1}^{+\infty} \sqrt{t-1}\,e^{-t}\,dt = \frac{1}{e}\int_{0}^{+\infty} \sqrt{s}\,e^{-s}\,ds = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{e} = \frac{\sqrt{\pi}}{2e}\,.$$

7.228 $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt = \Gamma'(1) = -\gamma$, où γ est la constante d'Euler (ex.5.246).

Séries

8.1 Puisque pour tout entier $p \geq 1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{1}{5^n} = \frac{1 - \dfrac{1}{5^{p+1}}}{1 - \dfrac{1}{5}}$,

on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{5}{4}$.

8.2 Puisque pour tout entier $p \geq 1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{p} e^{-n} = \frac{1 - e^{-p-1}}{1 - e^{-1}}$,

on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} = \frac{e}{e-1}$.

8.3 Puisque pour tout entier $p \geq 1$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{p+1}}$,

on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1$.

8.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[2n]{e^{-n^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{\sqrt{e}}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{e} - 1}$.

8.5 Puisque pour tout entier $p \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{p} \left(\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n+1}\right) = \cos 1 - \cos\frac{1}{p+1},$$

on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n+1}\right) = \cos 1 - 1$.

8.6 Puisque pour tout entier $p \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{p+1},$$

on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

$\boxed{\textbf{8.7}}$ Puisque pour tout entier $p \geq 5$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(n+5)} &= \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+5}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} - \sum_{n=6}^{p+5} \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{5}\left(\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n} - \sum_{n=p+1}^{p+5} \frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+5)} = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n} = \frac{137}{300}$.

$\boxed{\textbf{8.8}}$ Puisque pour tout entier $p \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4p+1}\right),$$

on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4}$.

$\boxed{\textbf{8.9}}$ Puisque pour tout entier $p \geq 5$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{p} \frac{1}{n^2+2n-3} &= \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{p} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+3}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=5}^{p+3} \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n} - \sum_{n=p}^{p+3} \frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

on a $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2n-3} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n} = \frac{25}{48}$.

$\boxed{\textbf{8.10}}$ Puisque pour tout entier $p \geq 7$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{p} \frac{n+4}{n(n^2-4)} &= -\sum_{n=3}^{p} \frac{1}{n} + \frac{3}{4} \sum_{n=3}^{p} \frac{1}{n-2} + \frac{1}{4} \sum_{n=3}^{p} \frac{1}{n+2} \\ &= -\sum_{n=3}^{4} \frac{1}{n} - \sum_{n=p-1}^{p} \frac{1}{n} + \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n} + \frac{1}{4} \sum_{n=p-1}^{p+2} \frac{1}{n},\end{aligned}$$

on a $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n+4}{n(n^2-4)} = -\sum_{n=3}^{4} \frac{1}{n} + \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n} = \frac{47}{48}$.

$\boxed{\mathbf{8.11}}$ Puisque pour tout entier $p \geq 4$:

$$\sum_{n=2}^{p} \frac{n+2}{n(n^2-1)} = -2\sum_{n=2}^{p}\frac{1}{n} + \frac{3}{2}\sum_{n=2}^{p}\frac{1}{n-1} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{p}\frac{1}{n+1}$$
$$= -1 - \frac{2}{p} + \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{2}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=p}^{p+1}\frac{1}{n}\,,$$

on a $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+2}{n(n^2-1)} = -1 + \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{2}\frac{1}{n} = \frac{5}{4}$.

$\boxed{\mathbf{8.12}}$ Puisque pour tout entier $p \geq 2$:

$$\sum_{n=2}^{p} \frac{2n-1}{n^2\big(n-1\big)^2} = \sum_{n=2}^{p}\left(\frac{1}{\big(n-1\big)^2} - \frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{p^2},$$

on a $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^2\big(n-1\big)^2} = 1$.

$\boxed{\mathbf{8.13}}$ Puisque pour tout entier $p \geq 5$:

$$\sum_{n=2}^{p} \frac{2n+3}{n(n-1)(n+2)} = -\frac{3}{2}\sum_{n=2}^{p}\frac{1}{n} + \frac{5}{3}\sum_{n=2}^{p}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{6}\sum_{n=2}^{p}\frac{1}{n+2}$$
$$= -\frac{3}{2}\left(\sum_{n=2}^{3}\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right) + \frac{5}{3}\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{n} - \frac{1}{6}\sum_{n=p}^{p+2}\frac{1}{n}\,,$$

on a $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n+3}{n(n-1)(n+2)} = -\frac{3}{2}\sum_{n=2}^{3}\frac{1}{n} + \frac{5}{3}\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{n} = \frac{65}{36}$.

$\boxed{\mathbf{8.14}}$ *Rappel* : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Puisque pour tout entier $p \geq 1$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{2p}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{\big(2n\big)^2} + \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{\big(2n-1\big)^2}\,,$

on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\big(2n-1\big)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$.

$\boxed{\mathbf{8.15}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

$\boxed{\mathbf{8.16}}$ 1) Puisque pour tout entier $p \geq 2$: $\displaystyle\sum_{n=2}^{p}\frac{e^n}{3^n} = \frac{1-\left(\dfrac{e}{3}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{e}{3}} - 1 - \frac{e}{3}\,,$

on a $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{e^n}{3^n} = \frac{e^2}{3(3-e)}$.

2) Puisque pour tout entier $p \geq 4$:

$$\sum_{n=2}^{p} \frac{\ln 2^n}{n^3 - n} = \frac{\ln 2}{2} \sum_{n=2}^{p} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{\ln 2}{2} \left(\sum_{n=1}^{2} \frac{1}{n} - \sum_{n=p}^{p+1} \frac{1}{n} \right),$$

on a $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln 2^n}{n^3 - n} = \frac{3 \ln 2}{4}$.

D'où $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{e^n}{3^n} + \frac{\ln 2^n}{n^3 - n} \right) = \frac{e^2}{3(3-e)} + \frac{3 \ln 2}{4}$.

8.17 Puisque pour tout entier $p \geq 2$:

$$2 \sum_{n=1}^{p} \frac{n}{3^n} = 3 \sum_{n=1}^{p} \frac{n}{3^n} - \sum_{n=1}^{p} \frac{n}{3^n} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{3^n} - \frac{p}{3^p} = \frac{1 - \frac{1}{3^p}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{p}{3^p},$$

on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}$.

8.18 Soit $p > 2$. Puisque

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{p} \frac{n}{2^n} &= (2-1) \sum_{n=1}^{p} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{p} \frac{n}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{p} \frac{n}{2^n} \\ &= \sum_{n=0}^{p-1} \frac{n+1}{2^n} - \sum_{n=1}^{p} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{2^n} - \frac{p}{2^p}, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{p+1} \frac{n^2}{2^n} &= (2-1) \sum_{n=1}^{p+1} \frac{n^2}{2^n} = \sum_{n=1}^{p+1} \frac{n^2}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{p+1} \frac{n^2}{2^n} = \sum_{n=0}^{p} \frac{(n+1)^2}{2^n} - \sum_{n=1}^{p+1} \frac{n^2}{2^n} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{p} \frac{n}{2^n} + \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{2^n} - \frac{(p+1)^2}{2^{p+1}} = 3 \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^p} - \frac{p}{2^{p-1}} - \frac{(p+1)^2}{2^{p+1}}. \end{aligned}$$

Ainsi, par passage à la limite, on obtient que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6$.

8.19 1) Soit $n \geq 1$ et posons $\alpha = \operatorname{Arctg} \frac{1}{n}$ et $\beta = \operatorname{Arctg} \frac{1}{n+1}$.
Alors, $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$ et

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n(n+1)}} = \frac{1}{n^2 + n + 1}.$$

D'où $\displaystyle\operatorname{Arctg} \frac{1}{n} - \operatorname{Arctg} \frac{1}{n+1} = \alpha - \beta = \operatorname{Arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1}$.

2) Ainsi, puisque pour tout entier $p \geq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{p} \operatorname{Arctg} \frac{1}{n^2+n+1} &= \operatorname{Arctg} 1 + \sum_{n=1}^{p} \left(\operatorname{Arctg} \frac{1}{n} - \operatorname{Arctg} \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} + \operatorname{Arctg} 1 - \operatorname{Arctg} \frac{1}{p+1} ,\end{aligned}$$

on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Arctg} \frac{1}{n^2+n+1} = \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\textbf{8.20}}$ *Rappels* : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$ et $0! = 1$.

1) $\alpha = 1$, $\beta = 3$ et $\mu = 1$.

2) Puisque pour tout entier $p \geq 3$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{p} \frac{n^3}{n!} &= \sum_{n=1}^{2} \frac{n^3}{n!} + \sum_{n=3}^{p} \frac{1}{(n-1)!} + 3 \sum_{n=3}^{p} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=3}^{p} \frac{1}{(n-3)!} \\ &= 5 + \left(\sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{n!} - 2 \right) + 3 \left(\sum_{n=0}^{p-2} \frac{1}{n!} - 1 \right) + \sum_{n=0}^{p-3} \frac{1}{n!} ,\end{aligned}$$

on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} = 5\, e$.

$\boxed{\textbf{8.21}}$ Puisque pour tout entier $p \geq 1$:

$$\begin{aligned}(e-1) \sum_{n=1}^{p} n\, e^{-n} &= \sum_{n=1}^{p} n\, e^{-n+1} - \sum_{n=1}^{p} n\, e^{-n} = \sum_{n=0}^{p-1} (n+1)\, e^{-n} - \sum_{n=1}^{p} n\, e^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{p-1} e^{-n} - p\, e^{-p} = \frac{1-e^{-p}}{1-e^{-1}} - p\, e^{-p} ,\end{aligned}$$

on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\, e^{-n} = \frac{e}{(e-1)^2}$.

$\boxed{\textbf{8.22}}$ *Rappel* : $\forall\, p \geq 1$, $\ln p! > \dfrac{p}{2} \ln \dfrac{p}{2}$ (ex. 2.115).

Pour tout entier $p \geq 1$, posons

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sum_{n=1}^{p} \ln\big(n(n+1)^{\alpha}(n+2)^{\beta}\big) \\ &= (1+\alpha+\beta) \ln p! + (\alpha+\beta) \ln(1+p) + \beta \ln(2+p) - \beta \ln 2\end{aligned}$$

et montrons : (σ_p) converge $\Leftrightarrow 1+\alpha+\beta = 0$ et $\alpha+2\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$ et $\beta = 1$.

1) $\alpha = -2$ et $\beta = 1$. Puisque pour tout entier $p \geq 1$:

$$\sigma_p = -\ln\left(1+\frac{1}{p}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{p}\right) - \ln 2\,,$$

on a $\lim\limits_{p\to+\infty} \sigma_p = -\ln 2$.

2) (σ_p) converge. Alors, $1+\alpha+\beta = 0$. En effet, si $1+\alpha+\beta > 0$, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} \sigma_p = +\infty$ car pour tout entier $p \geq 1$:

$$\sigma_p > \Big((1+\alpha+\beta)\frac{p}{2} + (\alpha+2\beta)\Big)\ln\frac{p}{2} + (\alpha+\beta)\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$$
$$+\,\beta\ln\left(1+\frac{2}{p}\right) + (\alpha+\beta)\ln 2.$$

De même si $1+\alpha+\beta < 0$, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} \sigma_p = -\infty$ car pour tout entier $p \geq 1$:

$$\sigma_p < \Big((1+\alpha+\beta)\frac{p}{2} + (\alpha+2\beta)\Big)\ln\frac{p}{2} + (\alpha+\beta)\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$$
$$+\,\beta\ln\left(1+\frac{2}{p}\right) + (\alpha+\beta)\ln 2\,.$$

Ainsi, pour tout entier $p \geq 1$:

$$\sigma_p = (\alpha+2\beta)\ln p + (\alpha+\beta)\ln\left(1+\frac{1}{p}\right) + \beta\ln\left(1+\frac{2}{p}\right) - \beta\ln 2.$$

Par conséquent comme la suite (σ_p) converge, il faut que $\alpha+2\beta = 0$.
Pour $\alpha = -2$ et $\beta = 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\Big(n\big(n+1\big)^{\alpha}\big(n+2\big)^{\beta}\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n(n+2)}{\big(n+1\big)^2}\right) = -\ln 2.$$

8.23 2a) Puisque pour tout entier $p \geq 2$:

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{a_n}{a_{n-1}a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_p} - \frac{1}{a_{p+1}}\,,$$

on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}a_{n+1}} = 2$.

2b) Puisque pour tout entier $p \geq 2$:

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{a_{n-1}a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{p} \frac{a_n}{a_{n-1}a_na_{n+1}}$$
$$= \sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{a_{n-1}a_n} - \frac{1}{a_na_{n+1}}\right) = \frac{1}{a_0a_1} - \frac{1}{a_pa_{p+1}}\,,$$

on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_{n-1}a_{n+1}} = 1$.

8.24 Pour tout entier $p \geq 1$:

$$(\alpha - 1)\lambda_p = -(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{p-1}) + p\alpha^p = -\frac{1 - \alpha^p}{1 - \alpha} + p\alpha^p$$

ou encore

$$\sum_{n=1}^{p} n\alpha^{n-1} = \lambda_p = \frac{1 - \alpha^p}{\left(1 - \alpha\right)^2} + \frac{p\alpha^p}{\alpha - 1}\,.$$

D'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha^{n-1} = \frac{1}{\left(1 - \alpha\right)^2}$.

8.25 Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $p \in \mathbb{N}^*$:

$$f_p(x) = \sum_{n=1}^{p} \frac{x^2}{1 + n^2x^2} \text{ et } f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{1 + n^2x^2}\,.$$

Ainsi, puisque pour tout entier $p \geq 1$:

$$\sup_{x \in \left]-\infty,+\infty\right[} \left|f_p(x) - f(x)\right| < \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\,,$$

la suite $\left(f_p\right)$ converge uniformément vers la fonction f sur $\mathbb{R}$. Finalement, en utilisant le théorème de la permutation des limites (prop. 4.103), on obtient

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{1 + n^2x^2} = \lim_{p \to +\infty} \left(\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{p} \frac{x^2}{1 + n^2x^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

8.26 Converge car pour tout entier $n > 0$: $0 < \dfrac{1}{n^2 + n + 1} < \dfrac{1}{n^2}$.

8.27 Diverge car $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{2n^3 + 1}{n^3 + 5} = 2$.

8.28 Diverge car $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (-1)^n \frac{n}{n + 1} \neq 0$.

8.29 Converge car pour tout entier $n > 0$: $\left|\dfrac{\sin 5n^2}{n^2 + 1}\right| < \dfrac{1}{n^2}$.

8.30 Converge car pour tout entier $n > 0$: $\left|\dfrac{\sin n!}{n^2}\right| < \dfrac{1}{n^2}$.

8.31 Converge car pour tout entier $n > 0$: $\left|\dfrac{\cos 4n}{n^2}\right| < \dfrac{1}{n^2}$.

8.32 Converge car pour tout entier $n > 0$:

$$0 < \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\,.$$

8.33 Converge car pour tout entier $n > 0$: $\dfrac{1}{\sqrt{n(n^2 + 1)}} < \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

8.34 Diverge car pour tout entier $n > 1$: $\dfrac{\sqrt{n^5}}{n^3 + 1} > \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

$\boxed{\textbf{8.35}}$ Converge car pour tout entier $n > 0$: $0 < \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} < \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

$\boxed{\textbf{8.36}}$ Converge d'après le critère des séries alternées.

