Formulaire – Algèbre linéaire

Juliette GR

Semestre d'automne 2021

Table des matières

Présentation

Coucou *c'est* **moi** je m'amuse *beaucoup* **avec** LaTeX

Salut, moi c'est Juliette ! Je suis assistante en Algèbre linéaire pour la classe inversée (Pr. Christian Urech) et en Analyse I pour les BA1 de la section Informatique (Pr. Anna Lachowska) et étudiante en BA3 en section de Génie Mécanique à l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne.

Lors de mes études, j'ai galéré sur les mêmes exos-types, encore et encore, en boucle. Et maintenant, en assistanat, je remarque qu'on me pose exactement les mêmes questions récurrentes. Donc comme j'adore mon job d'assistante, que j'aime bien LaTeX et que j'ai un peu de temps pour, j'ai commencé un formulaire d'algèbre linéaire comprenant un récapitulatif des méthodes de résolution des exercices type-examen et des définitions indispensables.

Le formulaire qui suit est donc destiné aux étudiants passant l'examen propédeutique d'Algèbre linéaire. Il est en cours de construction donc absolument pas exhaustif. Pour avoir la dernière version en date, il faut aller sur ce **drive**, je mettrai à jour le formulaire ici. (Accessible uniquement avec une adresse mail EPFL.)

Remarque Globalement, on sait tous que le théorème "Je ne comprends pas la correction, donc c'est qu'il y a un erreur dedans i.e. le prof s'est trompé." est faux (hélas). Cependant, ici, je n'ai certainement pas la prétention d'être exempte de fautes de frappes, de copier/coller à outrance et de boulettes en général. Donc si tu remarques quelque chose qui semble incohérent, fais-le moi savoir par **mail** ou directement par **tel** sur WhatsApp 😃

Comment s'entraîner au mieux

Juste pour rappeler que le meilleur entraînement pour les partiels est de faire des examens blancs. Donc j'ai fait une compilation de tous les sujets d'anciens examens de l'EPFL que j'ai pu trouver (toutes sections confondues) que j'ai mise sur le **drive**.

Penser à travailler en groupe aussi ! L'entraide entre étudiants pendant les révisions, c'est le meilleur moyen de garder la motiv et de se faire expliquer ou d'expliquer des exos et d'éjecter des problèmes de compréhension qu'un prof aurait peut-être plus de mal à cerner.

Donc mon conseil : faire des anciens examens en conditions réelles avec des amis, puis corriger ensemble, crois-moi c'est la manière la plus efficace de s'entraîner ☺

Attention

Erreur corrigée en page 34 : $\cancel{R = Q^T R} \longrightarrow R = Q^T A$

1 Matrices inversibles

1.1 Équivalences

Soit A une matrice $n \times n$. Alors ces propriétés sont équivalentes :

- A est inversible
- $\forall b \in \mathbb{R}^n : Ax = b$ admet une unique solution $x = A^{-1}b$
- Les colonnes $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de A engendrent $\mathbb{R}^n$.
  C'est-à-dire que $\operatorname{Span}\{a_1, \ldots, a_n\} = \mathbb{R}^n$
- A possède n pivots
- A possède 1 pivot par ligne
- A possède 1 pivot par colonne
- Les colonnes de A sont linéairement indépendantes
- L'équation $Ax = 0$ admet une unique solution : la solution triviale.
- A est équivalente à la matrice identité I_n
- On peut passer de A à I_n avec l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan
- A est un produit de matrices élémentaires
- L'application linéaire $x \mapsto Ax$ est surjective
- L'application linéaire $x \mapsto Ax$ est injective
- A^T est inversible
- Le déterminant de A est non nul.
  C'est-à-dire que $\det A \neq 0$
- 0 n'est pas une valeur propre de A
- $\operatorname{rg} A = n$
- $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ 0 étant ici le vecteur nul

1.2 Quelques trucs de base à bien retenir

Soient A, B deux matrices $n \times n$ inversibles.

- $AA^{-1} = I_n$ et $A^{-1}A = I_n$
- $\det A \times \det A^{-1} = 1$, c'est-à-dire $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- Si A est une matrice 2×2 inversible avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- Une matrice inversible est toujours carrée (elle a autant de lignes que de colonnes)

- Une matrice de passage est toujours inversible.
- Un produit de deux matrices carrées est inversible si et seulement si chacune des deux matrices est inversible.
- Si A est symétrique, alors A^{-1} est aussi symétrique.

2 Produit matriciel

Condition Le produit de deux matrices n'existe que si le nombre de colonnes de la première matrice est le même que le nombre de lignes de la deuxième matrice.

Définition Soient A une matrice $m \times n$ de coefficients $a_{i,j}$ et B une matrice $n \times m$ de coefficients $b_{i,j}$.
On pose $(AB)_{i,j}$ les coefficients de la matrice AB.

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1} b_{1,j} + \cdots + a_{i,n} b_{n,j}$$

Propriétés

- Le produit matriciel est **associatif** : $A(BC) = (AB)C$
- Le produit matriciel est **distributif** : $A(B + C) = AB + AC$
- Le produit matriciel est compatible avec la multiplication par un scalaire : $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
- La matrice identité est un élément neutre pour la multiplication : $AI_n = A$ et $I_n A = A$
- Le produit de A avec la matrice nulle donne la matrice nulle : $(0)A = 0$ et $A(0) = 0$
- La matrice produit d'une matrice $m \times n$ et d'une matrice $n \times k$ est une matrice $m \times k$
- Le produit matriciel **n'est pas** commutatif : on n'a pas le droit d'écrire $AB = BA$
- On **ne peut pas diviser par une matrice** : on n'a pas le droit d'écrire $\frac{A}{B}$ par exemple.

Multiplication par un scalaire Multiplier A par k revient à multiplier chacun de ses coefficients par k.

$$B = kA \Longrightarrow b_{i,j} = k a_{i,j} \quad \forall\ i, j \in [\![1, n]\!]$$

Méthode Chacun des coefficients de la matrice produit AB est le produit du vecteur associé à l'une des lignes de A et du vecteur associé à l'une des colonnes de B.

$$(AB)_{i,j} = (\operatorname{lgn} A)_i (\operatorname{col} A)_j = \begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} = a_{i,1} b_{1,j} + \cdots + a_{i,n} b_{n,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

3 Espaces vectoriels

Remarque L'ensemble $\mathbb{K}$ représente l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ ou l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$.

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Dans le contexte du cours d'Algèbre linéaire propédeutique, à quelques exceptions près, il s'agira toujours de $\mathbb{R}$. Les espaces vectoriels étudiés seront ainsi quasiment toujours sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$. Dans les exercices, il ne sera donc pas nécessaire de systématiquement noter "$\mathbb{R}$-espace vectoriel" ou bien "espace vectoriel sur $\mathbb{R}$" car cela sera implicite. On se contentera en général de la notation "espace vectoriel".

Cependant, pour rendre les définitions suivantes complètes, je préciserai bien "$\mathbb{K}$-espace vectoriel" ou "espace vectoriel sur $\mathbb{K}$".