$\boxed{\textbf{8.37}}$ Converge d'après le critère des séries alternées.

$\boxed{\textbf{8.38}}$ Converge d'après le critère de Cauchy.

$\boxed{\textbf{8.39}}$ Diverge car pour tout entier $n > 3$: $\dfrac{1}{1+\ln n} > \dfrac{1}{2\ln n} > \dfrac{1}{2n}$.

$\boxed{\textbf{8.40}}$ Converge d'après le critère de d'Alembert.

$\boxed{\textbf{8.41}}$ Converge d'après le critère de d'Alembert.

$\boxed{\textbf{8.42}}$ Diverge d'après le critère de d'Alembert.

$\boxed{\textbf{8.43}}$ 1) D'après le critère de d'Alembert, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ converge.

2) D'après le critère des séries alternées, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n+1}$ converge.

D'où la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^n}{n^2+n+1}\right)$ converge.

$\boxed{\textbf{8.44}}$ Puisque pour tout entier $n \geq 1$: $\operatorname{sh} n > \frac{e^n-1}{2} > \frac{n^{27}}{27!\,2}$, le critère de comparaison nous permet d'affirmer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{25}}{\operatorname{sh} n}$ converge.

$\boxed{\textbf{8.45}}$ Diverge d'après le critère de l'intégrale.

$\boxed{\textbf{8.46}}$ Converge d'après le critère des séries alternées.

$\boxed{\textbf{8.47}}$ Converge car pour tout entier $n > 1$:

$$0 < \frac{\ln n!}{n^3} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln k}{n^3} < \frac{\ln n}{n^2} = \frac{2\ln\sqrt{n}}{n^2} < \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}\,.$$

$\boxed{\textbf{8.48}}$ Diverge. Posons $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\,4^n$. Puisque pour tout entier $n \geq 0$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4n^2+8n+4}{4n^2+6n+2} > 1\,,$$

la suite $\big(a_n\big)$ est strictement croissante donc minorée par $a_0 = 1$; ce qui entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$.

$\boxed{\textbf{8.49}}$ Converge d'après le critère de d'Alembert.

$\boxed{\textbf{8.50}}$ Converge car pour tout entier $n > 0$: $\left|\left(\sin(2n+1)\dfrac{\pi}{4}\right)^n\right| = \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$.

$\boxed{\textbf{8.51}}$ Diverge car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sin(2n+2)\dfrac{\pi}{4}\right)^n \neq 0$.

8.52 Montrons que cette série diverge. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'elle converge.

Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin n = 0$ et par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} |\cos n| = 1$. Ainsi, puisque pour tout entier $n > 0$:

$$\left|\frac{\sin(n+1)}{\sin n}\right| = \left|\cos 1 + \frac{\cos n}{\sin n}\ \sin 1\right| \geq \left|\frac{\cos n}{\sin n}\right| \sin 1 - \cos 1\,,$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\sin(n+1)}{\sin n}\right| = +\infty\,;$$

ce qui entraîne, d'après le critère de d'Alembert, que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin n$ diverge. D'où contradiction.

8.53 Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$, l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x}\, dx$ diverge ; ce qui nous permet de conclure, grâce au critère de l'intégrale, que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{n}$ diverge.

8.54 Diverge car $\lim\limits_{n\to+\infty} n \sin \dfrac{1}{n} = 1$.

8.55 Diverge car pour tout entier $n > 1$: $\operatorname{Arctg} \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

8.56 Converge car pour tout entier $n > 0$:

$$0 < 1 - \cos \frac{\pi}{n+1} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)} < \frac{\pi^2}{2n^2}\,.$$

8.57 Converge car pour tout entier $n > 0$:

$$0 < \left|\frac{1 - \sin^2 n + \cos^3 n}{(1+n^2)(1+\sin^2 n)(1+\cos^2 n)}\right| \leq \frac{3}{n^2}\,.$$

8.58 Diverge car pour tout entier $n > 1$: $\dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$.

8.59 Converge d'après le critère des séries alternées.

8.60 Diverge d'après le critère de l'intégrale.

8.61 Converge d'après le critère des séries alternées.

8.62 Diverge car pour tout entier $n > 1$: $\dfrac{1}{\ln^2 n} > \dfrac{1}{n \ln n}$.

8.63 Converge car pour tout entier $n > 2$: $\dfrac{e^{-n}}{\ln^2 n} < e^{-n}$.

8.64 Diverge car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^n\, e^{-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n = +\infty$.

8.65 1) D'après le critère des séries alternées, la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ converge.

2) Puisque pour tout entier $n > 2$: $0 < \frac{e^{-n}}{\ln n} < e^{-n}$, la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-n}}{\ln n}$ converge.

D'où la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n + e^{-n}}{\ln n} \right)$ converge.

8.66 Diverge car pour tout entier $n > 1$: $\dfrac{\ln(1+n)}{\sqrt{n^2+n}} > \dfrac{1}{\sqrt{2}n}$.

8.67 Converge car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 < \frac{\ln(1+n)}{\sqrt{n^3+n}} \leq \frac{\ln 2n}{\sqrt{n^3}} = \frac{4 \ln \sqrt[4]{2n}}{\sqrt{n^3}} < \frac{4\sqrt[4]{2n}}{\sqrt{n^3}} = \frac{4\sqrt[4]{2}}{n^{\frac{5}{4}}}\,.$$

8.68 1) D'après le critère des séries alternées, la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n!)}$ converge.

2) D'après le critère de d'Alembert, la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{n!}$ converge.

D'où la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\ln(n!)} + \frac{e^{\sqrt{n}}}{n!} \right)$ converge.

8.69 Par la formule de MacLaurin, on sait, qu'à chaque $t > -1$, on peut associer un nombre $\theta_t \in \,]0,1[$ tel que

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3(1+\theta_t t)^3}\,.$$

Ainsi, en posant $t = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, on obtient, pour tout entier $n > 1$:

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^{3n}}{3\left(1+\theta_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^3 n^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Puisque pour tout $n > 4$:

$$0 < \frac{1}{3\left(1+\theta_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^3 n^{\frac{3}{2}}} < \frac{8}{3n^{\frac{3}{2}}}\,,$$

la série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{3n}}{3\left(1+\theta_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^3 n^{\frac{3}{2}}}$$

est convergente. De même que la série alternée $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Par conséquent

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = -\infty\,.$$

8.70 Diverge pour tout $\alpha > 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln^\alpha(\operatorname{ch} n) = +\infty$.

8.71 On sait, d'après le théorème des accroissements finis, qu'à chaque entier $n > 0$, on peut associer un élément γ_n de $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$ tel que

$$\sin\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n+1} = \cos\gamma_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{\cos\gamma_n}{n(n+1)}.$$

1) $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Diverge car pour tout entier $n > 1$:

$$\left(\sin\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n+1}\right)^\alpha > \frac{1}{\big(2n(n+1)\big)^\alpha} > \frac{1}{4^\alpha n^{2\alpha}}.$$

2) $\alpha > \frac{1}{2}$. Converge car pour tout entier $n > 1$:

$$\left(\sin\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n+1}\right)^\alpha < \frac{1}{\big(n(n+1)\big)^\alpha} < \frac{1}{n^{2\alpha}}.$$

8.72 *Rappels* : $\forall\, p > 1 : \ln p! > \dfrac{p}{2}\ln\dfrac{p}{2}$ (ex. 2.115) et $\ln n! = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln k < n\ln n$.

1) $0 < \alpha \leq 2$. Diverge car pour tout entier $n \geq 6$: $\dfrac{\ln n!}{n^\alpha} > \dfrac{1}{2n^{\alpha-1}}$.

2) $\alpha > 2$. Converge car pour tout entier $n > 1$:

$$0 < \frac{\ln n!}{n^\alpha} < \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}} = \frac{2\ln n^{\frac{\alpha-2}{2}}}{(\alpha-2)n^{\alpha-1}} < \frac{2}{(\alpha-2)n^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

8.73 D'après le critère de Cauchy, cette série converge pour $0 < \alpha < 1$ et diverge pour $\alpha > 1$. Pour $\alpha = 1$, elle est aussi convergente.

8.74 1) D'après le critère de d'Alembert, cette série converge si $0 < \alpha < e$ et diverge si $\alpha > e$. Pour $\alpha = e$, elle diverge. En effet, en posant $a_n = \frac{e^n n!}{n^n}$, on obtient pour tout entier $n > 1$:

$$a_{n+1} = \frac{e}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n} a_n > a_n > \ldots > a_1 = e\,;$$

ce qui entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$.

8.75 1) $0 < \alpha < 1$. Converge. En effet, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha^n = 0$, il existe un entier $n_0 > 0$ tel pour tout $n \geq n_0$: $0 < \alpha^{2n} = \big(\alpha^n\big)^2 \leq \frac{1}{2}$; ce qui entraîne que pour tout $n \geq n_0$:

$$\left|\frac{\alpha^n}{\alpha^{2n} - 1}\right| \leq 2\alpha^n.$$

2) $\alpha > 1$. Converge. En effet, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^n = +\infty$, il existe un entier $m > 0$ tel que pour tout $n \geq m$: $\alpha^{2n} - 1 > \frac{\alpha^{2n}}{2}$; ce qui entraîne que pour tout $n \geq m$:

$$0 < \frac{\alpha^n}{\alpha^{2n} - 1} < \frac{2}{\alpha^n}.$$

$\boxed{\textbf{8.76}}$ 1) $\alpha = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Diverge.

2) $\alpha \neq 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Alors, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin^n \frac{\pi\alpha}{2} = \frac{1}{1 - \sin\dfrac{\pi\alpha}{2}}$.

$\boxed{\textbf{8.77}}$ D'après le critère de d'Alembert, cette série converge pour $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ et diverge pour $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$, elle diverge car pour tout $n > 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}.$$

$\boxed{\textbf{8.78}}$ 1) $\alpha = p\pi$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Converge.

2) $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{N}$. Diverge.

3) $\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{N}$. La série harmonique alternée converge vers $-\ln 2$.

4) $\alpha \neq p\frac{\pi}{2}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Converge d'après le critère de d'Alembert.

$\boxed{\textbf{8.79}}$ D'après le critère du logarithme (qui reste valable pour $|\rho| = +\infty$), cette série converge si $\alpha > 1$ et diverge si $0 < \alpha < 1$. Pour $\alpha = 1$, elle diverge.

$\boxed{\textbf{8.80}}$ D'après le critère du logarithme, cette série converge si $\alpha > e$ et diverge si $0 < \alpha < e$. Pour $\alpha = e$, on obtient la série harmonique que l'on sait divergente.

$\boxed{\textbf{8.81}}$ D'après le critère du logarithme, cette série converge si $0 < \alpha < \frac{1}{e}$ et diverge si $\alpha > \frac{1}{e}$. A présent, étudions le cas $\alpha = \frac{1}{e}$. Pour cela, posons $a_n = \frac{1}{n}$ et $b_n = e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$. Ainsi, puisque pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$: $\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p+1} > e$ (ex. 5.262), on a pour tout entier $n > 0$:

$$\begin{gathered} 1 = \ln e < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = -(n+1)\ln\frac{n}{n+1} \\ \Rightarrow \ln\frac{a_{n+1}}{a_n} < -\frac{1}{n+1} = \ln\frac{b_{n+1}}{b_n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}\ ; \end{gathered}$$

ce qui entraîne, grâce à l'exercice 8.100 et à la divergence de la série harmonique, que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$ diverge.

$\boxed{\textbf{8.82}}$ Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1 + \frac{\big|[\alpha]\big|}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{\big|[\alpha]\big|}{n}\right)^n = \big|[\alpha]\big|$,

la série converge si et seulement si $0 \leq \alpha < 1$.

$\boxed{8.83}$ Puisque pour tout $\beta \neq 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et tout entier $p > 0$:

$$\left|\sum_{n=1}^{p} \sin(n\beta)\right| = \left|\frac{\sin\dfrac{p\beta}{2}\,\sin\dfrac{(p+1)\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\dfrac{\beta}{2}\right|},$$

le critère de Dirichlet nous permet de conclure que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\beta)}{n^\alpha}$ converge pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$.

$\boxed{8.84}$ 1) $\beta \neq 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Puisque tout entier $p > 0$:

$$\left|\sum_{n=1}^{p} \cos(n\beta)\right| = \left|\frac{\sin\dfrac{p\beta}{2}\cos\dfrac{(p+1)\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\dfrac{\beta}{2}\right|},$$

le critère de Dirichlet nous permet de conclure que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\beta)}{n^\alpha}$ converge pour tout $\alpha > 0$.

2) $\beta = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $0 < \alpha \leq 1$.

$\boxed{8.85}$ 1) $\beta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Puisque pour tout entier $p > 0$:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{p} \left(-1\right)^n \cos(2n\beta)\right| &= \left|\sum_{n=1}^{p} \cos\bigl(n(\pi - 2\beta)\bigr)\right| \\ &= \left|\frac{\sin\dfrac{p(\pi-2\beta)}{2}\,\cos\dfrac{(p+1)(\pi-2\beta)}{2}}{\cos\beta}\right| \leq \frac{1}{|\cos\beta|}\,,\end{aligned}$$

le critère de Dirichlet nous permet de conclure que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(-1\right)^n \frac{\cos(2n\beta)}{n^\alpha}$ converge pour tout $\alpha > 0$. Comme de plus la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-1\right)^n}{n^\alpha}$ converge (critère des séries alternées), la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-1\right)^n \frac{\sin^2(n\beta)}{n^\alpha} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-1\right)^n \frac{1-\cos(2n\beta)}{n^\alpha}$$

converge pour tout $\alpha > 0$.

2) $\beta = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, puisque

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-1\right)^n \frac{\sin^2(n\beta)}{n^\alpha} = -\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(2p+1\right)^\alpha}\,,$$

la série converge si $\alpha > 1$ et diverge si $0 < \alpha \leq 1$.

8.86 Puisque $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos^2(n\beta)}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1-\sin^2(n\beta)}{n^\alpha}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge (critère des séries alternées), les deux séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos^2(n\beta)}{n^\alpha} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin^2(n\beta)}{n^\alpha}$$

convergent pour les mêmes valeurs de α et β. Pour ces valeurs voir l'exercice précédent.

8.87 Puisque $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\cos(n\beta)}{n^\alpha} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n(1+\beta)+\sin n(1-\beta)}{n^\alpha}$,

on déduit de l'exercice 8.83 que cette série converge pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$.