3.1 Espace vectoriel

Définition Un **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble E muni de deux lois,

- une loi **interne**, notée ≪ + ≫ définie + : $\begin{cases} E \times E & \to E \\ (u, v) & \mapsto u + v \end{cases}$

- une loi **externe**, notée ≪ · ≫ définie · : $\begin{cases} \mathbb{K} \times E & \to E \\ (\lambda, u) & \mapsto \lambda \cdot v \end{cases}$

telles que les **huit axiomes** suivants soient vérifiées $\forall u, v, w \in E$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

1. $u + v = v + u$
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. $\exists 0_E \in E$ tel que $v + 0_E = v$
4. $\exists - v \in E$ tel que $v + (-v) = 0$
5. $1 \cdot v = v$
6. $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$
7. $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$
8. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$

Vocabulaire

- Les éléments de E sont appelés **vecteurs**
- Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés **scalaires**
- $-v$ est appelé **opposé** du vecteur v
- 0_E est appelé **vecteur nul**

Notations

- En algèbre linéaire, le 0 a différentes significations selon le contexte. Il peut s'agir du réel $0 \in \mathbb{R}$ (le scalaire nul $0_{\mathbb{R}}$ i.e. celui qu'on a utilisé jusque là en mathématiques simples), il peut s'agir du 0 de l'espace vectoriel E (le vecteur nul 0_E), etc. En général, on ne notera jamais l'indice $\mathbb{R}$ de $0_{\mathbb{R}}$, E de 0_E, etc, car trop lourd en notations. Il dépend donc du lecteur de comprendre dans le contexte de quel 0 on parle.

- La loi externe $\ll \cdot \gg$ ne sera en général pas notée $\lambda \cdot v$ mais plutôt directement λv, pour aller plus vite. Pour éviter les confusions entre "qui est le vecteur" et "qui est le scalaire" entre λ et v, on respectera autant que possible la convention suivante : le scalaire en premier, suivi du vecteur. En gros, on n'écrira jamais $v\lambda$ mais plutôt λv.

Proposition Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\lambda v = 0 \textit{ si et seulement si } \lambda = 0 \text{ ou } u = 0$$

3.2 Sous-espace vectoriel

Définition Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E si F est une partie de E et si F vérifie :

1. $0_E \in F$ (Rmq : il s'agit donc ici du 0 vectoriel i.e. le vecteur nul, et non le réel 0)
2. $\forall u, v \in F, \qquad u + v \in F$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v \in F, \qquad \lambda v \in F$

On dit que F est stable pour les deux lois $\ll + \gg$ et $\ll \cdot \gg$, et donc que F a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque On condense en général les conditions 2. et 3. en une seule :

$$\forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad u + \lambda v \in F$$

Méthode Pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, on prendra rarement le temps de démontrer les huit axiomes présentés plus haut (parce que la flemme, déjà. et aussi parce que pas le temps pendant un exam. et enfin et surtout parce qu'il y a une méthode beaucoup plus simple).

La méthode usuelle est :

1. Montrer que F est une partie d'un espace vectoriel E
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E

Le fait que F appartient à E est en général implicite ou bien même déjà dit dans l'énoncé.

Pour ensuite montrer que c'est un sous-espace vectoriel de E, on suit les axiomes présentés plus haut et on montre donc simplement que :

1. $0_E \in F$
2. $\forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad u + \lambda v \in F$

Voici le raisonnement, étape par étape, qu'on doit tenir :

1. Montrons que $0_E \in F$.
    - Initialisation : On défini le vecteur nul de l'espace-vectoriel E. *Soit 0_E le vecteur nul de E.*

- Démonstration : En général pas très compliqué, voir implicite. (Si ce n'est pas évident, on utilise alors en général le même raisonnement que pour le 2. suivant.)
- Conclusion : On conclue que le vecteur nul de E appartient bien à F. *Donc* $0_E \in F$.

2. Montrons que $\forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, u + \lambda v \in F$.

   - Initialisation : On prend ici deux éléments quelconques de F, et un élément quelconque de $\mathbb{K}$. *Soient* $u, v \in F$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$.
   - Hypothèses : En général, F est défini par une certaine propriété. On part donc de l'hypothèse que puisque u et v appartiennent à F, ils vérifient cette propriété.
   - Démonstration : On montre ensuite que l'élément $u + \lambda v$ vérifie aussi cette propriété.
   - Conclusion : Et que donc $u + \lambda v$ est aussi un élément de F. *Donc* $u + \lambda v \in F$.

4 Familles de vecteurs

4.1 Famille libre, famille liée

Soit $(v_i, ..., v_n)$ une famille de vecteurs.

Définition La famille de vecteurs est dite **libre** (i.e. **linéairement indépendante**) lorsqu'aucun de ses vecteurs ne sont colinéaires (aucun ne peut s'écrire de cette manière : $v_i = \lambda \times v_j$), c'est-à-dire qu'aucun n'est combinaison linéaire d'un autre :

$$\forall \ \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \Longrightarrow \forall \ i \in \mathbb{R}, \lambda_i = 0 \right)$$

Définition La famille de vecteurs est dite **liée** lorsqu'au moins deux de ses vecteurs sont colinéaires, i.e. lorsqu'il existe un ensemble de scalaires $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ non tous nuls (i.e. au moins un des λ_i est égal à 0) tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$:

$$\exists \ (\lambda_1, ..., \lambda_n) \neq (0, ..., 0) \text{ tels que } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$$

Propriétés

- Si l'une des sous-familles d'une famille est liée, alors cette famille est liée.
- Autrement dit, si une famille est libre, alors toutes ses sous-familles sont libres.
- Une famille est liée si et seulement si au moins l'un de ses éléments est combinaison linéaire des autres.
- Toute famille comportant le vecteur nul est liée
- La famille (v) composée d'un seul vecteur est libre si et seulement si v est non nul (i.e. $v \neq 0$).
- La famille vide (composée d'aucun vecteur) est libre

Méthode de base On utilise la définition.

Par exemple, pour montrer qu'une famille (v, w) de $\mathbb{R}^2$ (i.e. chacun de ses vecteurs est formé de deux composantes) est libre :

1. On pose λ_1 et λ_2 deux scalaires (i.e. deux réels) tels que $\lambda_1 v + \lambda_2 w = 0$ avec 0 le vecteur nul.
2. Cela revient au système suivant : $\begin{cases} v_1\lambda_1 + w_1\lambda_2 = 0 \\ v_2\lambda_1 + w_2\lambda_2 = 0 \end{cases}$

   Dans cet exemple, le système serait très facile à résoudre directement. Mais de manière générale on va préférer passer par un système matriciel : on gagne en efficacité.

   En effet, le système peut être noté sous la forme d'une matrice homogène 2×2 : $\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$
3. Il suffit alors de résoudre le système en question, soit directement, soit en passant par la matrice qu'on doit alors échelonner et réduire.

   Si la matrice échelonnée réduite obtenue est la matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors la famille de vecteurs est libre. Sinon, cela veut dire qu'elle est liée.

Exemple Soit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On pose λ_1 et λ_2 deux scalaires (i.e. deux réels) tels que $\lambda_1 v + \lambda_2 w = 0$ avec 0 le vecteur nul.

$$\lambda_1 v + \lambda_2 w = 0$$

Ce qui revient à :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On pose le système d'équations :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Ou bien la matrice correspondante qu'on échelonne et réduit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La famille de vecteurs (v, w) est donc bien une famille libre. Les vecteurs v et w sont bien linéairement indépendants.

4.2 Famille génératrice

Définition Une famille **génératrice** est une famille de vecteurs d'un espace vectoriel dont les combinaisons linéaires permettent de construire tous les autres vecteurs de l'espace.

En gros, tu peux fabriquer n'importe quel vecteur de ton espace vectoriel en additionnant certains vecteurs de ta famille génératrice.

Soit E un espace vectoriel. Une famille $(v_i, ..., v_n)$ d'éléments de E est une famille génératrice de E si :

$$\forall x \in E,\ \exists\ \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ tels que } x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k$$

4.3 Base d'un espace vectoriel

Définition Une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E est une **base** de E si elle est **libre** et **génératrice** de E (qui engendre E).

Autrement dit, il s'agit d'une famille de vecteurs de E linéairement indépendants, et dont tout vecteur de E est combinaison linéaire.

Rappel Une famille $(v_i, ..., v_n)$ de vecteurs de E est dite libre si :

$$\forall \ \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \Longrightarrow \forall \ i \in \mathbb{R}, \lambda_i = 0 \right)$$

Une famille $(v_i, ..., v_n)$ de vecteurs de E est dite génératrice de E si :

$$\forall x \in E, \ \exists \ \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ tels que } x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k$$

Méthode En général, pour montrer qu'une famille $(v_i, ..., v_n)$ de vecteurs de E est une base de E, ont montre d'abord qu'elle est libre, puis on montre que le nombre de vecteurs de cette famille est égal à la dimension de E.

Par exemple, prenons l'espace vectoriel $\mathbb{P}_2$ de dimension 3. Soit la famille $\{1, t, t^2\}$. Cette famille d'éléments de $\mathbb{P}_2$ est effectivement libre : aucun de ces trois éléments n'est colinéaire à l'un des deux autres.

Il semble assez clair qu'un élément supplémentaire serait superflu, on commence donc à remplir notre base avec au maximum ces trois éléments.

Maintenant, voyons si on peut se débarrasser de l'un d'eux. Si on enlève un élément de cette famille, elle sera toujours libre, mais on ne pourra plus former tous les éléments de $\mathbb{P}_2$. Par exemple, si on enlève l'élément t^2 de la famille, le polynôme $p(t) = 4 + 2t - t^2$ ne pourra plus être entièrement fabriqué à partir de cette famille. En effet, il est censé être composé de 4 fois l'élément 1, de 2 fois l'élément t et de -1 fois l'élément t^2. Sans ce dernier élément, il est impossible de fabriquer $p(t)$ à partir de la famille, et donc elle n'est pas génératrice de $\mathbb{P}_2$.

Il faut donc au minimum et au maximum, donc exactement, 3 vecteurs pour composer une famille génératrice de $\mathbb{P}_2$.

Bref, de manière générale, il faut exactement n vecteurs pour composer une base d'un espace vectoriel de dimension n.

5 Déterminants

5.1 Propriétés

Soit A une matrice $n \times n$.

- Si tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne de A sont nuls
  Alors $\det A = 0$

  Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
  Alors $\det A = 0$

- Si deux lignes ou deux colonnes de A sont identiques ou proportionnelles
  Alors $\det A = 0$

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 8 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $C_1 = 2C_2$
Alors $\det A = 0$

- $\det A = \det A^T$
- Si on permute deux lignes ou deux colonnes de A
  Alors le signe de $\det A$ change

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$
Alors $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = -(-1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

- Si **chaque** élément d'**une** ligne ou d'**une** colonne de A est multiplié par un scalaire k
  Alors $\det A$ est multiplié par k

  Donc lors du calcul d'un déterminant, lorsqu'on est amené à **multiplier** une colonne du déterminant par 2 par exemple, il faut **diviser** le déterminant par 2 pour compenser.

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$
Alors $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2\times 3 & 1 & 2 \\ 2\times 1 & 5 & 6 \\ 2\times 4 & 9 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$

- Si on on ajoute k fois les éléments d'une ligne à une autre ligne de A
  Alors $\det A$ ne change pas. Pareil avec les colonnes.

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$
Alors $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \dots$

- Soient A, B deux matrices $n \times n$.
  Alors $\det AB = \det A \det B = \det B \det A$
- Soit A une matrice $n \times n$ inversible.
  Alors $\det A \det A^{-1} = 1$, c'est-à-dire $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

5.2 Méthodes

- Le déterminant d'une matrice A 2×2 se calcule très simplement :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

  Lorsqu'on est fasse à une matrice 2×2, il n'y donc pas à se poser de questions, on calcule $\det A = ad - bc$.

Pour calculer le déterminant d'une matrice $n \times n$ avec $n \geq 3$, l'idée est ainsi de d'abord se ramener au déterminant d'une matrice 2×2, puis de calculer $ad - bc$.

- Soit $\det A = \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$. Les $*$ sont utilisés ici pour symboliser des coefficients quelconques.

Pour passer du déterminant d'une matrice 3×3 au déterminant d'une matrice 2×2, il faut :

- Obtenir une colonne ou une ligne contenant 2 zéros, à l'aide des propriétés du déterminant vues plus haut. *Par exemple, la ligne 2 :*

$$\det A = \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

- Éliminer virtuellement la ligne et la colonne du coefficient resté non nul.

$$\det A = \begin{vmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

En soulignant les coefficients restants :

$$\det A = \begin{vmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

- Extraire la matrice 2×2 composée des coefficients restants $\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$ en la multipliant par le coefficient non nul et par $+$ ou $-$ selon le cas.

Pour savoir si on multiplie par $+$ ou $-$, on utilise la matrice $+/-$ définie par $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$.

Ici, le coefficient non nul se trouve en ligne 2 colonne 3, donc on regarde sur la matrice $+/-$ le coefficient en ligne 2 colonne 3 : $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$. Il s'agit d'un $-$:

$$\det A = \begin{vmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

$$\det A = (-1) \times * \times \begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$$

- Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$ comme montré plus haut.

5.3 Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculons son déterminant :

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} && \text{on a fait } L_2 - 2 \times L_1 \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} && \text{on met en évidence le coefficient resté non nul (\underline{ligne 2 colonne 2})} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} && \text{on élimine virtuellement les autres coefficients de sa ligne et de sa colonne} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} && \text{on met en évidence les coefficients restants} \\
&= (+1) \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} && \text{car le coefficient en \underline{ligne 2 colonne 2} de la matrice +/− est un +} \\
&= (+1) \times 1 \times (1 \times 1 - 3 \times 1) \\
\det A &= -2
\end{aligned}$$

6 Noyau, image, solution d'un système d'équations

6.1 Ker A : noyau

Soit A une matrice $m \times n$.

Définition Le **noyau** de A est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $Ax = 0$.

$$\operatorname{Ker} A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$$

Si on considère la fonction $x \mapsto Ax$, le noyau représente tous les x pour lesquels cette fonction est égale à 0.

C'est en fait tout simplement la solution $\mathcal{S}$ du système d'équations associé.

Pour calculer une base du noyau de A, on résout donc le système homogène

$$Ax = 0$$

La solution qu'on obtient peut ensuite être assimilée :

- à une droite si elle est un espace engendré par un seul vecteur i.e. si elle est de la forme

$$\mathcal{S} = \left\{ x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} t,\ \forall t \in \mathbb{R} \right\} \qquad ou \qquad \operatorname{Ker} A = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\}$$

- à un plan si elle est un espace engendré par deux vecteurs i.e. si elle est de la forme

$$\mathcal{S} = \left\{ x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} s,\ \forall t, s \in \mathbb{R} \right\} \qquad \textit{ou} \qquad \operatorname{Ker} A = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \right\}$$

Méthode J'ai remarqué que beaucoup d'étudiants ne savaient pas vraiment comment calculer efficacement une base du noyau de A, même aux semaines 12, 13. Donc pas d'inquiétude si tu en fais partie, c'est le cas pour tout le monde ☺

Concrètement, voici la méthode que je donne en général pour calculer le noyau, étape par étape (ce qui revient à calculer la solution $\mathcal{S}$ du système d'équations associé) :

1. On échelonne et on réduit la matrice A
2. On regarde sur quelles colonnes il n'y a pas de pivot
3. On note les variables libres correspondantes
4. On remplit les composantes des vecteurs de la solution finale avec les coefficients de chaque variable en fonction des variables libres

Je sais, ce n'est vraiment pas clair donc voici deux exemples :

Exemple 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Le système d'équation correspondant est : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

On cherche donc tous les $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ tel que $Ax = 0$.