8.88 Puisque pour tout $\beta \neq 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et tout entier $p > 0$:

$$\left|\sum_{n=1}^{p} \sin(n\beta)\right| = \left|\frac{\sin\dfrac{p\beta}{2}\sin\dfrac{(p+1)\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\dfrac{\beta}{2}\right|},$$

le critère de Dirichlet nous permet de conclure que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\beta)}{\ln n^\alpha}$ converge pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$.

8.89 Posons $\left(a_n = \frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\right)$. D'une part, pour tout entier $n > 0$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} < 0 \end{aligned}$$

et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{k\to 0+} \frac{1}{k} = 0$ (ex. 2.50).

D'autre part, pour tout $\beta \neq 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et tout entier $p > 0$:

$$\left|\sum_{n=1}^{p} \sin(n\beta)\right| = \left|\frac{\sin\dfrac{p\beta}{2}\sin\dfrac{(p+1)\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\dfrac{\beta}{2}\right|}.$$

Finalement, le critère de Dirichlet nous permet donc de conclure que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(n\beta)$ converge pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$.

8.90 Puisque pour tout entier $n > 0$:

$$1+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } 3+\cdots+(2n+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k + n = n(n+2),$$

on obtient que pour tout entier $n > 0$ et tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{1+\cdots+n}{3+\cdots+(2n+1)}\,n^p = \frac{n+1}{2(n+2)}\,n^p.$$

Ainsi, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, il existe un entier $n_0 > 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{n+1}{n+2} \leq 2 \text{ ou encore } \frac{n^p}{2} \leq \frac{1+\cdots+n}{3+\cdots+(2n+1)}\,n^p \leq 2n^p\ ;$$

ce qui entraîne, d'après le critère de comparaison, que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\cdots+n}{3+\cdots+(2n+1)} n^p$ converge si $p < -1$ et diverge si $p \geq -1$.

8.91 1) $p > q$. Diverge car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+n^p}{1+n^q} = +\infty$.

2) $p = q$. Diverge car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+n^p}{1+n^p} = 1$.

3) $q > p+1$. Converge car pour tout entier $n \geq 1$: $0 < \dfrac{1+n^p}{1+n^q} < \dfrac{2n^p}{n^q} \leq \dfrac{2}{n^2}$.

4) $q = p+1$. Diverge car pour tout entier $n \geq 1$: $\dfrac{1+n^p}{1+n^q} > \dfrac{n^p}{2n^q} = \dfrac{1}{2n}$.

8.92 Utiliser le critère de Raabe-Duhamel.

8.93 Soit $p \geq 3$. Alors,

$$0 < e - \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!} = \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n!} < \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{p-1}}\,.$$

8.94 On sait que pour les séries alternées, on a pour tout entier $p \geq 1$:

$$\left| \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{p^2}.$$

Par conséquent en prenant $p = 100$, on obtient que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{99} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ à } 10^{-4} \text{ près} = -0,8225 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

Remarque : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

8.95 2) $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{n=0}^{p} \frac{a^{2^n}}{1-a^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{p} \left(\frac{1}{1-a^{2^n}} - \frac{1}{1-a^{2^{n+1}}} \right) = \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-a^{2^{p+1}}}\,.$$

D'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2^n}}{1-a^{2^{n+1}}} = \frac{1}{1-a} - \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{1-a^{2^{p+1}}}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-a} - 1 = \dfrac{a}{1-a} & \text{si } |a|<1 \\ \dfrac{1}{1-a} & \text{si } |a|>1\,. \end{cases}$$

8.96 Cette double inégalité s'obtient par un simple raisonnement par récurrence sur n (m étant fixe) en choisissant p (ce qui est toujours possible car $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k < +\infty$) de sorte que

$$\forall\, s > r \geq p \;:\; \sum_{k=r}^{s} a_k \leq \frac{1}{2} \text{ et } 1 - a_r > 0\,.$$

8.97 1) Soit $p \geq 1$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$: $0 \leq a_n < 1$ ou encore $0 \leq a_n^p \leq a_n$. Pour conclure, il suffit d'utiliser le critère de comparaison.
2) En effet, soit $\varepsilon > 0$. D'une part, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n > m$:

$$0 \leq \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n} k a_k \leq \sum_{k=m+1}^{n} a_k \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, en posant $q = \left[\frac{2m^2 M}{\varepsilon}\right] + 1$ où $M = \{1, a_1, \dots, a_m\}$, on obtient que pour tout entier $n \geq q$:

$$0 \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} k a_k \leq \frac{m}{n}\sum_{k=1}^{m} a_k \leq \frac{m^2 M}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, pour tout entier $n > \max\{m, q\}$, on a

$$0 \leq \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} k a_k + \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n} k a_k \leq \varepsilon.$$

3) Soit un entier $r \geq 2$. Alors, pour tout entier $n \geq r$:

$$\sum_{n=1}^{r} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{r}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k a_k\right) - \sum_{n=1}^{r}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k a_k\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{r}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k a_k\right) - \sum_{n=2}^{r+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k a_k\right) = \sum_{n=1}^{r} a_n - \frac{1}{r+1}\sum_{k=1}^{r} k a_k.$$

Par conséquent, en utilisant 2), on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n.$

4) Il suffit de constater que pour tout entier $n \geq 0$:

$$0 \leq \left(\sqrt{a_n} - \frac{1}{n+1}\right)^2 = a_n - 2\frac{\sqrt{a_n}}{n+1} + \frac{1}{\left(n+1\right)^2}$$

ou encore

$$0 \leq \frac{\sqrt{a_n}}{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{\left(n+1\right)^2}\right)$$

et d'utiliser le critère de comparaison.

8.98 Il suffit de constater que pour tout entier $n > 0$:

$$0 \leq \left(na_n - \frac{1}{n}\right)^2 = n^2a_n^2 - 2a_n + \frac{1}{n^2} \text{ ou encore } 0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}\left(n^2a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$$

et d'utiliser le critère de comparaison.

8.99 En effet, il suffit de constater que pour tout entier $m > 0$:

$$\sum_{n=0}^{m}(a_{n+1} - a_n) = a_{m+1} - a_0.$$

8.100 Puisque pour tout entier $n > n_0$:

$$\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \leq \ldots \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} = \beta \text{ ou encore } 0 < a_n \leq \beta b_n\,,$$

le critère de comparaison nous permet de conclure.

8.101 Soit $\varepsilon > 0$ et posons pour tout entier $p \geq 0$: $x_p = \sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} a_n$. Ainsi, la suite $\left(a_n\right)$ étant décroissante, on a que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout entier $m > p$:

$$(m-p)a_m \leq \sum_{n=p+1}^{m} a_n \leq x_p \text{ ou encore } 0 < ma_m \leq \frac{mx_p}{m-p}\,.$$

D'une part, puisque $\lim\limits_{p \to +\infty} x_p = 0$, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < x_q \leq \frac{\varepsilon}{2}$; ce qui entraîne que pour tout entier $m > q$:

$$0 < ma_m \leq \frac{mx_q}{m-q} \leq \left(\frac{m}{m-q}\right)\frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, comme $\lim\limits_{m \to +\infty} \frac{m}{m-q} = 1$, il existe un entier $r > q$ tel que pour tout entier $m \geq r$: $0 < \frac{m}{m-q} < 2$. Par conséquent pour tout entier $m \geq r$: $0 < ma_m \leq \varepsilon$. D'où le résultat.

8.102 Il suffit de constater que pour tout entier $n > 0$: $0 < \frac{a_n}{1+n^2a_n} \leq \frac{1}{n^2}$ et d'utiliser le critère de comparaison.

$\boxed{\textbf{8.103}}$ 1) Pour commencer, on va supposer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$. Alors, puisque pour tout entier $n \geq 0 : 0 \leq \frac{a_n}{1+a_n} \leq a_n$, le critère de comparaison nous permet de conclure.

2) Montrons à présent la réciproque. Puisque $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n} < +\infty$,

on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = 0$; ce qui entraîne que la suite $\big(a_n\big)$ est majorée. Soit $M > 0$ un de ses majorants. Alors, pour tout entier $n \geq 0$:

$$\frac{a_n}{1+a_n} \geq \frac{a_n}{1+M} \text{ ou encore } 0 \leq a_n \leq (1+M)\frac{a_n}{1+a_n}$$

et de conclure en utilisant le critère de comparaison.

$\boxed{\textbf{8.104}}$ Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout entier $n \geq 0 : \alpha_n \geq 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\alpha_n + \sqrt{\alpha_n^2 + a_n}\right) \geq \alpha_n.$$

De plus, pour tout entier $p \geq 0 : \alpha_{p+1} - \alpha_p = \frac{1}{2}\left(-\alpha_p + \sqrt{\alpha_p^2 + a_p}\right) \leq \frac{\sqrt{a_p}}{2}$; ce qui entraîne que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\alpha_n = \sum_{p=0}^{n-1}(\alpha_{p+1} - \alpha_p) \leq \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1}\sqrt{a_p} \leq \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\sqrt{a_p} < +\infty.$$

Par conséquent la suite $\big(\alpha_n\big)$ est croissante et majorée donc convergente.

$\boxed{\textbf{8.105}}$ 1) La fonction f n'étant pas identiquement nulle, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq 0$; ce qui entraîne, puisque $f(a) = f(a+0) = f(a)f(0)$, que $f(0) = 1$. Ainsi, par un simple raisonnement par récurrence, on démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $f(nx) = \big(f(x)\big)^n$ et $f^{(n)}(x) = f(x)\big(f'(0)\big)^n$. Par conséquent la fonction est bien $\mathbf{C}^\infty$ et si $\big|f(1)\big| < 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=0}^{+\infty}\big(f(1)\big)^n = \frac{1}{1-f(1)}.$$

2) Puisque pour tout $y \in \mathbb{R}$: $f(0) = f(y-y) = \big(f(y)\big)^2$ et que la fonction f n'est pas identiquement nulle, on doit avoir $\big(f(0)\big)^2 = f(0) \neq 0$ ou encore $f(0) = 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$. De $\big(f(\frac{x}{2})\big)^2 = f(0) = 1$, on déduit que $f\big(\frac{x}{2}\big) \neq 0$; ce qui entraîne, puisque $f\big(\frac{x}{2}\big) = f\big(x - \frac{x}{2}\big) = f(x)f\big(\frac{x}{2}\big)$, que $f(x) = 1$.

$\boxed{\textbf{8.106}}$ De E possède une infinité d'éléments découle que $\big(a_n\big)$ est une suite de nombres réels positifs.

1) Posons $n_0 = 1$ et pour tout entier $p > 0 : n_p = \min\{n \in E : n > 2n_{p-1}\}$. Ainsi, on obtient, la suite $\big(a_n\big)$ étant décroissante, que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{n_p} a_n \geq \sum_{k=1}^{p} (n_k - n_{k-1}) \frac{1}{n_k} = \sum_{k=1}^{p} \left(1 - \frac{n_{k-1}}{n_k}\right) > \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2} = \frac{p}{2}\ ;$$

ce qui entraîne que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$.

2) *Contre-exemple* : Posons, pour tout entier $n \geq 0$:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n = k^2 \text{ avec } k \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{si } n \neq k^2 \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Alors, la suite (a_n) n'est pas décroissante mais E possède une infinité d'éléments. De plus,

$$0 < \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$\boxed{\textbf{8.107}}$ 1a) Pour commencer, on va supposer que pour tout entier $n \geq 0$: $a_n \geq 0$. D'une part, puisque pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$S_p = \sum_{n=0}^{p} a_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=0}^{\beta(p)} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$$

où $\beta(p) = \max\{\sigma(0), \ldots, \sigma(p)\}$, la suite (S_p) est majorée. Comme de plus elle est croissante, elle converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,.$$

D'autre part, en constatant que pour tout entier $m > 0$:

$$\sum_{n=0}^{m} a_n \leq \sum_{n=0}^{\mu(m)} a_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$$

où $\mu(m) = \min\{k \in \mathbb{N} : \{0, \ldots, m\} \subset \{\sigma(0), \ldots, \sigma(k)\}\}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}.$$

D'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$.

1b) A présent, on va démontrer ce résultat sans supposer que tous les a_n sont positifs ou nuls. Pour cela, posons pour tout entier $n \geq 0$:

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{si } a_n > 0 \\ 0 & \text{si } a_n \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad a_n^- = \begin{cases} -a_n & \text{si } a_n < 0 \\ 0 & \text{si } a_n \geq 0. \end{cases}$$

Ainsi, puisque $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$, on obtient $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+ < +\infty$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^- < +\infty$.

Par conséquent, en utilisant 1a), on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_{\sigma(n)}| = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{+}_{\sigma(n)} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^{-}_{\sigma(n)} < +\infty$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{+} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{-} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{+}_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^{+\infty} a^{-}_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}.$$

2) *Contre-exemple* : Soit $\left(a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$. Alors, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \ln 2$. Supposons à présent que l'on puisse modifier l'ordre de ses termes sans modifier ni sa nature ni sa somme. Alors, puisque pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=0}^{p} \left(\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2} \right) - \frac{1}{4n+4} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{2p+2} a_n,$$

on aurait, par passage à la limite, que $\ln 2 = \frac{\ln 2}{2}$; ce qui est absurde.

8.108 Pour commencer, montrons que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$. En effet, par un simple raisonnement par induction, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n > 0$; ce qui nous permet d'écrire que pour tout entier $p \geq 0$:

$$(a_{p+2} - a_{p+1}) - (a_{p+1} - a_p) = a_{p+1}^2 - a_p^2 = \left(a_p^2 + a_p\right)^2 - a_p^2 = a_p^4 + 2a_p^3 > 0$$

ou encore

$$(a_{p+2} - a_{p+1}) > (a_{p+1} - a_p).$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$:

$$a_n - a_{n-1} > a_{n-1} - a_{n-2} > \ldots > a_1 - a_0 = \alpha^2 > 0 \;;$$

ce qui entraîne que pour, tout $m \in \mathbb{N}^*$: $a_m = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{m} (a_n - a_{n-1}) > \alpha + m\alpha^2$.

Calculons à présent la somme demandée. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n(a_n+1)} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{1+a_n},$$

on a, pour tout entier $q \geq 0$:

$$\sum_{n=0}^{q} \frac{1}{1+a_n} = \sum_{n=0}^{q} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a_{q+1}}.$$

D'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+a_n} = \frac{1}{\alpha} - \lim_{q \to +\infty} \frac{1}{a_{q+1}} = \frac{1}{\alpha}.$$

8.109 Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \left(\frac{1}{[t]} - \frac{1}{t}\right) dt = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \int_{k}^{k+1} \frac{dt}{t}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right);$$

ce qui donne, par passage à la limite, que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_{k}^{k+1} \left(\frac{1}{[t]} - \frac{1}{t}\right) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) = \gamma\,,$$

où γ est la constante d'Euler (ex. 5.246).

8.110 1) Soit $x > 0$ et considérons la suite $\big(x_n\big)$ définie par

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x}{k} - \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right).$$

Cette suite est strictement croissante car $x_{n+1} - x_n = \frac{x}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right) > 0$. De plus, elle est majorée. En effet, par le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $\ln(1+t)$, à chaque entier $k > 0$, on peut associer un nombre $0 < \theta_k < 1$ tel que

$$0 < \frac{x}{k} - \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) = \frac{x}{k}\left(1 - \frac{1}{1 + \theta_k \frac{x}{k}}\right) < \frac{x^2}{k^2}\,.$$

Par conséquent

$$0 < x_n < x^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < x^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{x^2\pi^2}{6}\,.$$

La suite $\big(x_n\big)$ étant croissante et majorée, elle converge. Autrement dit, la série est convergente.

2) Soient $g : \,]0, +\infty[\, \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \sum\limits_{k=1} \frac{x}{k(k+x)}$ et $a > 0$. A chaque entier $p > 0$, associons la fonction $f_p : \,]0, +\infty[\, \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_p(x) = \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{x}{k} - \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right).$$

D'une part, d'après 1), la suite $\big(f_p\big)$ converge simplement vers la fonction f. D'autre part, puisque pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \,]0, 2a[$:

$$\big|f_p'(x) - g(x)\big| = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{x}{k(k+x)} < 2a \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\,,$$

on a que pour tout entier $p > 0$:

$$\sup_{0<x<2a} \big|f_p'(x) - g(x)\big| < 2a \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\,.$$

Comme de plus $\lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 0$, la suite $\left(f_p'\right)$ converge , sur $]0,2a[$, uniformément vers la fonction g. Par conséquent g est continue sur $]0,2a[$ et (ex. 6.152) pour tout $x \in\ ]0,2a[$:

$$f'(x) = g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{k(k+x)}\,.$$

Ce résultat étant valable quel que soit $a > 0$, il l'est sur $]0,+\infty[$. De plus, la fonction f' est continue car elle l'est sur chaque $]0,2a[$.

$\boxed{\textbf{8.111}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^{n+1}}{2^{n+2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \mathcal{R} = \dfrac{1}{2}.$

$\boxed{\textbf{8.112}}$ $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt{n^n+1}}}{\dfrac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt{\left(n+1\right)^{n+1}+1}}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n+1]{n+1}} \sqrt{(n+1)\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \left(\frac{1+\dfrac{1}{(n+1)^{n+1}}}{1+\dfrac{1}{n^n}}\right)} = +\infty$$

$\Rightarrow \mathcal{R} = +\infty.$

$\boxed{\textbf{8.113}}$ $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{\ln n}{n}}{\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) \frac{1}{1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}} = 1 \Rightarrow \mathcal{R} = 1.$$

$\boxed{\textbf{8.114}}$ $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}}{\dfrac{\left((n+1)!\right)^2}{(2n+2)!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{\left(n+1\right)^2} = 4 \Rightarrow \mathcal{R} = 4.$$

$\boxed{\textbf{8.115}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n\,e^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}\,e = e \Rightarrow \mathcal{R} = \dfrac{1}{e}.$

$\boxed{\textbf{8.116}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \Rightarrow \mathcal{R} = 0.$

$\boxed{\textbf{8.117}}$ $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{\operatorname{ch} n}}{\dfrac{1}{\operatorname{ch}(n+1)}} = e \lim_{n\to+\infty} \frac{1+e^{-2(n+1)}}{1+e^{-2n}} = e \Rightarrow \mathcal{R} = e.$$

$\boxed{\textbf{8.118}}$ $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{n\ln n^2}}{\dfrac{1}{(n+1)\ln\left(n+1\right)^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\tfrac{1}{n}\right) \left(1+\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln n}\right) = 1$$

$\Rightarrow \mathcal{R} = 1.$

8.119 $\mathcal{R} = 1$. Alors, pour tout $x \in]-1, 1[$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

8.120 $\mathcal{R} = 1$. Posons $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ avec $|x| < 1$. Alors, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

Par conséquent, puisque $f(0) = 0$, on a $f(x) = -\ln(1-x)$ avec $|x| < 1$.

8.121 $\mathcal{R} = 1$. Posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ avec $|x| < 1$. Alors, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{\left(1-x\right)^2}.$$

D'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{\left(1-x\right)^2}$ avec $|x| < 1$.

8.122 $\mathcal{R} = 1$. Posons $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{\left(1-x\right)^2}$ avec $|x| < 1$. Alors, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{\left(1-x\right)^3}.$$

D'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ avec $|x| < 1$.

8.123 $\mathcal{R} = 1$. Posons $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^{n+1}$ avec $|x| < 1$. Alors, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Par conséquent, puisque $f(0) = 0$, on a $f(x) = \ln(1-x) + \dfrac{1}{(1-x)} - 1$ avec $|x| < 1$.

8.124 $\mathcal{R} = 1$. Alors, pour tout $|x| < 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n} x^{n+1} &= x \sum_{n=1}^{+\infty} x^n + x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= x\left(\frac{1}{1-x} - 1 - \ln(1-x)\right) = \frac{x^2}{1-x} - x\ln(1-x)\,.\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{8.125}}$ $\mathcal{R} = 1$. Alors, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{x}{(1-x)^2} - \ln(1-x).$$

$\boxed{\mathbf{8.126}}$ $\mathcal{R} = 1$. Alors, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n+1} x^{n+1} = x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{x^2}{(1-x)^2} - \ln(1-x).$$

$\boxed{\mathbf{8.127}}$ $\mathcal{R} = 1$. Posons $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ avec $|x| < 1$. Alors, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

Par conséquent, puisque $f(0) = 0$, on a $f(x) = (1-x)\ln(1-x) + x$ avec $|x| < 1$.

$\boxed{\mathbf{8.128}}$ $\mathcal{R} = 1$. En utilisant l'exercice précédent, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \begin{cases} \dfrac{(1-x)}{x} \ln(1-x) + 1 & \text{si } 0 < |x| < 1 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{8.129}}$ $\mathcal{R} = 1$. Alors, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n^2-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$= \frac{1}{2}(x^2-1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2} - (x^2-1)\ln(1-x)\right).$$

$\boxed{\mathbf{8.130}}$ $\mathcal{R} = 1$. Alors, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-3n+2} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n-2} - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} = (x^2-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + x^2$$
$$= (x-x^2)\ln(1-x) + x^2.$$

$\boxed{\mathbf{8.131}}$ $\mathcal{R} = 1$. Alors, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^2+3n+2} x^{n+2} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} = (2-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - 2x$$
$$= (x-2)\ln(1-x) - 2x.$$

$\boxed{\textbf{8.132}}$ $\mathcal{R} = 1$. Alors, pour tout $x \in \,]-1,1[$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^2+6n+5} x^{n+5} &= -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+5}}{n+1} + \frac{5}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+5}}{n+5} \\ &= -\frac{1}{4}\,(x^4-5) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{5}{4}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4}\,(x^4-5)\ln(1-x) - \frac{5}{4}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right).\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{8.133}}$ $\mathcal{R} = \dfrac{1}{4}$. Alors, pour tout $|x| < \frac{1}{4}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 4^n \left(n + \frac{1}{n}\right) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,(4x)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4x)^n}{n} = \frac{4x}{(1-4x)^2} - \ln(1-4x)\,.$$

$\boxed{\textbf{8.134}}$ $\mathcal{R} = 1$. Alors, pour tout $x \in \,]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{3^n}\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{1}{1-x} + \frac{3}{3-x}.$$

$\boxed{\textbf{8.135}}$ $\mathcal{R} = 1$. Posons $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}$ avec $|x| < 1$. Alors, pour tout $x \in \,]-1,1[$:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-x^2\right)^n = \frac{1}{1+x^2}.$$

Par conséquent, puisque $f(0) = 0$, on a $f(x) = \operatorname{Arctg} x$ avec $|x| < 1$.

$\boxed{\textbf{8.136}}$ $\mathcal{R} = 2$. Alors, pour tout $x \in \,]-2,2[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{2x}{\left(2-x\right)^2}.$$

$\boxed{\textbf{8.137}}$ $\mathcal{R} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Ainsi, puisque pour tout $|t| < 1$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^n}{n-1} = t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -t\ln(1-t)\,,$$

on obtient, en posant $t = ex^2$, que pour tout $|x| < \frac{1}{\sqrt{e}}$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^n}{n-1}\, x^{2n+1} = -ex^3 \ln(1-ex^2)\,.$$

$\boxed{\mathbf{8.138}}$ $\mathcal{R} = 2$. Alors, pour tout $|x| < 2$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n + n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{2}{2-x} + 2 = 2\frac{3-x}{2-x}.$$

$\boxed{\mathbf{8.139}}$ $\mathcal{R} = \frac{1}{2}$. Posons $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2+n}\, x^{n+1}$ avec $|x| < \frac{1}{2}$. Alors, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n} = -\ln(1-2x).$$

Par conséquent, puisque $f(0) = 0$, on a $f(x) = \frac{1}{2}(1-2x)\ln(1-2x) + x$ avec $|x| < \frac{1}{2}$. D'où, pour tout $|x| < \frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2+n}\, x^{n+2} = x\, f(x) = x^2 + \frac{x}{2}(1-2x)\ln(1-2x).$$

$\boxed{\mathbf{8.140}}$ $\mathcal{R} = +\infty$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(n+1)!}.$$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 2x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = 2x\, e^{-x^2}$$

et $f(0) = 0$, on obtient $f(x) = 1 - e^{-x^2}$.

$\boxed{\mathbf{8.141}}$ $$\mathcal{R} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n + e^{-n}}{(n+1) + e^{-(n+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \dfrac{1}{n\, e^n}}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n\, e^{(n+1)}}} = 1.$$

Alors, pour tout $|x| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n + e^{-n}\right) x^{n+1} = x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n + x \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{e}\right)^n = \frac{x^2}{(1-x)^2} + \frac{ex}{e-x}.$$

$\boxed{\mathbf{8.142}}$ $\mathcal{R} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)2^{n+1}}{n2^n} = 2$. Alors, pour tout $|x| < 2$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n2^n} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n} = -x \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right).$$

$\boxed{\mathbf{8.143}}$ En posant $t = 9x^2$, on obtient que pour tout $|x| < \mathcal{R} = \frac{1}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9^n}{n}\, x^{2n+1} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -x \ln(1 - 9x^2).$$

$\boxed{\textbf{8.144}}$ En posant $t = \frac{x^3}{2}$, on obtient pour tout $|x| < \mathcal{R} = \sqrt[3]{2}$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{2^n(n-1)} = \frac{x^3}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -\frac{x^3}{2} \ln\left(1 - \frac{x^3}{2}\right).$$

$\boxed{\textbf{8.145}}$ Considérons la fonction auxiliaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

(pour cette série $\mathcal{R} = +\infty$). Ainsi, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} = e^{-x^2}$$

et $f(0) = 0$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt.$

Par conséquent $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$\boxed{\textbf{8.146}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{2^n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{\sqrt{2}}{\left(1 - \sqrt{2}\,\right)^2}$.

$\boxed{\textbf{8.147}}$ Puisque pour tout $|x| < \mathcal{R} = 1$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$,

on obtient, en posant $x = \frac{e}{8}$, que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\, e^n}{8^n} = \frac{8\, e}{(8-e)^2}$.

$\boxed{\textbf{8.148}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(2n - \frac{1}{2}\right) 3^n\, e^{-3n} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(3\, e^{-3}\right)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(3\, e^{-3}\right)^n = \frac{\left(15 - e^3\right) e^3}{2\left(e^3 - 3\right)^2}.$

$\boxed{\textbf{8.149}}$ Soit $f : \left]-1, 1\right[\to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

(pour cette série $\mathcal{R} = 1$). Ainsi, puisque pour tout $|x| < 1$:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

et $f(0) = 0$, on obtient pour tout $|x| < 1$: $f(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Par conséquent $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}} = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\ln 2}{2}$.

8.150 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \frac{1}{\ln 2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} = -\frac{\ln\frac{1}{2}}{\ln 2} = 1.$

8.151 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+n)4^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n4^n} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)4^{n+1}}$

$$= -\ln\left(1-\frac{1}{4}\right) + 4\ln\left(1-\frac{1}{4}\right) + 1 = 1 + 3\ln\frac{3}{4}\,.$$

8.152 En utilisant la formule de MacLaurin, on peut écrire que pour tout $t \in \left]-1,+\infty\right[$ et tout entier $p > 0$:

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{p} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n + \frac{(-1)^p}{(p+1)\big(1+\theta_{p,t}t\big)^{p+1}}\, t^{p+1} \text{ avec } 0 < \theta_{p,t} < 1\,;$$

ce qui donne, par passage à la limite, que pour tout $|t| < 1$:

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, t^n\,.$$

Ainsi, en remplaçant t par $x-1$, on a pour tout $0 < x < 2$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\,\big(x-1\big)^n\,;$$

ce qui entraîne que la fonction f est de classe $\mathbf{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]0,2[$. Comme elle l'est aussi sur chacun des deux intervalles ouverts $]0,1[$ et $]1,+\infty[$, f est de classe $\mathbf{C}^\infty$ sur son domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$.

8.153 Soit $|x| < \beta$. Puisque la série numérique $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\beta^n$ converge, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\beta^n = 0$; ce qui entraîne qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n > m$: $|a_n\beta^n| < 1$. Posons $r = \frac{|x|}{\beta} < 1$. Alors, pour tout entier $p > m$:

$$S_p = \sum_{n=0}^{p} |a_nx^n| = \sum_{n=0}^{m} |a_nx^n| + \sum_{n=m+1}^{p} |a_nx^n| = \sum_{n=0}^{m} |a_nx^n| + \sum_{n=m+1}^{p} |a_n\beta^n| r^n$$
$$\leq \sum_{n=0}^{m} |a_nx^n| + \sum_{n=m+1}^{p} r^n < \sum_{n=0}^{m} |a_nx^n| + \frac{1}{1-r}.$$

On a ainsi démontré que la suite croissante $\big(S_p\big)$ est majorée, donc convergente.

8.154 1) La série numérique $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ étant convergente, le rayon de convergence $\mathcal{R}$ de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ est supérieur ou égal à 1 ; ce qui entraîne que la suite de fonctions $\big(f_p\big)$ converge simplement vers la fonction f sur $[0,1]$.

Montrons à présent que cette convergence est uniforme. Pour cela, posons pour tout couple (p,q) de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$: $\gamma_{p,q}=\sum\limits_{n=1}^{q} a_{p+n}$.