1. On échelonne et on réduit $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. Pas de pivot sur la 3^e colonne. Donc x_3 est une variable libre.
3. On note le système d'équations correspondant : $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$
4. On cherche l'expression de x_1 et x_2 en fonction de x_3 : $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$
5. On met en évidence les coefficients devant x_3 en listant chaque inconnue, même x_3 : $\begin{cases} x_1 = 1 \times x_3 \\ x_2 = -1 \times x_3 \\ x_3 = 1 \times x_3 \end{cases}$
6. On remplit le vecteur de la solution du système d'équations avec ces coefficients :

$$\mathcal{S} = \left\{ x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t,\ \forall t \in \mathbb{R} \right\}$$

L'ensemble des solutions est donc la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le noyau s'écrit :

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Exemple 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$.

Le système d'équation correspondant est : $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$

On cherche donc tous les $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ tel que $Ax = 0$.

1. On échelonne et on réduit $A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. Pas de pivot sur les 2^e et 3^e colonnes. Donc x_2 et x_3 sont des variables libres. Il y aura donc deux vecteurs dans la solution finale.
3. On note le système d'équations correspondant : $\left\{ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \right.$
4. On cherche l'expression de x_1 en fonction de x_2 et x_3 : $\left\{ x_1 = 2x_2 - 3x_3 \right.$
5. On met en évidence les coefficients devant x_2 et x_3 en listant chaque inconnue, même x_2 et x_3 : $\begin{cases} x_1 = 2 \times x_2 - 3 \times x_3 \\ x_2 = 1 \times x_2 + 0 \times x_3 \\ x_3 = 0 \times x_2 + 1 \times x_3 \end{cases}$
6. On remplit le vecteur de la solution du système d'équations avec ces coefficients :

$$\mathcal{S} = \left\{ x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s,\ \forall t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

L'ensemble des solutions est donc le plan engendré par $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le noyau s'écrit :

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

6.2 $\operatorname{Im} A$: image

Soit A une matrice $m \times n$.

Définition L'**image** de A est l'ensemble des $b \in \mathbb{R}^m$ tels qu'il existe un $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax = b$.

$$\operatorname{Im} A = \{b \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } Ax = b\}$$

Si on prend la fonction $x \mapsto Ax$, l'image représente toutes les valeurs qu'elle peut prendre.

On peut voir l'image de A comme étant l'espace engendré par les colonnes de A.

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Span}(a_1, ..., a_n)$$

Ainsi, chercher une base de $\operatorname{Im} A$ revient à chercher une base des colonnes de A.

Méthode On cherche une base $(b_1, ..., b_n)$ de A. Par définition d'une base, on cherche une famille de vecteurs libre et génératrice de A.

Pour l'aspect générateur de la famille, il suffit de chercher dans les colonnes de A, comme dit plus haut. En effet, des vecteurs choisis directement dans les colonnes de A sont forcément générateurs de A.

Ensuite, on veut que notre famille de vecteurs soit libre. C'est-à-dire indépendante linéairement. On veut qu'elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \ x_i \in \mathbb{R}, \quad \left[\sum_{i=1}^{n} x_i b_i = 0 \Longrightarrow \forall i \in \mathbb{R}, x_i = 0\right]$$

Qu'on peut développer ainsi :

$$\forall \ x_i \in \mathbb{R}, \quad [x_1 b_1 + ... + x_n b_n = 0 \Longrightarrow x_1 = 0 \ , \ \dots \ , \ x_n = 0]$$

Et même mettre sous une forme un peu plus matricielle :

$$\forall \ x_i \in \mathbb{R}, \quad \left[\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

Écrivons maintenant les vecteurs de notre base $(b_1, ..., b_n)$ comme les colonnes d'une matrice B :

$$B = (b_1, ..., b_n)$$

Et écrivons aussi les scalaires x_i comme étant les composantes d'un vecteur x :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

L'implication que l'on cherche à vérifier peut alors s'écrire :

$$\forall \ x \in \mathbb{R}^n, \quad [Bx = 0 \Longrightarrow x = 0]$$

Cette implication veut ainsi dire que si on prend au hasard n'importe quel vecteur x, l'équation $Bx = 0$ aura en fait toujours pour solution le vecteur nul $x = 0$.

Bref, on cherche donc des vecteurs $(b_1, ..., b_n)$ étant à l'origine des colonnes de A, tels que lorsqu'on les met sous forme d'une matrice B, l'équation $Bx = 0$ a pour unique solution $x = 0$.

Pour trouver ça, on cherche donc des vecteurs tels que lorsqu'on échelonne et qu'on réduit la matrice B qu'ils forment, on retombe sur la matrice identité I_n :

$$B \ \sim \ \cdots \ \sim \ I_n$$

Et pour cela, on échelonne et réduit simplement la matrice A. Les vecteurs $(b_1, ..., b_n)$ seront alors les colonnes de A possédant un pivot. Car, en effet, on saura alors que ces colonnes-là vérifient la propriété ci-dessus.

Reprenons les deux exemples précédents pour plus de clarté.

Exemple 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

On résout l'équation $Ax = 0$.

1. On échelonne et on réduit $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. On voit que la 1^e et la 2^e colonnes possèdent un pivot. Cela signifie qu'elles sont linéairement indépendantes. On choisit donc les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme vecteurs de la base de A.

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemple 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$.

On résout l'équation $Ax = 0$.

1. On échelonne et on réduit $A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. On voit que la 1^e colonne seulement possède un pivot. Cela signifie que les autres vecteurs colonnes de A sont en fait colinéaires à elle. Il n'y a donc qu'un seul vecteur à choisir. On choisit donc le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme vecteur de la base de A.

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

7 Changements de base

7.1 Définitions

Soient $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ et $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$ deux bases de $\mathbb{R}^n$.

- $\{b_1, \dots, b_n\}$: les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ exprimés dans la base canonique.
- $\{c_1, \dots, c_n\}$: les vecteurs de la base $\mathcal{C}$ exprimés dans la base canonique.
- $[b_i]_{\mathcal{C}}$: $i$ème vecteur de la base $\mathcal{B}$ exprimé dans la base $\mathcal{C}$
- $[c_i]_{\mathcal{B}}$: $i$ème vecteur de la base $\mathcal{C}$ exprimé dans la base $\mathcal{B}$
- $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$: matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$
  La base $\mathcal{C}$ est la base de départ et la base $\mathcal{B}$ est la base d'arrivée.
  $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = ([c_1]_{\mathcal{B}} \dots [c_n]_{\mathcal{B}})$
- $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$: matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$
  La base $\mathcal{B}$ est la base de départ et la base $\mathcal{C}$ est la base d'arrivée.
  $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = ([b_1]_{\mathcal{C}} \dots [b_n]_{\mathcal{C}})$
- $[b_i]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \times [b_i]_{\mathcal{B}}$
- $[c_i]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} \times [c_i]_{\mathcal{C}}$
- $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}^{-1}$ et $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}^{-1}$

7.2 Méthodes de résolution

Les méthodes les plus simples (à mon avis) pour résoudre les 4 principaux problèmes de changement de base.