Puisque la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, on a $\lim\limits_{p\to+\infty}\xi_p = 0$ où $\xi_p = \sup\limits_{m\geq 1}|\gamma_{p,m}|$. De plus, pour tout $x\in[0,1]$ et tout $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
&\big|f_{p+q}(x)-f_p(x)\big| = \left|\sum_{n=p+1}^{p+q} a_n x^n\right| = \big|a_{p+1}x^{p+1}+a_{p+2}x^{p+2}+\cdots+a_{p+q}x^{p+q}\big|\\
&= \big|\gamma_{p,1}x^{p+1}+\big(\gamma_{p,2}-\gamma_{p,1}\big)x^{p+2}+\cdots+\big(\gamma_{p,q}-\gamma_{p,q-1}\big)x^{p+q}\big|\\
&= \big|\gamma_{p,1}\big(x^{p+1}-x^{p+2}\big)+\cdots+\gamma_{p,q-1}\big(x^{p+q-1}-x^{p+q}\big)+\gamma_{p,q}x^{p+q}\big|\\
&\leq |\gamma_{p,1}|\big(x^{p+1}-x^{p+2}\big)+\cdots+|\gamma_{p,q-1}|\big(x^{p+q-1}-x^{p+q}\big)+|\gamma_{p,q}|x^{p+q}\leq \xi_p x^{p+1}
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que pour tout $x\in[0,1]$ et tout $p\in\mathbb{N}$:

$$\big|f(x)-f_p(x)\big| = \lim_{q\to+\infty}\big|f_{p+q}(x)-f_p(x)\big|\leq \xi_p$$

ou encore que pour tout entier $p\geq 0$:

$$\sup_{x\in[0,1]}\big|f(x)-f_p(x)\big|\leq \xi_p.$$

Par conséquent, puisque $\lim\limits_{p\to+\infty}\xi_p = 0$, la suite $\big(f_p\big)$ converge uniformément vers la fonction f sur $[0,1]$.

2) En effet, la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.

Remarque : Pour démontrer la proposition 8.13, il suffit de remplacer a_n par $a_n\alpha^n$ ou $a_n\beta^n$ et d'utiliser le résultat de cet exercice.

3) Raisonnons par l'absurde et supposons qu'au moins un des $a_n\neq 0$ et posons $p=\min\{n\in\mathbb{N} : a_n\neq 0\}$. Alors $a_p\neq 0$ et soit $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x)=\sum_{n=p}^{+\infty} a_n x^{n-p}.$$

Cette fonction est, d'après 2), continue et comme de plus pour tout $k\in\mathbb{N}^*$: $g\left(\frac{1}{k}\right)=k^p f\left(\frac{1}{k}\right)=0$, on a

$$a_p = g(0) = \lim_{k\to+\infty} g\left(\frac{1}{k}\right) = 0\,;$$

ce qui est impossible. D'où contradiction.

$\boxed{\textbf{8.155}}$ Non. La série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x},\quad |x|<\mathcal{R}=1$$

est un contre-exemple car $\lim\limits_{x\to 1-}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \dfrac{1}{2}$ tandis que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ diverge.

8.156 1) En effet,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup \sqrt[n]{|na_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} \lim_{n\to+\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

2) Soit $|x_0 - a| < \mathcal{R}$ et prenons $b, c \in E$ avec $b < x_0 < c$. Puisque la suite de fonctions $\left(\sum_{n=1}^{p} a_n n(x-a)^{n-1}\right)$ converge uniformément vers $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n(x-a)^{n-1}$ sur $[b, c]$, on a (ex. 6.152)

$$f'(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n\big(x_0 - a\big)^{n-1}\,.$$

8.157 Considérons la fonction auxiliaire $f :]-\sigma, \sigma[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\,.$$

Fixons $p \in \mathbb{N}$. Alors, $f^{(p)} = 0$ car $f = 0$. D'où $a_p = \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!} = 0\,.$

8.158 1) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule de MacLaurin, à chaque entier $p > 0$, on peut associer un élément θ_p de $]0, 1[$ tel que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{p} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n + \frac{f^{(p+1)}(\theta_p x)}{(p+1)!}\, x^{p+1}.$$

De plus pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $\left|f^{(p+1)}(\theta_p x)\right| \leq M$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} = 0$. D'où

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

2) Utiliser 1).

3) Il suffit de constater que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\,.$

4) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\sin 2x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n-1)!}\, x^{2n-1}$$

$$\cos^3 x = \frac{3}{4}\, \cos x + \frac{1}{4}\, \cos 3x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (3 + 9^n)}{4(2n)!}\, x^{2n}.$$

8.159 Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction continue (prop. 8.13) définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}\,.$$

Puisque pour tout $x \in]-1,1[$: $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-x^2\right)^n = \frac{1}{1+x^2}$, on obtient, $f(0) = 0$, que pour tout $x \in [-1,1]$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1} = \operatorname{Arctg} x\,.$$

En particulier pour $x = 1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

$\boxed{\textbf{8.160}}$ Soit $f :]-1,1] \to \mathbb{R}$ la fonction continue (prop. 8.13) définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n.$$

Puisque pour tout $x \in]-1,1[$: $f'(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = -\frac{1}{1+x}$, on obtient, $f(0) = 0$, que pour tout $x \in]-1,1]$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\, x^n = -\ln(1+x).$$

En particulier pour $x = 1$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

Autre méthode. Puisque pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{p} \frac{(-1)^n}{n} &= -\sum_{n=1}^{p} \int_0^1 (-t)^{n-1}\, dt = -\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{p} (-t)^{n-1}\right) dt \\ &= -\int_0^1 \frac{1-(-t)^p}{1+t}\, dt = -\ln 2 + \int_0^1 \frac{(-t)^p}{1+t}\, dt\end{aligned}$$

et

$$\left|\int_0^1 \frac{(-t)^p}{1+t}\, dt\right| = \int_0^1 \frac{t^p}{1+t}\, dt < \int_0^1 t^p\, dt = \frac{1}{p+1}\,,$$

on obtient, par passage à la limite, que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

$\boxed{\textbf{8.161}}$ Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la fonction continue (prop. 8.13) définie par

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Puisque pour tout $0 < t < 1$:

$$f'(t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n} = \frac{\ln(1-t)}{t} \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0+} \frac{\ln(1-t)}{t} = -1\,,$$

on obtient, $f(0)=0$, que pour tout $0<x<1$:

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = \int_{0+}^{x} \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt\,.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_{0+}^{1-} \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt &= \lim_{x\to 1-} \int_{0+}^{x} \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt \\ &= \lim_{x\to 1-} f(x) = f(1) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}-\frac{\pi^2}{6} &= \int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt = \int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt + \int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln s}{1-s}\, ds \\ &= \int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt - \ln s \ln(1-s)\Big|_{0+}^{\frac{1}{2}} + \int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt \\ &= 2\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt - \ln^2 2\end{aligned}$$

ou encore $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt = \frac{1}{2}\left(\ln^2 2 - \frac{\pi^2}{6}\right)$.

$\boxed{\textbf{8.162}}$ 1) Soit $x>1$. Puisque la fonction $f(t)=\frac{1}{t^x}$ est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}$, on a, grâce au critère de l'intégrale, que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} < +\infty\,.$$

2) Soit $x>1$. Alors, $\forall\, p>1$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^x} > \int_1^{p+1} \frac{dt}{t^x} \Rightarrow \zeta(x) \geq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}$.

D'où, $\lim\limits_{x\to 1+} \zeta(x) = +\infty$.

Soit $x>1$. Alors, $\forall\, p>1$:

$$1 < \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^x} < 1 + \int_1^{p} \frac{dt}{t^x} \Rightarrow 1 \leq \zeta(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \frac{x}{x-1}.$$

D'où, $\lim\limits_{x\to +\infty} \zeta(x) = 1$.

3) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$, posons $\zeta_p(x) = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^x}$.

La suite $\big(\zeta_p(x)\big)$ converge, sur $]1. + \infty[$, simplement vers $\zeta(x)$. Considérons à présent la fonction auxiliaire $g :]1. + \infty[\to]0, +\infty[$ définie par

$$g(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x}.$$

Cette fonction est bien définie. En effet, pour $x > 1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \frac{\ln n}{n^x} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\ln n^\alpha}{n^x} < \frac{1}{\alpha}\,\frac{1}{n^{x-\alpha}} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x-\alpha}} < +\infty$$

avec $\alpha = \frac{x-1}{2}$. Soit $a > 1$ et montrons que la suite des fonctions dérivées (ζ_p') converge uniformément vers la fonction g sur l'intervalle $]a, +\infty[$. En effet,

$$\forall\, p > 1 : \sup_{x>a} \left|\zeta_p'(x) - g(x)\right| \leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^a} \text{ et } \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^a} = 0\,.$$

Par conséquent (ex. 6.152), sur $]a, +\infty[$: $g = \zeta'$. Ce résultat étant valade quel que soit $a > 1$, l'égalité $g = \zeta'$ est vraie sur $]1, +\infty[$. De plus, la fonction ζ est strictement décroissante car pour tout $x > 1$: $\zeta'(x) < 0$.

4) Soit $x > 1$. Alors, pour tout entier $m > 1$:

$$(1 - 2^{-x})\zeta(x) = \sum_{2\nmid n}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \sum_{\substack{n\neq 1\\ 2\nmid n}}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

$$\Rightarrow (1 - 2^{-x})(1 - 3^{-x})\zeta(x) = (1 - 3^{-x}) \sum_{2\nmid n}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \sum_{\substack{n\neq 1\\ 2\nmid n,\, 3\nmid n}}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \Rightarrow \cdots$$

$$\Rightarrow (1 - 2^{-x})(1 - 3^{-x}) \cdots (1 - p_m^{-x})\zeta(x) = 1 + \sum_{\substack{n\neq 1\\ 2\nmid n,\, 3\nmid n, \ldots, p_m \nmid n}}^{+\infty} \frac{1}{n^x}\,.$$

Ainsi, puisque

$$\sum_{\substack{n\neq 1\\ 2\nmid n,\, 3\nmid n, \ldots, p_m \nmid n}}^{+\infty} \frac{1}{n^x} < \sum_{n=p_{m+1}}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \text{ et } \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=p_{m+1}}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = 0\,,$$

on peut écrire

$$\prod_{k=1}^{+\infty} (1 - p_k^{-x})\zeta(x) = 1 \quad \text{ou encore} \quad \zeta(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(1 - p_k^{-x})}\,.$$

5) Soit $x > 1$. Puisque, pour tout entier $p > 1$:

$$0 < \int_{0+}^{\frac{1}{\sqrt{p}}} e^{-pt} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \, dt < \int_{0+}^{\frac{1}{\sqrt{p}}} t^{x-2} \, dt = \frac{1}{p^{\frac{x-1}{2}}(x-1)}$$

et

$$0 < \int_{\frac{1}{\sqrt{p}}}^{+\infty} e^{-pt} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \, dt < e^{-\sqrt{p}} \int_{0+}^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \, dt,$$

on a

$$\lim_{p \to +\infty} \int_{0+}^{\frac{1}{\sqrt{p}}} e^{-pt} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \, dt = \lim_{p \to +\infty} \int_{\frac{1}{\sqrt{p}}}^{+\infty} e^{-pt} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \, dt = 0 \, .$$

D'où

$$\begin{aligned} &\lim_{p \to +\infty} \int_{0+}^{+\infty} e^{-pt} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \, dt \\ &= \lim_{p \to +\infty} \int_{0+}^{\frac{1}{\sqrt{p}}} e^{-pt} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \, dt + \lim_{p \to +\infty} \int_{\frac{1}{\sqrt{p}}}^{+\infty} e^{-pt} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \, dt = 0 \, . \end{aligned}$$

6) Soit $x > 1$. Puisque pour tout entier $p > 1$:

$$\begin{aligned} \int_{0+}^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \, dt &= \int_{0+}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} t^{x-1} \, dt \\ &= \sum_{n=1}^{p} \int_{0+}^{+\infty} e^{-nt} t^{x-1} \, dt + \int_{0+}^{+\infty} \sum_{n=p+1}^{+\infty} e^{-nt} t^{x-1} \, dt \\ &= \sum_{n=1}^{p} \int_{0+}^{+\infty} e^{-nt} t^{x-1} \, dt + \int_{0+}^{+\infty} e^{-pt} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \, dt \, , \end{aligned}$$

on obtient, en utilisant 5), que $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{0+}^{+\infty} e^{-nt} t^{x-1} \, dt.$

7) Soit $x > 1$. Puisque pour tout entier $n > 1$:

$$\frac{\Gamma(x)}{n^x} = \int_{0+}^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{t}{n}\right)^x \frac{1}{t} \, dt = \int_{0+}^{+\infty} e^{-ns} s^{x-1} \, ds \, ,$$

on peut écrire, en utilisant 6),

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{\Gamma(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{0+}^{+\infty} e^{-ns} s^{x-1} \, ds = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_{0+}^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \, dt \, .$$

Equations différentielles

9.1 $y(x) = c\,e^{-x} + \dfrac{1}{6}\left(3\,e^{x} + 2\,e^{2x} - 9\cos x + 9\sin x\right).$

9.2 $y(x) = cx\,e^{x} + \left(1 - x^2\right) e^{x}.$

9.3 $y(x) = c\,e^{-x} + 1 - e^{-x}\ln(1 + e^{x}).$

9.4 $y(x) = cx^2 + \dfrac{x^5}{3}.$

9.5 $y(x) = c(x-3)^3 - \dfrac{1}{6}\,(7 + 3x).$

9.6 $y(x) = c\cos^2 x + \cos x.$

9.7 $y(x) = \dfrac{c}{\operatorname{ch} x} + \dfrac{\operatorname{ch} x}{2}.$

9.8 $y(x) = c\cos x + \sin x.$

9.9 $y(x) = c\,e^{-\operatorname{tg} x} - 1 + \operatorname{tg} x.$

9.10 $y(x) = c\dfrac{\cos x}{x} + \dfrac{\sin x}{x}.$

9.11 $y(x) = \left(c + \operatorname{tg}^4 x\right)\cos^2 x.$

9.12 $y(x) = cx^2\,e^{x} - x\,e^{x} - x^2\,e^{x}\operatorname{Arctg} x.$

9.13 $y(x) = \dfrac{c}{1-x^2} + \dfrac{x^3}{3(1-x^2)}.$

9.14 $y(x) = c(1+x^2) + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1+x^2}{2}\,\operatorname{Arctg} x.$

9.15 $y(x) = cx + 2x\left(\sqrt{x-1} - \ln\left(1 + \sqrt{x-1}\right)\right).$

9.16 $y(x) = \dfrac{1}{x}\,\left(c + \sqrt{1+x^2} - \ln\left(1 + \sqrt{1+x^2}\,\right)\right).$

9.17 $y(x) = cx + x\left(\sqrt{1-x^2} + 2\ln x - \ln\left(1 + \sqrt{1-x^2}\right)\right).$

9.18 $y(x) = \dfrac{1}{x^6}\left(c + x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \ln(1+x)\right).$

9.19 $y(x) = cx - \dfrac{x}{\ln x}.$

$\boxed{\textbf{9.20}}$ $y(x) = \dfrac{c}{x} + \dfrac{1}{2x}\left((1+x^2)\operatorname{Arctg}(1+x^2) - \dfrac{1}{2}\ln(2+2x^2+x^4)\right).$

$\boxed{\textbf{9.21}}$ $y(x) = \dfrac{c}{\ln x} + x.$

$\boxed{\textbf{9.22}}$ $y(x) = cx + x\ln x.$

$\boxed{\textbf{9.23}}$ $y(x) = c\left(\dfrac{1-x}{x}\right) + \dfrac{1+(1-x)\ln(1-x)}{x}.$

$\boxed{\textbf{9.24}}$ $y(x) = c\,e^{-x} - 6 + 6x - 3x^2 + x^3.$

$\boxed{\textbf{9.25}}$ $y(x) = cx + \dfrac{x}{2}\ln^2 x.$

$\boxed{\textbf{9.26}}$ $y(x) = \dfrac{c}{1+\ln x} + x.$

$\boxed{\textbf{9.27}}$ $y(x) = cx\,e^x - \dfrac{x}{2}\left(2\sqrt{1+e^x} + e^x\ln\left(1 + 2\,e^{-x} + 2\,e^{-x}\sqrt{1+e^x}\right)\right).$

$\boxed{\textbf{9.28}}$ $y(x) = cx^2 - x\operatorname{Arctg} x + \left(x^2 - x\right)\ln x - \dfrac{x^2}{2}\ln\left(1+x^2\right) - x.$

$\boxed{\textbf{9.29}}$ $y(x) = \sqrt{x}\left(c + 2\sqrt{x+\sqrt{x}+1} + \ln\left(1 + 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x+\sqrt{x}+1}\right)\right).$

$\boxed{\textbf{9.30}}$ $y(x) = c\dfrac{e^{2x}}{\left(x+1\right)^3}.$

$\boxed{\textbf{9.31}}$ (Poser $z = y^2$) $y(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2}\,x}$, $x > 0$.

$\boxed{\textbf{9.32}}$ (Poser $z = y^2$) $y(x) = x\sqrt{9 - 2\ln x}$, $0 < x < e^{\frac{9}{2}}$.

$\boxed{\textbf{9.33}}$ (Poser $z = y^2$) $y(x) = \dfrac{\sqrt{x(2+\ln^2 x)}}{\sqrt{2}}$, $x > 0$.

$\boxed{\textbf{9.34}}$ (Poser $z = y^2$) $y(x) = -\dfrac{\sqrt{1+\ln^2 x}}{x}$, $x > 0$.

$\boxed{\textbf{9.35}}$ (Poser $z = y^2$) $y(x) = \sqrt{\operatorname{ch} x + x\,e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{9.36}}$ (Poser $z = y^2$) $y(x) = x\sqrt{3x+1}$, $x > -\dfrac{1}{3}$.

$\boxed{\textbf{9.37}}$ (Poser $z = y^2$) $y(x) = \dfrac{x\sqrt{(1+\alpha)x^{2\alpha} - 1}}{\sqrt{\alpha}}$, $x > \dfrac{1}{\sqrt[2\alpha]{1+\alpha}}$.

$\boxed{\textbf{9.38}}$ (Poser $z = y^2$) $y(x) = \sqrt{\dfrac{4-6x}{1+x}}$, $-1 < x < \dfrac{2}{3}$.

$\boxed{\textbf{9.39}}$ (Poser $z = y^3$) $y(x) = \sqrt[3]{4x^3 - 3x^2}$, $x > \dfrac{3}{4}$.

$\boxed{\textbf{9.40}}$ (Poser $z = y^3$) $y(x) = \dfrac{\sqrt[3]{3x^2-1}}{\sqrt[3]{2}x}$, $x > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$\boxed{\textbf{9.41}}$ (Poser $z = y^4$) $y(x) = x\sqrt[4]{1 + 2\ln^2 x}$, $x > 0$.

9.42 (Poser $z(x) = x^2 + y^2(x)$) $y(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

9.43 (Poser $y = z^2$) $y(x) = x^2$, $x > 0$.

9.44 (Poser $y = z^2$) $y(x) = \dfrac{x^4}{4}\,(2 + \ln x)^2$, $x > \dfrac{1}{e^2}$.

9.45 $y(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\left(1 + 4x\right)^{\frac{3}{2}}\right)$, $x > -\dfrac{1}{4}$.

9.46 (Poser $z = y'$) $y(x) = (x-1)\,e^x - \dfrac{e}{2}\,x^2 + \dfrac{2+e}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

9.47 (Poser $z = y'$) $y(x) = x^2 - x\ln x$, $x > 0$.

9.48 (Poser $z = y'$) $y(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{19}{12}$, $x \in \mathbb{R}$.

9.49 (Poser $z = y'$) $y(x) = c_1x^2 + c_2 - \dfrac{x}{4} - \dfrac{5}{12}\,x^3 + \left(\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{4}\right)\operatorname{Arctg} x$.

9.50 (Poser $z = y'$) $y(x) = c_1x^2 + c_2 - x - \dfrac{\ln^2 x}{8} - \dfrac{\ln x}{8}$.

9.51 $y(x) = c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{-2x} - x\,e^{-2x}$.

9.52 $y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x - \dfrac{x}{2}\,\cos x$.

9.53 $y(x) = c_1\,e^x + c_2x\,e^x + x^2 + 4x + 6 - \dfrac{\cos x}{2}$.

9.54 $y(x) = c_1\,e^x + c_2\,e^{5x} + \dfrac{1}{4}\,x\,e^{5x} + \dfrac{1}{26}\,(2\cos x - 3\sin x)$.

9.55 $y(x) = c_1\,e^{4x} + c_2x\,e^{4x} + \dfrac{x^2}{2}\,e^{4x} + \dfrac{1}{289}\,(15\,\cos x - 8\sin x)$.

9.56
$$y(x) = c_1\,e^{-x}\cos\sqrt{3}\,x + c_2\,e^{-x}\sin\sqrt{3}\,x - \frac{4}{49}\,e^x$$
$$+\frac{x}{7}\,e^x + \frac{1}{13}\,(3\cos x + 2\sin x).$$

9.57 $y(x) = c_1\,e^{-x}\cos 2x + c_2\,e^{-x}\sin 2x + \dfrac{1}{8}\,(\operatorname{ch} x + 5\operatorname{sh} x)$.

9.58 $y(x) = c_1\,e^x + c_2x\,e^x + \dfrac{x^3}{6}\,e^x$.

9.59
$$y(x) = c_1\,e^x + c_2\,e^{3x} - \frac{e^x}{12}\left(3x + 3x^2 + 2x^3\right)$$
$$+\frac{\cos x}{10}\left(2 - 5x\,e^{2x}\right) + \frac{\sin x}{10}\left(1 + 5\,e^{2x}\right).$$

9.60
$$y(x) = c_1\,e^{2x}\cos x + c_2\,e^{2x}\sin x - \frac{x}{2}\,e^{2x}\cos x$$
$$+\frac{1}{625}\left(254 + 530\,x + 425\,x^2 + 125\,x^3\right).$$

9.61 $y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + x\cos x - \sin x\ln(\sin x)$.

9.62 $y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \cos x + \dfrac{\sin 2x}{2} \ln\left(\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right).$

9.63 $y(x) = c_1\, e^x \cos x + c_2\, e^x \sin x - e^x - e^x \sin x \ln\left(\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right).$

9.64 $y(x) = c_1\, e^x + c_2 x\, e^x + \dfrac{x^2}{2}\, e^x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{50}\,(3\cos 2x + 4\sin 2x).$

9.65 $y(x) = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{3x} + \left(-10 + 7x + \dfrac{x^2}{2}\right) e^{4x}.$

9.66 $y(x) = c_1\, e^{-\omega^2 x} + c_2.$

9.67 $y(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x + \dfrac{x}{2\omega} \sin \omega x.$

9.68 1) $\alpha \neq 2$.

$$y(x) = c_1\, e^{(1-\alpha)x} + c_2\, e^{-x} + \frac{\left((\alpha-1)-(\alpha-2)^2\right)\sin(\alpha-2)x - \alpha(\alpha-2)\cos(\alpha-2)x}{\left((\alpha-1)-(\alpha-2)^2\right)^2 + \alpha^2(\alpha-2)^2}\,.$$

2) $\alpha = 2$. $y(x) = c_1\, e^{-x} + c_2 x\, e^{-x}$.

9.69 $y(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x - \dfrac{x}{6} \cos 3x + \dfrac{x}{6} \sin 3x.$

9.70 $y(x) = c_1\, e^{-x} + c_2 + \dfrac{3}{2}\,(\sin x - \cos x).$

9.71 (Poser $z = y'$) $y(x) = c_1 \ln x + c_2 + \dfrac{\ln^3 x}{6}$, $x > 0$.

9.72 (Poser $z = y'$) $y(x) = c_1 x^2 + c_2 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{(1+x^2)}{2}\, \mathrm{Arctg}\, x.$

9.73 $y(x) = \dfrac{c_1}{x} + c_2 x - 4.$

9.74 $y(x) = c_1 x + c_2(-1 + x\ln x) + 2.$

9.75 $y(x) = \dfrac{c_1}{x} + c_2 x + \dfrac{x^2(-4+3\ln x)}{9}$, $x > 0$.

9.76 $y(x) = c_1 x + c_2 x^2 - x^2\left(1 - \dfrac{\ln x}{2}\right)\ln x,\ x > 0.$

9.77 1) $|\alpha| > 1$ et $\alpha \neq \frac{5}{4}$.

$$y(x) = c_1\, e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})x} + c_2\, e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})x} + \frac{e^x}{2(1+\alpha)} + \frac{e^{-2x}}{5-4\alpha}\,.$$

2) $\alpha = 1$. $y(x) = c_1\, e^{-x} + c_2 x\, e^{-x} + \dfrac{e^x}{4} + e^{-2x}$.

3) $\alpha = \frac{5}{4}$. $y(x) = c_1\, e^{-\frac{x}{2}} + c_2\, e^{-2x} + \dfrac{2}{9}\, e^x - \dfrac{2}{3}\, x\, e^{-2x}$.

4) $|\alpha| < 1$.

$$y(x) = e^{-\alpha x}\left(c_1 \cos\sqrt{1-\alpha^2}\,x + c_2 \sin\sqrt{1-\alpha^2}\,x\right) + \frac{e^x}{2(1+\alpha)} + \frac{e^{-2x}}{5-4\alpha}\,.$$

5) $\alpha = -1$. $y(x) = c_1\,e^x + c_2 x\,e^x + \dfrac{x^2}{2}\,e^x + \dfrac{e^{-2x}}{9}$.

9.78 1) $\alpha < -2$ ou $\alpha > 0$.

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1\,e^{(-(1+\alpha)+\sqrt{\alpha(\alpha+2)})x} + c_2\,e^{(-(1+\alpha)-\sqrt{\alpha(\alpha+2)})x} \\ &\quad - 2\big(10+53\,\alpha+68\,\alpha^2+24\,\alpha^3\big) + \big(15+44\,\alpha+24\,\alpha^2\big)x - (5+6\alpha)x^2 + x^3. \end{aligned}$$

2) $\alpha = -2$. $y(x) = c_1\,e^x + c_2 x\,e^x + 32 + 23\,x + 7x^2 + x^3$.

3) $-2 < \alpha < 0$.

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-(1+\alpha)}\left(c_1 \cos\sqrt{-\alpha(\alpha+2)}\,x + c_2 \sin\sqrt{-\alpha(\alpha+2)}x\right) \\ &\quad - 2\big(10+53\,\alpha+68\,\alpha^2+24\,\alpha^3\big) + \big(15+44\,\alpha+24\,\alpha^2\big)x - (5+6\alpha)x^2 + x^3. \end{aligned}$$

4) $\alpha = 0$. $y(x) = c_1\,e^{-x} + c_2 x\,e^{-x} - 20 + 15\,x - 5x^2 + x^3$.

9.79 1) $\underline{\alpha = \omega = 0}$. $y(x) = c_1 x + c_2$.

2) $\alpha = 0$ et $\omega \neq 0$. $y(x) = c_1 x + c_2 - \dfrac{3}{\omega^2}\sin\omega x$.

3) $\alpha \neq 0$ et $|\omega| \neq |\alpha|$. $y(x) = c_1 \cos\alpha x + c_2 \sin\alpha x + \dfrac{3}{\alpha^2-\omega^2}\,\sin\omega x$.

4) $\alpha \neq 0$ et $|\omega| = |\alpha|$. $y(x) = c_1 \cos\alpha x + c_2 \sin\alpha x - \dfrac{3}{2\omega}\,x\cos\omega x$.

9.80 1) $\alpha = \omega = 0$. $y(x) = c_1\,e^{-2x} + c_2 + \dfrac{x}{2}$.

2) $\alpha^2 + \omega^2 \neq 0$. Posons

$$y_0(x) = \frac{\alpha-\omega^2}{\big(\alpha-\omega^2\big)^2 + 4\omega^2}\,\cos\omega x + \frac{2\omega}{\big(\alpha-\omega^2\big)^2 + 4\omega^2}\,\sin\omega x.$$

a) $\alpha < 1$. $y(x) = c_1\,e^{(-1+\sqrt{1-\alpha})x} + c_2\,e^{(-1-\sqrt{1-\alpha})x} + y_0(x)$.

b) $\alpha = 1$. $y(x) = c_1\,e^{-x} + c_2 x\,e^{-x} + y_0(x)$.

c) $\alpha > 1$. $y(x) = c_1\,e^{-x}\cos\sqrt{\alpha-1}\,x + c_2\,e^{-x}\sin\sqrt{\alpha-1}\,x + y_0(x)$.

9.81 $y(x) = c_1\,e^x + c_2(2x+1)\,e^{-x}$.

9.82 $y(x) = c_1 x + c_2(x^2-1) + x^4 + 3x^2$.

9.83 $y(x) = c_1(x+1) + c_2\,e^x + \dfrac{e^x}{x}$.

9.84 $y(x) = \dfrac{c_1}{x} + c_2 x^5 + \dfrac{1}{7x^2}$.

9.85 En faisant le changement de variable $z(x) = x^2 y(x)$, cette équation différentielle se transforme en l'équation différentielle linéaire du second ordre $z''(x) - z(x) = x + 1$. D'où

$$y(x) = \frac{c_1}{x^2}\, e^x + \frac{c_2}{x^2}\, e^{-x} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right).$$

9.86 $y(x) = c_1 x + \dfrac{c_2}{x} - 1 + \dfrac{x^2}{3}$.

9.87 $y(x) = c_1 x^3 + \dfrac{c_2}{x^2} + \dfrac{x^3 \ln x}{5}\left(\dfrac{\ln x}{2} - \dfrac{1}{5}\right)$, $x > 0$.

9.88 (Poser $z = y'$)

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right) \\ &\quad + c_2 + \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}\,\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + \frac{1}{4}\ln^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \frac{x^4}{4}. \end{aligned}$$

9.89 $y(x) = c_1 x + c_2 x^2 - x^2 \ln^2 x + 2x^2 \ln x + \dfrac{x^2}{3}\ln^3 x$, $x > 0$.

9.90 (Poser $z = y'$) $y(x) = c_1 \ln x + c_2 + \dfrac{\ln^3 x}{6}$, $x > 0$.

9.91 $y(x) = c_1 x + c_2\, e^x + x^2$.

9.92 $y(x) = \dfrac{c_1}{x} + c_2 x^3 - \dfrac{\ln x}{3} + \dfrac{2}{9}$, $x > 0$.

9.93 $y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^3 + x^2(3+x)\ln x + \dfrac{3}{2}\, x - \dfrac{1}{6}$.