1. Quand on veut trouver la matrice de changement de base.
   - On connaît : $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ et $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_n\}$
   - On cherche : $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$
   - On résout : $(b_1 \ldots b_n)X = (c_1 \ldots c_n)$
     $\Longleftrightarrow$ Concrètement, on échelonne et on réduit la matrice augmentée :
     $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} b_1 & \ldots & b_n & c_1 & \ldots & c_n \end{array}\right)$$
   - On obtient : $X = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$
     $\Longleftrightarrow$ Concrètement, on obtient :
     $$\left(\begin{array}{c|c} I_n & P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} \end{array}\right)$$

   Exemple Soient $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ et $\mathcal{C} = \left\{\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}\right\}$
   Pour trouver $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$, on échelonne et on réduit la matrice augmentée
   $$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} I_n & P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} \end{array}\right)$$

2. Quand on a déjà une des deux matrices de changement de base et qu'on veut trouver l'autre.
   - On connaît : $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$
   - On cherche : $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$
   - On calcule : $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1}$ (inversion de matrice : méthode du pivot)
3. Quand on veut trouver l'expression d'un vecteur dans la base d'arrivée.
   - On connaît : $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ et $[x]_{\mathcal{B}}$
   - On cherche : $[x]_{\mathcal{C}}$
   - On calcule : $[x]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}}$ (simple calcul matriciel)
4. Quand on veut trouver l'expression d'un vecteur dans la base de départ.
   - On connaît : $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ et $[x]_{\mathcal{C}}$
   - On cherche : $[x]_{\mathcal{B}}$
   - On résout : $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = [x]_{\mathcal{C}}$
     $\Longleftrightarrow$ Concrètement, on échelonne et on réduit la matrice augmentée
     $$\left(\begin{array}{c|c} P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} & [x]_{\mathcal{C}} \end{array}\right)$$
   - On obtient : $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = [x]_{\mathcal{B}}$
     $\Longleftrightarrow$ Concrètement, on obtient :
     $$\left(\begin{array}{c|c} I_n & [x]_{\mathcal{B}} \end{array}\right)$$

8 Matrices particulières

8.1 Matrice diagonale

Définition Une **matrice diagonale** est une matrice carrée dont les coefficients en dehors de la diagonale principale sont nuls, i.e. $a_{i,j} = 0,\ \forall i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$. Les coefficients de la diagonale peuvent être ou ne pas être nuls.

Propriété Toute matrice **diagonale** est symétrique et triangulaire.

Propriété Une matrice diagonale A est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, i.e. :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \text{inversible} \Longleftrightarrow a_{i,j} \neq 0 \ \forall \ i = j$$

On a alors :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{1,1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{n,n}} \end{pmatrix}$$

Propriété Le **déterminant** d'une matrice diagonale est le produit de ses coefficients diagonaux :

$$\det A = \prod_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

8.2 Matrice triangulaire

Définition Un matrice **triangulaire** est une matrice carrée dont une partie triangulaire (inférieure ou supérieure) des coefficients, délimitée par la diagonale, est nulle.

Définition Une matrice est **triangulaire supérieure** si et seulement si $\forall\ i > j, a_{i,j} = 0$.

C'est une matrice du type : $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

Définition Une matrice est **triangulaire inférieure** si et seulement si $\forall\ i < j, a_{i,j} = 0$.

C'est une matrice du type : $\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

8.3 Matrice orthogonale

Définition Une matrice carrée A est **orthogonale** si $A^T A = I_n$.

Propriétés Soit $A = (a_1 \cdots a_n)$ une matrice $n \times n$ avec a_i ses vecteurs colonnes.

- A est orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes sont orthogonaux deux à deux et de norme 1.
$$[A \text{ orthogonale}] \Longleftrightarrow [< a_i, a_j > = 0 \quad \forall\ i \neq j \quad \text{ et } \quad \|a_i\| = 1 \quad \forall\ i]$$
- Les colonnes d'une matrice orthogonale constituent une base orthonormée.
- A est orthogonale si et seulement si elle est inversible et son inverse est égale à sa transposée.
$$[A \text{ orthogonale}] \Longleftrightarrow [A \text{ inversible et } A^{-1} = A^T]$$
- Si A est orthogonale, alors A^T est aussi orthogonale.
- Si A est orthogonale, alors $\det A = \pm 1$

8.4 Matrices semblables, matrices équivalentes

Définition Deux matrices carrées A et B sont **semblables** s'il existe une matrice inversible P telle que $A = PBP^{-1}$.

Définition Deux matrices A et B de même format $m \times n$ sont **équivalentes** si et seulement s'il existe deux matrices inversibles P de format $n \times n$ et Q de format $m \times m$ telles que $B = Q^{-1}AP$.

Théorème Deux matrices de même taille sont **équivalentes** si et seulement si elles ont **même rang**.

Propriété Deux matrices carrées dont les polynômes caractéristiques sont distincts (c'est-à-dire qu'elles n'ont pas les mêmes valeurs propres) ne peuvent pas être semblables.

En revanche, la réciproque n'est pas forcément vraie : deux matrices qui ont les mêmes valeurs propres ne sont pas forcément semblables.

Attention Deux matrices semblables sont équivalentes. **Mais** deux matrices équivalentes ne sont pas forcément semblables.

8.5 Transposée d'une matrice

Définition La **transposée** d'une matrice A est la matrice A^T obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.
$$(A^T)_{i,j} = (A)_{j,i} \qquad \forall i, j \in [\![1, n]\!]$$

Propriétés Soient A, B deux matrices $m \times n$.

- $(AB)^T = B^T A^T$
- AA^T est une matrice carrée $m \times m$

9 Valeurs et vecteurs propres

9.1 Définitions

Définition Le **polynôme caractéristique** de A est le polynôme $p_A(\lambda) = \det A - \lambda I_n$.

Définition Soit x un vecteur non nul. x est un **vecteur propre** de A s'il existe un scalaire λ tel que $Ax = \lambda x$. On dit que x est le vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Définition Un scalaire λ est une **valeur propre** de A s'il existe un vecteur x non nul tel que $Ax = \lambda x$. Les valeurs propres de A sont donc les scalaires λ tels que l'espace $A - \lambda I_n$ n'est pas injectif, i.e. $\operatorname{Ker} A - \lambda I_n$ n'est pas réduit au vecteur nul, i.e. ce sont les racines du polynôme caractéristique $p_A(\lambda) = \det A - \lambda I_n$.

Définition Soit λ une valeur propre de A. Alors l'ensemble constitué des vecteurs propres associés à la valeur propre λ (ainsi que le vecteur nul) est le **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ. Il s'agit en fait de l'espace $E_A(\lambda) = \operatorname{Ker} A - \lambda I_n$.

Attention Une valeur propre a une infinité de vecteurs propres associés. **Mais** un vecteur propre ne peut être associé qu'à une seule valeur propre.

Définition La **multiplicité géométrique** d'une valeur propre λ est la dimension de l'espace propre associé $E_A(\lambda) = \operatorname{Ker} A - \lambda I_n$.

Définition La **multiplicité algébrique** d'une valeur propre λ est sa multiplicité dans le polynôme caractéristique $p_A(\lambda) = \det A - \lambda I_n$.

9.2 Méthodes de résolution

Soit A une matrice de format $n \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

- Pour trouver les valeurs propres λ_i d'une matrice A $n \times n$, on doit calculer le polynôme caractéristique $p_A(\lambda) = \det A - \lambda I_n$. On doit donc calculer le déterminant de la matrice $A - \lambda I_n$.

  On pose donc la matrice $A - \lambda I_n$ qui est composée des mêmes coefficients que la matrice A, mais soustraits de λ sur la diagonale :

  $$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} a_{1,1} - \lambda & & \cdots & & a_{1,n} \\ & a_{2,2} - \lambda & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{n-1,n-1} - \lambda & \\ a_{n,1} & & \cdots & & a_{n,n} - \lambda \end{pmatrix}$$

  Et on calcule son déterminant :

  $$\det A - \lambda I_n = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & & \cdots & & a_{1,n} \\ & a_{2,2} - \lambda & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{n-1,n-1} - \lambda & \\ a_{n,1} & & \cdots & & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix}$$

  Calcul du polynôme caractéristique

  – À FAIRE : commencer par **simplifier** le déterminant en obtenant une colonne de $n - 1$ zéros, et ainsi de suite jusqu'à tomber sur un joli petit déterminant de matrice 2×2 facile à calculer.