9.94 $y(x) = c_1 x^2 + \dfrac{c_2}{x^2} - \dfrac{x^2+1}{3x}$.

9.95 $y(x) = \dfrac{c_1}{1+x^2} + c_2\dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{1}{12}\left(5 + 2x + x^2\right)$.

9.96 En effet, ces deux fonctions x et x^2 sont linéairement indépendantes et leur wronskien s'annule au point $x = 0$.

9.97 $f(x) = c_1\, e^{-2\omega x} + c_2\, e^{-\omega x} + \dfrac{1}{2\omega^2}$.

9.98 Notons pour commencer que le rayons de convergence $\mathcal{R}$ de cette série entière est $+\infty$ (critère de d'Alembert).

1) Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $p \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} + \sum_{n=1}^{p} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \sum_{n=0}^{p} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = \sum_{n=0}^{3p} \frac{x^n}{n!}\,,$$

on obtient, par passage à la limite, que

$$\begin{aligned} f''(x)+f'(x)+f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x\,, \end{aligned}$$

2) La fonction f étant l'unique solution l'équation différentielle $y''(x)+y'(x)+y(x)=e^x$ qui satisfait les deux conditions initiales $y(0)=1$ et $y'(0)=0$, on a

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=\frac{2}{3}\,e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\,x+\frac{e^x}{3}\,.$$

Par conséquent, pour $x=1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!}=\frac{2}{3\sqrt{e}}\,\cos\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{e}{3}\,.$$

$\boxed{\mathbf{9.99}}$ Pour commencer, remarquons que le rayon de convergence de la série est infini (critère de d'Alembert) et que, par conséquent, la fonction J_n est bien définie sur tout $\mathbb{R}$. Ainsi, puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-n^2)y(x)=x\big(xy'(x)\big)'+(x^2-n^2)y(x)\,,$$

la fonction J_n est solution de l'équation de Bessel si et seulement si elle est solution de l'équation différentielle

$$x\big(xy'(x)\big)'+(x^2-n^2)y(x)=0\,;$$

ce qui est le cas. En effet, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} xJ_n'(x) &= nJ_n(x)+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2k)(-1)^k}{k!\,(n+k)!\,2^{2k}}\,x^{n+2k} \\ x\big(xJ_n'(x)\big)' &= n^2J_n(x)+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2n+2k)(2k)(-1)^k}{k!\,(n+k)!\,2^{2k}}\,x^{n+2k} \\ &= n^2J_n(x)-x^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!\,\big(n+(k-1)\big)!\,2^{2(k-1)}}\,x^{n+2(k-1)} \\ &= -(x^2-n^2)J_n(x)\,. \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{9.100}}$ 1a) Equation du mouvement : $my''(x)=mg-\sigma\big(y'(x)\big)^2$ avec $y(0)=y'(0)=0$ où σ est une constante positive.

1b) En faisant le changement de variable $z=y'$, la solution de cette équation est

$$y(x)=\frac{m}{\sigma}\,\ln\left(\mathrm{ch}\sqrt{\frac{\sigma g}{m}}\,x\right),\ \ x\geq 0.$$

2) Puisque pour tout $x > 0$:

$$y'(x) = \sqrt{\frac{mg}{\sigma}}\ \mathrm{th}\sqrt{\frac{\sigma g}{m}}\,x$$

et que la fonction th est strictement croissante, la vitesse limite que peut atteindre ce corps est

$$\lim_{x\to+\infty} y'(x) = \sqrt{\frac{mg}{\sigma}}\,.$$

$\boxed{\textbf{9.101}}$ En dérivant les membres de cette égalité par rapport à x, on obtient que la fonction cherchée f est l'unique solution de l'équation différentielle

$$f'(x) - \frac{f(x)}{2x} = \frac{x}{2}$$

qui satisfait la condition initiale $f(1) = 0$. Par conséquent $f(x) = \frac{x^2-\sqrt{x}}{3}$.

$\boxed{\textbf{9.102}}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{-x}\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{\alpha\beta}\,x\right) \text{ et } g(x) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}\,e^{-x}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\alpha\beta}\,x\right).$$

$\boxed{\textbf{9.103}}$ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une telle fonction. Alors, pour $x = y = 0$: $f^2(0) = 1$. Ainsi, en dérivant l'égalité donnée par rapport à y (x étant considéré comme constante), on a

$$f'(x+y)f(x-y) - f(x+y)f'(x-y) = 2f(y)f'(y)\,,$$

ce qui donne, en posant $x = y = 0$, que $f'(0) = 0$. En dérivant à présent cette dernière égalité par rapport à x (dans ce cas c'est y que l'on considère comme constante), on a

$$f''(x+y)f(x-y) - f(x+y)f''(x-y) = 0\,,$$

ce qui donne, en posant $x = y$, que $f''(2x)f(0) - f(2x)f''(0) = 0$.

Par conséquent, en posant $t = 2x$, les fonctions cherchées doivent satisfaire l'équation différientielle linéaire du second ordre $f''(t) - \lambda f(t) = 0$ (λ étant une constante) ainsi que les deux conditions initiales

$$f^2(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 0\,.$$

Ainsi, toutes les fonctions cherchées sont

- si $\lambda > 0$, $f(t) = \pm\,\mathrm{ch}\,\sqrt{\lambda}t$;
- si $\lambda = 0$, $f(t) = \pm 1$;
- Si $\lambda < 0$, $f(t) = \pm\cos\sqrt{-\lambda}t$.

$\boxed{\mathbf{9.104}}$ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1 - \dfrac{3}{2}\,x^2}}$, $|x| < \sqrt{\frac{2}{3}}$.

$\boxed{\mathbf{9.105}}$ $y(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\mathbf{9.106}}$ $y(x) = -\dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\mathbf{9.107}}$ $y(x) = \dfrac{2}{x\big(2 + \ln^2 x\big)}$, $x > 0$.

$\boxed{\mathbf{9.108}}$ $y(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x > 0$.

$\boxed{\mathbf{9.109}}$ $y(x) = \dfrac{\alpha\, e^{2\alpha x}}{1 + e^{2\alpha x}}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\mathbf{9.110}}$ $y(x) = \dfrac{\alpha\, e^{\alpha x}}{\beta(1 + e^{\alpha x})}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\mathbf{9.111}}$ $y(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 - \ln(1 + x^2) + \ln 2}$, $x > 0$.

$\boxed{\mathbf{9.112}}$ $y(x) = \dfrac{2x^2}{2\cos x + 1 - 2\cos 1}$, $x \in \left]0, \operatorname{Arccos}\!\left(\cos 1 - \dfrac{1}{2}\right)\right[$.

$\boxed{\mathbf{9.113}}$ $y(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2 - x^2}}$, $x \in \left]0, \sqrt{2}\right[$.

$\boxed{\mathbf{9.114}}$ $y(x) = \dfrac{e^{\sin x}}{\sqrt{e - e^{2\sin x}}}$, $x \in \left]-\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right[$.

$\boxed{\mathbf{9.115}}$ $y(x) = \dfrac{e^{\cos x}}{\sqrt{e - e^{2\cos x}}}$, $x \in \left]\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right[$.

$\boxed{\mathbf{9.116}}$ $y(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\mathbf{9.117}}$ $y(x) = \dfrac{2x}{1 - \ln^2 x}$, $x \in \left]\dfrac{1}{e}, e\right[$.

$\boxed{\mathbf{9.118}}$ $y(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1 - \sin 2x}}$, $x \in \left]-\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$.

$\boxed{\mathbf{9.119}}$ $y(x) = \dfrac{2x}{\sqrt[3]{4 - 3x^8}}$, $x \in \left]0, \sqrt[8]{\dfrac{4}{3}}\right[$.

$\boxed{\mathbf{9.120}}$ $y(x) = \dfrac{2x}{\sqrt[8]{257 - 256\,x^8}}$, $|x| < \dfrac{\sqrt[8]{257}}{2}$.

$\boxed{\mathbf{9.121}}$ $y(x) = \dfrac{3\sqrt{2}\,x}{\sqrt{\big(9 + 16\sqrt{2}\big) - 8\big(1 + x^3\big)^{\frac{3}{2}}}}$, $x \in \left]0, \sqrt[3]{\left(\dfrac{9}{8} + 2\sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}\right[$.

$\boxed{\mathbf{9.122}}$ $y(x) = \dfrac{2}{\sqrt[4]{16 - 15\,\big(1 + x^2\big)^4}}$, $|x| < \sqrt{\dfrac{2}{\sqrt[4]{15}} - 1}$.

$\boxed{\textbf{9.123}}$ $y(x) = \dfrac{2(1+x)}{1 - 2\operatorname{Arctg} x - \ln\bigl(1+x^2\bigr)}$, $x \in \left]-1, \alpha\right[$

où α est l'unique zéro positif du dénominateur.

$\boxed{\textbf{9.124}}$ $y(x) = \dfrac{2\,e^{4x}}{\sqrt{2\,e^{8x} - 1}}\,, x > -\dfrac{\ln 2}{8}\,.$

$\boxed{\textbf{9.125}}$ $y(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{27}\sqrt{\left(7-6x\right)^3} & \text{si } 0 < x < \dfrac{7}{6} \\ 0 & \text{si } x \geq \dfrac{7}{6}\,. \end{cases}$

$\boxed{\textbf{9.126}}$ $y(x) = \dfrac{x}{8}\left(3 - \sqrt[3]{x^2}\right)^3$, $x > 0$ ou

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{8}\left(3 - \sqrt[3]{x^2}\right)^3 & \text{si } 0 < x < 3\sqrt{3} \\ 0 & \text{si } x \geq 3\sqrt{3}. \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{9.127}}$ Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $y \neq 0$. Alors, il existe $a \in I_1$ tel que $\beta = y(a) \neq 0$. Pour les besoins de la démonstration, on va faire l'hypothèse supplémentaire que $a > x_0$ (l'autre cas se traitant de façon similaire) et posons

$$c = \sup\left\{x \in [x_0, a[\ : y(x) = 0\right\}.$$

Ainsi, $x_0 \leq c < a$ et $y(c) = 0$ et, puisque y est solution de l'équation de Bernoulli avec $m > 1$, on aura

$$\begin{aligned} 0 = y(c) &= \lim_{x\to c} y(x) \\ &= \lim_{x\to c} \beta w(x)\left(1 + (1-m)\beta^{m-1}\int_a^x f(t) w^{m-1}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{1-m}} \neq 0 \end{aligned}$$

avec $w(x) = e^{-\int_a^x p(t)\,dt}$; ce qui est impossible. D'où contradiction.

$\boxed{\textbf{9.128}}$ $\overline{y}(x) = \dfrac{1}{x}$. $y(x) = \dfrac{3x^4+5}{x(5-x^4)}$, $x \in \left]0, \sqrt[4]{5}\right[$.

$\boxed{\textbf{9.129}}$ $\overline{y}(x) = e^{-x}$. $y(x) = -\dfrac{1}{1+x} + e^{-x}$, $x > -1$.

$\boxed{\textbf{9.130}}$ $\overline{y}(x) = e^{x}$. $y(x) = -\dfrac{1}{1+x} + e^{x}$, $x > -1$.

$\boxed{\textbf{9.131}}$ $\overline{y}(x) = -1$. $y(x) = \dfrac{8+e^{3x}}{4-e^{3x}}$, $x < \dfrac{\ln 4}{3}$.

$\boxed{\textbf{9.132}}$ $y(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x^3}{3}$, $|x| < \sqrt[3]{\dfrac{3\pi}{2}}$.

$\boxed{\textbf{9.133}}$ $\overline{y}(x) = -\dfrac{1}{x}$, $y(x) = \dfrac{2\bigl(x^3-1\bigr)}{x\bigl(x^3+2\bigr)}$, $x > 0$.

$\boxed{\textbf{9.134}}$ $\overline{y}(x) = 1$, $y(x) = 1 + \dfrac{1}{1+\ln x}$, $x > \dfrac{1}{e}$.

$\boxed{\textbf{9.135}}$ $y(x) = \operatorname{Arcsin} \dfrac{x^2}{2}$, $|x| < \sqrt{2}$.

$\boxed{\textbf{9.136}}$ $y(x) = 2 \operatorname{Arctg} e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{9.137}}$ $y(x) = -1 + \sqrt{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{9.138}}$ $y(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$, $|x| < 1$.

$\boxed{\textbf{9.139}}$ $y(x) = -\operatorname{tg} \dfrac{x^2}{2}$, $|x| < \sqrt{\pi}$.

$\boxed{\textbf{9.140}}$ $y(x) = -\operatorname{tg} \dfrac{x^3}{3}$, $|x| < \sqrt[3]{\dfrac{3\pi}{2}}$.

$\boxed{\textbf{9.141}}$ $y(x) = \dfrac{e^{x^3}}{2 - e^{x^3}}$, $x < \sqrt[3]{\ln 2}$.

$\boxed{\textbf{9.142}}$ $y(x) = -\ln\left(\ln \dfrac{e}{\sqrt{1+x^2}}\right)$, $|x| < \sqrt{e^2-1}$.

$\boxed{\textbf{9.143}}$ $y(x) = \sqrt{-1 + e^{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

$\boxed{\textbf{9.144}}$ $y(x) = -\operatorname{tg} \dfrac{1}{x}$, $x > \dfrac{2}{\pi}$.

$\boxed{\textbf{9.145}}$ $y(x) = \sqrt[3]{x^3+8}$, $x > -2$.

$\boxed{\textbf{9.146}}$ $y(x) = \dfrac{e^x}{2\,e^x - 1}$, $x > -\ln 2$.

$\boxed{\textbf{9.147}}$ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

$\boxed{\textbf{9.148}}$ $y(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2} \ln^2 x\right)$, $x \in \left]e^{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}, e^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\right[$.

$\boxed{\textbf{9.149}}$ $y(x) = \sqrt{4-x^4}$, $|x| < \sqrt{2}$.

$\boxed{\textbf{9.150}}$ $y(x) = \ln\left(\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2} + 1\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{9.151}}$ $y(x) = \operatorname{Arctg} \sqrt{3 - 2\,e^x}$, $x < \ln \dfrac{3}{2}$.

$\boxed{\textbf{9.152}}$ $y(x) = \operatorname{Arctg} \sqrt{1 - \dfrac{x^4}{2}}$, $|x| < \sqrt[4]{2}$.

$\boxed{\textbf{9.153}}$ $y(x) = \operatorname{tg} \dfrac{x^2}{2}$, $|x| < \sqrt{\pi}$.

$\boxed{\textbf{9.154}}$ $y(x) = 1 + \dfrac{1}{4}\left(\ln(x-3) - \dfrac{3}{x-3} + 5\right)^2$, $x > 3$.

$\boxed{\textbf{9.155}}$ $y(x) = \sqrt{1 + 3\,e^{2x}}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{9.156}}$ $y(x) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,x + \sqrt{1-x^2}\right)$, $x \in \left]-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$.