– À NE PAS FAIRE : calculer **directement** le déterminant, par exemple avec la règle de Sarrus. Ça va te prendre deux heures à calculer, tu vas te retrouver avec un polynôme juste impossible à factoriser, et tu vas faire des erreurs en bonus.

Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme obtenu.

Remarque Une valeur propre de A a une multiplicité algébrique, définie par sa multiplicité dans le polynôme caractéristique.

- Pour trouver les vecteurs propres v_i de A, on doit déterminer une base de l'espace propre $E_A(\lambda_i) = \operatorname{Ker} A - \lambda_i I_n$ associé à chaque valeur propre λ_i.

  On reprend donc notre matrice $A - \lambda I_n$, en remplaçant le λ inconnu par la vraie valeur d'une de nos valeurs propres λ_i. Puis on l'échelonne et on la réduit, de manière à trouver les solutions de l'équation $(A - \lambda_i I_n)x = 0$, c'est-à-dire le Ker de $A - \lambda_i I_n$.

$$A - \lambda_i I_n = \begin{pmatrix} a_{1,1} - \lambda_i & & \cdots & & a_{1,n} \\ & a_{2,2} - \lambda_i & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{n-1,n-1} - \lambda_i & \\ a_{n,1} & & \cdots & & a_{n,n} - \lambda_i \end{pmatrix} \sim \quad \cdots \quad \sim \begin{pmatrix} \textit{échelonnée} \\ \textit{réduite} \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres x_i de A associés à la valeur propre λ_i sont tous les vecteurs solution de l'équation $(A - \lambda_i I_n)x = 0$. C'est-à-dire que ce sont tous les vecteurs de $E_A(\lambda) = \operatorname{Ker} A - \lambda I_n$. *Id est* ce sont tous les vecteurs que l'on peut fabriquer à l'aide des vecteurs de la base de $\operatorname{Ker} A - \lambda I_n$. Il en existe donc une infinité.

Remarque Une valeur propre λ_i de A a une multiplicité géométrique, définie par la dimension de l'espace propre associé à λ_i, c'est-à-dire le nombre de vecteurs constituant sa base.

9.3 Exemples

Exemple 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

- Polynôme caractéristique :

  On calcule le déterminant de la matrice $A - \lambda I_n$.

$$\begin{aligned} \det A - \lambda I_n &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \times (3-\lambda) - 2 \times 4 \\ &= 3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 8 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda - 5 \\ &= (\lambda - 5)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

  On note donc :

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda + 1)$$

- Valeurs propres : Les valeurs propres de A sont simplement les racines du polynôme caractéristique :

$$\lambda_1 = 5 \qquad \lambda_2 = -1$$

- Espaces propres :
  - On cherche une base de l'espace propre associé à $\lambda_1 = 5$.
    On doit échelonner et réduire la matrice $A - \lambda_1 I_n = A - 5I_n$:

$$\begin{aligned} A - \lambda_1 I_n &= A - 5I_n \\ &= \begin{pmatrix} 1-5 & 2 \\ 4 & 3-5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

    On écrit maintenant les vecteurs de la base de $\operatorname{Ker} A - \lambda_1 I_n = \operatorname{Ker} A - 5I_n$. Pour voir comment trouver une base du noyau d'une matrice, je te propose d'aller voir à la section correspondante.

$$\begin{aligned} E_A(\lambda_1) &= \operatorname{Ker} A - \lambda_1 I_n \\ E_A(5) &= \operatorname{Ker} A - 5I_n \\ &= \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

    On peut noter :

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  - On cherche ensuite une base de l'espace propre associé à $\lambda_2 = -1$.
    On doit échelonner et réduire la matrice $A - \lambda_2 I_n = A + I_n$:

$$\begin{aligned} A - \lambda_2 I_n &= A + I_n \\ &= \begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 4 & 3+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

    On écrit maintenant les vecteurs de la base de $\operatorname{Ker} A - \lambda_2 I_n = \operatorname{Ker} A + I_n$. Encore une fois, pour voir comment trouver une base du noyau d'une matrice, je te propose d'aller voir à la section correspondante.

$$\begin{aligned} E_A(\lambda_2) &= \operatorname{Ker} A - \lambda_2 I_n \\ E_A(-1) &= \operatorname{Ker} A + I_n \\ &= \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

On peut noter :

$$x_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

- Vecteurs propres :
  - Un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 5$ est un vecteur de l'espace propre $E_A(\lambda_1) = E_A(5)$. On prend usuellement le vecteur que l'on a utilisé pour définir sa base. Ainsi, $x_1 = \begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $\lambda_1 = 5$.

    Remarque Il faut bien comprendre que ce qui nous intéresse est en fait une famille de vecteurs : une base de $\operatorname{Ker} A - \lambda_1 I_n = \operatorname{Ker} A - 5I_n$. C'est-à-dire que ce qu'on cherche est une famille infinie de vecteurs. Car même si la base est représentée par un seul vecteur ici, le vecteur $x_1 = \begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}$, elle est en fait composée de l'ensemble des combinaisons linéaire de ce vecteur. Et ainsi, chaque vecteur de la base est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 5$.

    Par exemple, le vecteur $2 \times x_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 5$. Le vecteur $-3 \times x_1 = \begin{pmatrix}-3/2\\-3\end{pmatrix}$ aussi, et le vecteur $200 \times x_1 = \begin{pmatrix}100\\200\end{pmatrix}$ aussi.
  - De même, un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = -1$ est un vecteur de l'espace propre $E_A(\lambda_2) = E_A(-1)$. On prend usuellement le vecteur que l'on a utilisé pour définir sa base. Ainsi, $x_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $\lambda_2 = -1$.

    Remarque Et de la même manière, comme ce qui nous intéresse est l'ensemble des vecteurs de $E_A(\lambda_2) = E_A(-1)$, les vecteurs $-1 \times x_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $42 \times x_2 = \begin{pmatrix}-42\\42\end{pmatrix}$ ou encore $-314 \times x_2 = \begin{pmatrix}314\\-314\end{pmatrix}$, etc sont en fait aussi des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_2 = -1$.

Exemple 2 Soit $A = \begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\1&1&1\end{pmatrix}$.

- Polynôme caractéristique :

$$p_A(\lambda) = \det A - \lambda I_n$$

Ici, la matrice étudiée est une matrice 3×3. Le déterminant sera donc moins évident à calculer. L'idée est de se ramener à un déterminant de matrice 2×2. Pour cela, on cherche à obtenir 2 zéros sur une même ligne ou une même colonne.

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

On fait $L_2 - 2 \times L_3$:

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 2\lambda \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

On fait $C_3 + 2 \times C_2$:

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

On a obtenu 2 zéros sur la ligne 2. On peut donc se ramener à un déterminant de matrice 2×2. Pour voir la démarche détaillée, je te propose d'aller voir à la section correspondante.

$$\begin{aligned} &= +1 \times (-\lambda) \times \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \times ((1-\lambda) \times (3-\lambda) - 3 \times 1) \\ &= -\lambda(3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 3) \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda) \\ p_A(\lambda) &= -\lambda^2(\lambda - 4) \end{aligned}$$

- Valeurs propres : Les valeurs propres de A sont les racines de $p_A(\lambda)$:

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 4$$

On remarque qu'ici, la valeur propre $\lambda_1 = 0$ a une multiplicité algébrique égale à 2. La multiplicité de la valeur propre $\lambda_2 = 4$ est 1.

- Espaces propres :
  - Valeur propre $\lambda_1 = 0$:

    On cherche une base du noyau de la matrice $A - \lambda_1 I_n$. On doit donc échelonner et réduire $A - \lambda_1 I_n$:

    $$A - \lambda_1 I_n = A - 0 \times I_n$$

    Ici, comme la valeur propre λ_1 est 0, la matrice $A - \lambda_1 I_n$ est simplement la matrice A :

    $$\begin{aligned} &= A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On trouve :

$$\begin{aligned} E_A(\lambda_1) &= \operatorname{Ker} A - \lambda_1 I_n \\ E_A(0) &= \operatorname{Ker} A \\ &= \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

On peut noter :

$$x_{11} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_{12} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

– Valeur propre $\lambda_2 = 4$:

Même méthode : on cherche une base du noyau de la matrice $A - \lambda_2 I_n$. On doit donc échelonner et réduire $A - \lambda_2 I_n$:

$$\begin{aligned} A - \lambda_2 I_n &= A - 4 \times I_n \\ &= \begin{pmatrix} 1-4 & 1 & 1 \\ 2 & 2-4 & 2 \\ 1 & 1 & 1-4 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On fait $L_1 + L_2 + L_3$:

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Puis $L_2 - 2 \times L_3$:

$$\begin{aligned} &\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Puis $L_3 + L_1$:

$$\begin{aligned} &\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On trouve :

$$\begin{aligned} E_A(\lambda_1) &= \operatorname{Ker} A - \lambda_1 I_n \\ E_A(0) &= \operatorname{Ker} A \\ &= \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

On peut noter :

$$x_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

- Vecteurs propres :
  Les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_1 = 0$ sont tous les vecteurs que l'on peut former à partir de combinaisons linéaires des vecteurs $x_{11} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $x_{12} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. Donc le vecteur $x_{11} + x_{12} = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ par exemple, ou bien le vecteur $x_{11} - x_{12} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, ou encore le vecteur $x_{11} + 2 \times x_{12} = \begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ ou même le vecteur $32 \times x_{11} + x_{12} = \begin{pmatrix}-33\\32\\1\end{pmatrix}$ sont tous des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_1 = 0$.

  Usuellement, quand on cherche des vecteurs propres associés à une valeur propre, on utilise directement les vecteurs que l'on a utilisés pour définir la base de l'espace propre associé, donc ici x_{11} et x_{12}.

  De même, les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_2 = 4$ sont tous les vecteurs que l'on peut fabriquer à partir du vecteur $x_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

10 Diagonalisation

10.1 Définition

Condition Une matrice A n'est diagonalisable que si la multiplicité algébrique et la multiplicité géométrique de chacune de ses valeurs propres sont égales.

Vérification

- De manière générale, vérifier que la dimension de l'espace propre $E_A(\lambda_i)$ associé à chaque valeur propre λ_i est égale à la multiplicité algébrique m_i de cette valeur propre.
  C'est-à-dire que lorsqu'on cherche les vecteurs propres associés, on doit trouver m_i vecteurs propres dans la base de $E_A(\lambda_i)$.
  Par exemple, si $p_A(\lambda) = (x-1)^2(x-4)^3$, alors il faut vérifier :
  - que l'espace propre $E_A(1)$ est bien de dimension 2, i.e. sa base est formée de 2 vecteurs,
  - que l'espace propre $E_A(4)$ est bien de dimension 3, i.e. sa base est formée de 3 vecteurs.
- Une matrice $n \times n$ ayant n valeurs propres distinctes aura forcément n vecteurs propres donc la condition est automatiquement vérifiée ✓

Théorème Si la condition est vérifiée, alors il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $P^{-1}AP = D$, i.e. $A = PDP^{-1}$.

- D est la matrice dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres λ_i de A répétées autant de fois que leur multiplicité. Leur ordre de placement sur la diagonale n'a pas d'importance.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de A. Ils sont placés au même numéro de colonne que la colonne de D correspondant à la valeur propre associée. Si x_i est le vecteur propre associé à la valeur propre λ_i :

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

10.2 Exemples

Exemple 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

- On détermine les valeurs propres de A : $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 1$.
- On vérifie la condition de diagonalisation : A a 3 valeurs propres distinctes donc la condition est automatiquement vérifiée ✓.
- On détermine les vecteurs propres associés : $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- On remplit D avec les valeurs propres : $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- On remplit P avec les vecteurs propres associés : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
- On peut éventuellement vérifier qu'il n'y a pas d'erreur en vérifiant que $A = PDP^{-1}$ et $D = P^{-1}AP$.

Exemple 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- On calcule le polynôme caractéristique de A : $p_A(\lambda) = (x-2)^2(x+3)$.
- Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 2$ de multiplicité algébrique 2 et $\lambda_2 = -3$ de multiplicité algébrique 1.
- On vérifie la condition de diagonalisation : on doit vérifier que l'espace propre $E_A(2)$ associé à la valeur propre 2 est de dimension 2, i.e. on doit trouver 2 vecteurs propres associés à $\lambda_1 = 2$. On trouve $E_A(2) = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$: la condition est vérifiée ✓.

- On détermine le vecteur propre associé à la seconde valeur propre $\lambda_2 = -3$.
  On trouve $E_A(-3) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

- On remplit D avec les valeurs propres : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

- On remplit P avec les vecteurs propres associés dans le même ordre que les valeurs propres : $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

- On peut éventuellement vérifier qu'il n'y a pas d'erreur en vérifiant que $A = PDP^{-1}$ et $D = P^{-1}AP$.

Remarque On peut voir que puisque l'ordre de placement des valeurs propres n'importe pas, il existe en fait plusieurs diagonalisations possibles pour chaque matrice A.

11 Procédé d'orthonormalisationn de Gram-Schmidt

Le **procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt** est un algorithme permettant de construire une famille orthonormée $(u_1, ..., u_n)$ à partir d'une famille libre $(e_1, ..., e_n)$.

Pour construire un vecteur de la famille $(u_1, ..., u_n)$, on construit d'abord une famille $(v_1, ..., v_n)$ orthogonale mais pas forcément unitaire (les normes de ses vecteurs ne sont pas forcément égales à 1), qu'on normalise ensuite vecteur par vecteur.

Rappel Le projeté de x sur y est $\text{proj}_y(x) = \frac{<y,x>}{<x,x>}x = \frac{<y,x>}{\|x\|^2}x$

Orthogonalisation Création de la famille $(v_1, ..., v_n)$ orthogonale mais non unitaire, vue de trois manières différentes :

Littéralement :

1. $v_1 = e_1$
2. $v_2 = e_2 - \text{proj}_{v_1}(e_2)$
3. $v_3 = e_3 - \text{proj}_{v_1}(e_3) - \text{proj}_{v_2}(e_3)$
4. $v_4 = e_4 - \text{proj}_{v_1}(e_4) - \text{proj}_{v_2}(e_4) - \text{proj}_{v_3}(e_4)$
5. $\cdots$
6. $v_i = e_i - \sum_{k=1}^{i} \text{proj}_{v_k}(e_i)$

Explicitement :

1. $v_1 = e_1$
2. $v_2 = e_2 - \frac{<e_2,v_1>}{<v_1,v_1>}v_1$
3. $v_3 = e_3 - \frac{<e_3,v_1>}{<v_1,v_1>}v_1 - \frac{<e_3,v_2>}{<v_2,v_2>}v_2$
4. $v_4 = e_4 - \frac{<e_4,v_1>}{<v_1,v_1>}v_1 - \frac{<e_4,v_2>}{<v_2,v_2>}v_2 - \frac{<e_4,v_3>}{<v_3,v_3>}v_3$

5. $\cdots$
6. $v_i = e_i - \sum_{k=1}^{i} \frac{<e_i, v_k>}{<v_k, v_k>} v_k$

Ou encore :