$\boxed{\textbf{9.157}}$ $y(x) = \sqrt{x^2\, e^{x^2} - 1}$, $x > \alpha$ où α est l'unique solution positive de l'équation $x^2\, e^{x^2} - 1 = 0$.

$\boxed{\textbf{9.158}}$ $y(x) = \sqrt{\ln\bigl(x^2 - 2\cos x + 2 + e\bigr)}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{9.159}}$ $y(x) = \sqrt{-1 + 2\sqrt{1 + \sin^2 x}}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{9.160}}$ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1 - 3\ln x}}$, $0 < x < \sqrt[3]{e}$.

$\boxed{\textbf{9.161}}$ $y(x) = -1 + \sqrt{1 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{9.162}}$ (Poser $y(x) = xz(x)$) $y(x) = x\, e^{\sqrt{2(x-1)+\ln^2 2}}$, $x > 1 - \dfrac{\ln^2 2}{2}$.

$\boxed{\textbf{9.163}}$ (Poser $y(x) = xz(x)$) $y(x) = x\sqrt{1 - \dfrac{1}{\ln \dfrac{x}{e}}}$, $0 < x < e$.

$\boxed{\textbf{9.164}}$ $y(x) = 4\,\text{Arctg}\; e^{2(1-\sin\frac{x}{2})}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{9.165}}$ $y(x) = -\dfrac{3}{2}\pi + 6\,\text{Arctg}\; e^{\frac{2}{3}\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{9.166}}$ (Poser $z = \bigl(y'\bigr)^2$) $y(x) = 1 + \text{Arcsin}(e^x - 1)$, $x < \ln 2$.

$\boxed{\textbf{9.167}}$ $y(x) = -\sqrt{-1 + e^{2(\frac{x^3}{3}+e^x+1)}}$, $x > \alpha$ où α est l'unique solution de l'équation $\frac{x^3}{3} + e^x + 1 = 0$ qui, de plus, est négative.

$\boxed{\textbf{9.168}}$ $y(x) = \sqrt{\dfrac{3x^2+1}{3x^2-1}}$, $x > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$\boxed{\textbf{9.169}}$ $y(x) = \sqrt{2x+1}$, $x > -\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\textbf{9.170}}$ (Poser $z = y'$) $y(x) = -\ln\cos x$, $|x| < \dfrac{\pi}{2}$.

$\boxed{\textbf{9.171}}$ $y(x) = \left(\dfrac{x}{2} + 1\right)^2 - \sin x$, $x > -2$.

$\boxed{\textbf{9.172}}$ $y(x) = \dfrac{1+x}{2+x}$, $x > -2$.

$\boxed{\textbf{9.173}}$ $y(x) = \dfrac{1 + 2\,e^{-x^3}}{3}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{9.174}}$ Puisque $y(1) = \frac{\pi}{2}$ et pour tout $x \in \,]0, +\infty[\, : y'(x) = \frac{\sin y(x)}{x}$, on obtient, en intégrant, $y(x) = 2\,\text{Arctg}\, x$.

$\boxed{\textbf{9.175}}$ $y(x) = x\ln x^2$, $x > 0$.

$\boxed{\textbf{9.176}}$ $y(x) = x\ln(\ln ex)$, $x > \dfrac{1}{e}$.

$\boxed{\textbf{9.177}}$ $y(x) = x\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{9.178}}$ $y(x) = x\,\text{Arctg}(1 + \ln x)$, $x > 0$.

$\boxed{\mathbf{9.179}}$ $y(x) = 2x \operatorname{Arctg} e^{1-x^2}$, $x > 0$.

$\boxed{\mathbf{9.180}}$ $y(x) = x \operatorname{Arcsin} \dfrac{x}{2}$, $0 < x < 2$.

$\boxed{\mathbf{9.181}}$ $y(x) = x \operatorname{Arcsin} \dfrac{e^{1-x}}{2}$, $x > 1 - \ln 2$.

$\boxed{\mathbf{9.182}}$ $y(x) = x \ln^2 \dfrac{e}{x}$, $0 < x < e$.

$\boxed{\mathbf{9.183}}$ $y(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\mathbf{9.184}}$ $y(x) = x - \dfrac{\sqrt{4x^2 - 3}}{2}$, $x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\boxed{\mathbf{9.185}}$ $y(x) = \dfrac{x(x^2 - 1)}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\mathbf{9.186}}$ (Poser $z = y'$) $y(x) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x^2 + 1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\mathbf{9.187}}$ $y(x) = x\, e^{x \ln 2}$, $x > 0$.

$\boxed{\mathbf{9.188}}$ $y(x) = \dfrac{x}{2} \left(-1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right)$, $e^{-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}} < x < e^{\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}$.

$\boxed{\mathbf{9.189}}$ $y(x) = -(x + 2) + \sqrt{2 - (x - 1)^2}$, $|x - 1| < \sqrt{2}$.

$\boxed{\mathbf{9.190}}$ 1) Soit $x \in I$. Puisque $\omega[y_1, y_2](x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \neq 0$, on doit obligatoirement avoir $y_1^2(x) + y_2^2(x) \neq 0$.

2) Raisonnons par l'absurde et supposons que la fonction y_2 ne s'annule pas dans $]a, b[$. Ainsi, d'après 1), on a que pour tout $x \in [a, b]$: $y_2(x) \neq 0$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{y_1(x)}{y_2(x)}\,.$$

Cette fonction est continue et, de plus, pour tout $x \in \,]a, b[$:

$$f'(x) = -\frac{\omega[y_1, y_2](x)}{y_2^2(x)} \neq 0.$$

Comme $f(a) = f(b) = 0$, d'après le théorème de Rolle, une telle fonction f n'existe pas. D'où contradiction.

3) Raisonnons de nouveau par l'absurde et supposons que $\alpha \in I$ est un zéro non isolé de la fonction y_1. Alors, il existe une suite $\big(\alpha_n\big)$ d'éléments distincts de $I \setminus \{\alpha\}$ qui converge vers α et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $y_1(\alpha_n) = 0$.

D'après 2), on sait qu'à tout entier $n \geq 0$, on peut associer un élément β_n de I strictement compris entre α_n et α_{n+1} et telle que $y_2(\beta_n) = 0$. Comme, par construction, $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n = \alpha$, on a, grâce à la continuité de la fonction y_2, que

$$y_2(\alpha) = \lim_{n \to +\infty} y_2(\beta_n) = 0\ ;$$

ce qui, d'après 1), est impossible. D'où contradiction.

$\boxed{\mathbf{9.191}}$ Raisonnons par l'absurde et supposons que l'équation différentielle proposée possède une solution $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ qui ne s'annule qu'un nombre fini de fois. Alors, il existe un nombre $a > 0$ tel que pour tout $x \geq a : y(x) \neq 0$; ce qui implique, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, que la fonction y garde un signe constant sur $[a, +\infty[$.

Pour les besoins de la démonstration, on va supposer que pour tout $x \geq a$: $y(x) > 0$ (l'autre cas se traitant de la même manière). Considérons à présent la fonction auxiliaire $z : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$z(x) = -\frac{y'(x)}{y(x)} \,.$$

Ainsi, en remarquant que pour tout $x > a : z'(x) = q(x) + z^2(x)$, on obtient pour tout $x > a$:

$$\begin{aligned} z(x) = z(a) + \int_a^x z'(t)\,dt &= z(a) + \int_a^x q(t)\,dt + \int_a^x z^2(t)\,dt \\ &\geq z(a) + \int_a^x q(t)\,dt \;; \end{aligned}$$

ce qui entraîne, du fait que $\int_1^{+\infty} q(t)\,dt = +\infty$, l'existence d'un nombre $b > a$ tel que $z(b) > 0$. Par conséquent

$$y'(b) = -y(b)z(b) < 0.$$

D'autre part, puisque pour tout $x > a : y''(x) = -q(x)y(x) < 0$, la fonction y' est strictement décroissante sur $]a, +\infty[$. Ainsi, en utilisant le théorème des accroissements finis, on peut écrire que pour tout $x \in]b, +\infty[$:

$$y(x) < y(b) + y'(b)(x - b).$$

Finalement, de ces résultats, on déduit immédiatement qu'il existe un nombre $c > b$ tel que $y(c) < 0$. D'où contradiction.

Formulaire

Tableau 1 Valeurs exactes des fonctions trigonométriques de quelques arcs.

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$
0	0	1	0	$-$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$-$	0

Tableau 2 Relations entre les fonctions trigonométriques de certains arcs.

$\sin(-x) = -\sin x$	$\cos(-x) = \cos x$	$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg}(\pi - x) = -\operatorname{cotg} x$
$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg}(\pi + x) = \operatorname{cotg} x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cotg} x$	$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{cotg} x$	$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{tg} x$

Tableau 3 Formules de multiplication et bissection des arcs.

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$	$\sin x = \dfrac{2\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}$	$2\sin^2\frac{x}{2} = 1-\cos x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cos x = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}$	$2\cos^2\frac{x}{2} = 1+\cos x$
$\mathrm{tg}\,2x = \dfrac{2\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}^2 x}$	$\mathrm{tg}\,x = \dfrac{2\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}$	$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

Tableau 4 Formules d'addition des arcs.

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$	$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$
$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$	$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$
$\mathrm{tg}\,(x+y) = \dfrac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y}{1-\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y}$	$\mathrm{tg}\,(x-y) = \dfrac{\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}\,y}{1+\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y}$

Tableau 5 Transformation d'une somme en un produit.

$\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$	$\sin x - \sin y = 2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$
$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$	$\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x-y}{2}\sin\dfrac{x+y}{2}$
$\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$	$\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,y = \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$

Tableau 6 Tranformation d'un produit en une somme.

$2\sin x\sin y = -\cos(x+y) + \cos(x-y)$
$2\sin x\cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$
$2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$
$2\cos x\sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y)$

Tableau 7 Dérivées – Primitives.

$f(x) = F'(x)$	$f'(x)$	$F(x)$	Conditions
a	0	ax	
x^α	$\alpha\, x^{\alpha-1}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\alpha \neq -1,\ x > 0$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$	$\ln\lvert x\rvert$	$x \neq 0$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{-2x}{\left(a^2+x^2\right)^2}$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{Arctg}\dfrac{x}{a}$	$a \neq 0$
$\dfrac{1}{a^2-x^2}$	$\dfrac{2x}{\left(a^2-x^2\right)^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert$	$a \neq 0,\ x \neq \pm a$
$\dfrac{1}{x^2-a^2}$	$\dfrac{-2x}{\left(x^2-a^2\right)^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert$	$a \neq 0,\ x \neq \pm a$
$\sqrt{x^2+a^2}$	$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\dfrac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$	$a \neq 0$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\dfrac{a^2}{2}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert$	$a \neq 0,\ \lvert x\rvert > \lvert a\rvert$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\operatorname{Arcsin}\dfrac{x}{a}$	$a > 0,\ \lvert x\rvert < a$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\dfrac{-x}{\sqrt{\left(x^2+a^2\right)^3}}$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$	$a \neq 0$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\dfrac{-x}{\sqrt{\left(x^2-a^2\right)^3}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert$	$a \neq 0,\ \lvert x\rvert > \lvert a\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\dfrac{x}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}$	$\operatorname{Arcsin}\dfrac{x}{a}$	$a > 0,\ \lvert x\rvert < a$
e^x	e^x	e^x	
a^x	$a^x\ln a$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$a > 0,\ a \neq 1$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$x(\ln x - 1)$	$x > 0$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\ln a}$	$x(\log_a x - \log_a e)$	$a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$

Tableau 7 Dérivées – Primitives (suite).

$f(x) = F'(x)$	$f'(x)$	$F(x)$	Conditions
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	
$\operatorname{tg} x$	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
$\operatorname{cotg} x$	$-(1 + \operatorname{cotg}^2 x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$x \neq k\pi$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$	$\ln\left\lvert\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right\rvert$	$x \neq k\pi$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$	$\ln\left\lvert\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert = \ln\left\lvert\dfrac{1+\sin x}{\cos x}\right\rvert$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
$\operatorname{Arcsin} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2}$	$\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{Arccos} x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\operatorname{Arccos} x - \sqrt{1-x^2}$	$\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{Arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$x\operatorname{Arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$	
$\operatorname{Arccotg} x$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$	$x\operatorname{Arccotg} x + \ln\sqrt{1+x^2}$	
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch} x$	
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{sh} x$	
$\operatorname{th} x$	$1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\ln\operatorname{ch} x$	
$\operatorname{coth} x$	$1 - \operatorname{coth}^2 x = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$\ln\lvert\operatorname{sh} x\rvert$	$x \neq 0$
$\operatorname{Argsh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x\operatorname{Argsh} x - \sqrt{x^2+1}$	
$\operatorname{Argch} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x\operatorname{Argch} x - \sqrt{x^2-1}$	$x > 1$
$\operatorname{Argth} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$x\operatorname{Argth} x + \ln\sqrt{1-x^2}$	$\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{Argcoth} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$x\operatorname{Argcoth} x + \ln\sqrt{x^2-1}$	$\lvert x\rvert > 1$

Tableau 8 Développements limités.

$f(x)$	Partie principale du développement limité de f autour du zéro
e^x	$1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$
$\sin x$	$x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cos x$	$1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\operatorname{tg} x$	$x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15} x^5 + \dfrac{17}{315} x^7 + \dfrac{62}{2\,835} x^9$
$\operatorname{Arcsin} x$	$x + \dfrac{1}{2} \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (2n)} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$
$\operatorname{Arccos} x$	$\dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{1}{2} \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \dfrac{x^5}{5} - \cdots - \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (2n)} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$
$\operatorname{Arctg} x$	$x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$
$\operatorname{sh} x$	$x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\operatorname{ch} x$	$1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\operatorname{Argsh} x$	$x - \dfrac{1}{2} \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \dfrac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (2n)} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$
$\operatorname{Argth} x$	$x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$
$\dfrac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n$
$\dfrac{1}{(1+x)^2}$	$1 - 2x + 3x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n (n+1) x^n$
$\sqrt{1+x}$	$1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2 \cdot 4} x^2 + \cdots + (-1)^{n+1} \dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} x^n$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$	$1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 + \cdots + (-1)^n \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} x^n$
$\ln(1+x)$	$x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n}$
$\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$	$2\left(x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)}\right)$

Bibliographie

[1] J. Douchet, B. Zwahlen, *Calcul différentiel et intégral*, PPUR, 2006.

[2] N. Piskounov, *Calcul différentiel et intégral* **1** & **2**, Ed. Ellipses, 1993.

[3] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, Wiley, 1993.

[4] F. Ayres, E. Mendelson, *Calcul différentiel et intégral*, McGraw-Hill, 1993.

[5] M. R. Spiegel, *Analyse*, McGraw-Hill, 1992.

[6] Swokowski, DeBoeck Université, 1995.

[7] W. J. Kaczor, M. T. Nowak, *Problems in Mathematical Analysis*, STML **4**, **12** & **21**, AMS, 2000.

[8] A. Bouvier, *Théorie élémentaire des séries*, Hermann, 1971.

Index

M

N

P

R

S

T