1. $u_1 = e_1$
2. $u_2 = e_2 - \frac{<e_2, v_1>}{\|v_1\|^2} v_1$
3. $u_3 = e_3 - \frac{<e_3, v_1>}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{<e_3, v_2>}{\|v_2\|^2} v_2$
4. $u_4 = e_4 - \frac{<e_4, v_1>}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{<e_4, v_2>}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{<e_4, v_3>}{\|v_3\|^2} v_3$
5. $\cdots$
6. $v_i = e_i - \sum_{k=1}^{i} \frac{<e_i, v_k>}{\|v_k\|} v_k$

Normalisation Création de la famille $(u_1, ..., u_n)$ orthogonale et unitaire :

1. $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$
2. $u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$
3. $u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$
4. $u_4 = \frac{v_4}{\|v_4\|}$
5. $\cdots$
6. $u_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$

12 Matrices symétriques

12.1 Définitions et propriétés

Définition Une matrice **symétrique** A est une matrice carrée qui est égale à sa propre transposée.

$$[A \text{ symétrique }] \iff [A = A^T] \iff [a_{i,j} = a_{j,i} \quad \forall\ i,j \in [\![1,n]\!]\ ]$$

Propriété Soit A une matrice symétrique $n \times n$. Alors ses vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Théorème spectral Soit A une matrice symétrique. Alors il existe P matrice orthogonale $n \times n$ telle que P^TAP soit diagonale, i.e. A est orthogonalement diagonalisable.

Réciproque Soit A une matrice $n \times n$ orthogonalement diagonalisable. Alors A est symétrique.

Propriété Soit A une matrice symétrique $n \times n$, soient $a_{i,j}$ ses coefficients $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$.

- $A = A^T$
- $a_{i,j} = a_{j,i} \quad \forall i,j \in [\![1,n]\!]$
- Les valeurs propres de A sont réelles.
- Toute matrice diagonale est symétrique.
- Toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable.

12.2 Orthodiagonalisation

1. Vérifier que A est orthodiagonalisable
2. Trouver les valeurs propres
3. Déterminer les espaces propres associés, i.e. les vecteurs propres associés
4. Orthogonaliser les vecteurs propres associés à une même valeur propre avec le procédé de Gram-Schmidt
   → Parfois les vecteurs sont déjà orthogonaux, donc il est utile de faire un rapide calcul pour vérifier ça
   → Les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont déjà orthogonaux entre eux d'après la propriété
5. Normaliser tous les vecteurs obtenus
6. Construire D : remplir avec les valeurs propres
7. Construire P : remplir avec les vecteurs obtenus

12.3 Exemples

Exemple 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On vérifie que A est orthodiagonalisable. A est une matrice symétrique, donc par le théorème spectral, A est orthodiagonalisable.
2. On cherche les valeurs propres de A. On utilise la même méthode que d'habitude et on trouve 3 valeurs propres distinctes :

$$\lambda_1 = 5 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = -2$$

3. On cherche les vecteurs propres associés à ces valeurs propres. Même méthode que d'habitude et on trouve :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Ici, les 3 vecteurs propres sont associés à 3 valeurs propres distinctes. Donc d'après la propriété, ils sont déjà orthogonaux entre eux. Ainsi, pas besoin d'utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur eux.
5. Il faut quand même les normaliser : on divise chaque vecteur propre par sa norme et on obtient :

$$p_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \qquad p_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \qquad p_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

6. On construit D en mettant les valeurs propres de A sur la diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

7. On construit P en mettant nos vecteurs orthonormaux dans le même ordre que les valeurs propres associées :

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Exemple 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On vérifie que A est orthodiagonalisable. A est une matrice symétrique, donc par le théorème spectral, A est orthodiagonalisable.

2. On cherche les valeurs propres de A. On utilise la même méthode que d'habitude et on trouve :

$$\lambda_1 = 0 \text{ de multiplicité } 2 \qquad \lambda_2 = 3 \text{ de multiplicité } 1$$

3. On cherche les espaces propres $E_A(\lambda_1)$ et $E_A(\lambda_2)$ associés aux valeurs propres $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 3$. Même méthode que d'habitude et on trouve :

$$E_A(\lambda_1) = E_A(0) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

   Avec :

$$v_{11} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_{12} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Et :

$$E_A(\lambda_2) = E_A(3) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

   Avec :

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Ici, on a une valeur propre $\lambda_1 = 0$ de multiplicité 2 et une valeur propre $\lambda_2 = 3$ de multiplicité 1.

   On prend donc 2 vecteurs propres associés à $\lambda_1 = 0$, $v_{11} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_{12} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on les orthogonalise avec le procédé de Gram-Schmidt.

$$v'_{11} = v_{11} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

   Et :

$$v'_{12} = v_{12} - \frac{< v_{12}, v'_{11} >}{< v'_{11}, v'_{11} >} v'_{11} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Par la propriété, le vecteur v_2 est déjà orthogonal aux vecteurs v_{11} et v_{12} (et donc aussi aux vecteurs v'_{11} et v'_{12}).

5. Il faut ensuite normaliser les trois vecteurs obtenus : on divise chaque vecteur par sa norme et on obtient :

$$p_1 = \frac{v'_{11}}{\|v'_{11}\|} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad p_2 = \frac{v'_{12}}{\|v'_{12}\|} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \qquad p_3 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

6. On construit D en mettant les valeurs propres de A sur la diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

7. On construit P en mettant nos vecteurs orthonormaux dans le même ordre que les valeurs propres associées :

$$D = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

13 Décomposition QR

Définition La **décomposition** QR d'une matrice A est une décomposition de la forme $A = QR$ avec Q est une matrice orthogonale et R est une matrice triangulaire supérieure.

Méthode On construit la matrice Q en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur les colonnes de A i.e. les vecteurs a_i. On obtient alors les vecteurs colonnes q_i de Q.

Orthogonalisation :

1. $v_1 = a_1$
2. $v_2 = a_2 - \mathrm{proj}_{v_1}(a_2)$
3. $v_3 = a_3 - \mathrm{proj}_{v_1}(a_3) - \mathrm{proj}_{v_2}(a_3)$
4. $v_4 = a_4 - \mathrm{proj}_{v_1}(a_4) - \mathrm{proj}_{v_2}(a_4) - \mathrm{proj}_{v_3}(a_4)$
5. $\cdots$
6. $v_i = a_i - \sum_{k=1}^{i} \mathrm{proj}_{v_k}(a_i)$

Normalisation :

1. $q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$
2. $q_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$
3. $q_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$
4. $q_4 = \frac{v_4}{\|v_4\|}$
5. $\cdots$
6. $q_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$

On construit ensuite R comme suit :

$$\begin{pmatrix} < e_1, a_1 > & < e_1, a_2 > & < e_1, a_3 > & \cdots & < e_1, a_n > \\ 0 & < e_2, a_2 > & < e_2, a_3 > & \cdots & < e_2, a_n > \\ \vdots & 0 & < e_3, e_3 > & \cdots & < e_3, a_n > \\ \vdots & & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & < e_n, a_n > \end{pmatrix}$$

Ou bien on calcule $R = Q^T A$.

14 Updates

Pleins de trucs qui arrivent

- La logique en mathématiques
- Les applications linéaires
- Le Théorème du rang
- Montrer que deux espaces sont égaux
- Le produit scalaire, la longueur, la norme, l'orthogonalité, etc
- La projection orthogonale
- Normaliser un vecteur
- La méthode des moindres carrés [ça arrivera probablement en dernier, je déteste ça]
- Une compilation de vrais/faux [alors ça ce serait dément si j'arrivais à le faire avant l'examen, mais ça demande un boulot monstre, donc je garantis rien]
- Résoudre un système d'équations : montrer 1 solution, 0 solution, ∞ solutions

Update de l'update

Bon je n'ai plus trop de temps à cause des révisions donc il n'y aura probablement plus de nouvelles versions...

Créé le 18 décembre 2021 – Version du 7 janvier 2022