Analyse II

Nicolas Ettlin • v1.3

Introduction

Ce document est un résumé mis au propre des notes que j'ai prises pendant le semestre.

Attention, ce document :

- ❌ **ne remplace pas les cours** : il est écrit en partant du principe que tu vois déjà de quoi on parle, sans prendre le temps de bien introduire les sujets et présenter des exemples ;
- ❌ remplace encore moins les **séries d'exercices** et les **révisions** : t'entraîner sera essentiel pour bien comprendre les notions et te préparer à l'examen ;
- ❌ contient peut-être des **erreurs ou imprécisions**, malgré mes efforts de relecture (mais si tu en trouves, n'hésite pas à me les transmettre pour que je puisse les corriger !).

Par contre, ce document peut être :

- ✅ une autre manière de voir les nouvelles notions, si tu bloques avec la formulation du cours ;
- ✅ une aide pendant les révisions, pour vérifier que tu es à jour sur tous les sujets ;
- ✅ un moyen rapide pour retrouver une formule du cours pendant les exercices.
  (Mais n'oublie pas d'apprendre par cœur celles dont tu auras besoin pour l'examen !)

En espérant que ces notes puissent t'être utiles, je te souhaite un bon courage et beaucoup de succès pour le BA2 !

Historique des versions

Avant de commencer à lire le document, je te conseille de **vérifier sur le drive** que tu en as la **version la plus récente**, qui contiendra les derniers correctifs et ajouts.

Version	Date	Modifications
v1.0	24 février 2022	Version initiale
v1.1	24 avril 2022	Correction d'une erreur dans la partie « Dérivée directionnelle »
v1.2	4 juin 2022	Correction d'une erreur dans la définition des ensembles ouverts
v1.3	6 juin 2022	Correction d'une erreur dans la définition de la matrice jacobienne

Si tu as des **questions ou suggestions**, n'hésite pas à me parler sur Discord : [Nicolapps#3110].

Équations différentielles ordinaires

Définitions

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ORDINAIRE

Une **équation différentielle ordinaire** est une équation de la forme :

$$E\left(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)}\right) = 0$$

où E est une expression fonctionnelle et $n \in \mathbb{N}_+$ est l'**ordre**.

On cherche une fonction $y \in C^n(I) : I \to \mathbb{R}$ (et I est un **intervalle ouvert**) où $E(\ldots) = 0$ sur I.

SOLUTION GÉNÉRALE

Ensemble des solutions de l'équation.

SOLUTION MAXIMALE

Solution sur le plus grand intervalle possible pour une condition initiale donnée.

TYPES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

ÉQUATION LINÉAIRE

L'équation différentielle est **linéaire** si elle est de la forme :

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + a_2(x)y'' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} + b(x) = 0$$

ÉQUATION AUTONOME

L'équation différentielle est **autonome** si l'expression fonctionnelle ne contient pas de x.

PROBLÈME DE CAUCHY

Le **problème de Cauchy** est la résolution de l'E.D. avec des **conditions initiales**.

On obtient alors une **solution particulière**.

$$\begin{cases} y(x_0) = \alpha \\ y'(x_1) = \beta \\ \vdots \end{cases}$$

Équations différentielles à variables séparées (EDVS)

Une **équation différentielle à variables séparées** est une équation différentielle de la forme :

$$f(y) \cdot y' = g(x) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f : \underset{\subset \mathbb{R}}{I} \to \mathbb{R} \ \text{continue sur } I \\ g : \underset{\subset \mathbb{R}}{J} \to \mathbb{R} \ \text{continue sur } J \end{cases}$$

EXISTENCE & UNICITÉ

Si $\underset{\forall y \in I}{f(y) \neq 0}$, alors elle a **toujours** une solution **unique** pour chaque condition initiale $y(x_0) = b_0$.

i.e. pour des solutions $\begin{cases} y_1 : J_1 \subset J \to I \\ y_2 : J_2 \subset J \to I \end{cases}$, si $y_1(x_0) = y_2(x_0) = b_0$, alors $y_1(x) = y_2(x)\ \forall x \in J_1 \cap J_2$.

→ unique solution maximale.

RÉSOLUTION

Pour la trouver, on pose $\int f(y)\, dy = \int g(x)\, dx$.

On inverse ensuite $F(y)$ pour retrouver y.

Équations différentielles linéaires du 1er ordre (EDL1)

DÉFINITION

Une **équation différentielle linéaire du premier ordre** est une équation différentielle de la forme :

$$y'(x) + p(x)\,y(x) = f(x) \qquad \text{avec } p, f : \underset{\text{ouvert}}{I} \to \mathbb{R} \text{ continues}$$

On cherche une solution $y : I \in C^1 \to \mathbb{R}$.

ÉQUATION HOMOGÈNE ASSOCIÉE

L'**équation homogène associée** est : $y'(x) + p(x)\,y(x) = 0$.

Sa solution générale est :

$$y(x) = Ce^{-P(x)} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R} \text{ et } [P(x)]' = p(x)$$

PRINCIPE DE SUPERPOSITION DES SOLUTIONS

Soient les deux EDL1 $\begin{cases} ① \quad y' + p(x)\,y = f_1(x) \\ ② \quad y' + p(x)\,y = f_2(x) \end{cases}$ ayant pour solution $\begin{cases} v_1 \\ v_2 \end{cases} : I \to \mathbb{R}$.

$$\alpha v_1 + \beta v_2 \text{ est solution de } y' + p(x)\,y = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

RÉSOLUTION PAR LA MÉTHODE DE VARIATION DE CONSTANTE

Pour résoudre une EDL1 :

① On calcule la **primitive** $P(x)$ de $p(x)$ (sans constante).

② On calcule la « **partie de** $f(x)$ » $c(x)$ (sans constante) par :

$$c(x) = \int f(x) \cdot e^{P(x)}\,dx$$

③ On trouve une **solution particulière** y_{part} :

$$y_{\text{part}}(x) = c(x) \cdot e^{-P(x)}$$

④ La **solution générale** est alors donnée par :

$$\begin{aligned} y(x) &= y_{\text{part}}(x) + y_{\text{hom}}(x) \\ &= v_0(x) + Ce^{-P(x)} \quad \forall C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

⚠️ **Vérifier le résultat !**

Équations différentielles linéaires du 2nd ordre (EDL2)

DÉFINITION

Une **équation différentielle linéaire du second ordre** est une équation différentielle de la forme :

$$y''(x) + p(x)\,y'(x) + q(x)\,y(x) = f(x) \quad \text{avec } p, q, f : \underset{\text{ouvert}}{I} \to \mathbb{R} \text{ continues}$$

On cherche une solution $y : I \in C^2 \to \mathbb{R}$.

EDL2 HOMOGÈNE

Cette équation est une **EDL2 homogène** si $f(x) = 0$.

EDL2 À COEFFICIENTS CONSTANTS

Une **EDL2 à coefficients constants** est une équation différentielle du type :

$$y''(x) + p y'(x) + q\, y(x) = f(x) \qquad \text{avec } p, q \in \mathbb{R}$$

SOLUTION DE L'ÉQUATION HOMOGÈNE

Pour la résoudre, il faut trouver les racines (réelles ou complexes) de **l'équation caractéristique** :

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad \lambda_{1,2} = \{a, b\}$$

La solution générale de l'équation homogène est alors donnée par : $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$y_{\text{hom}}(x) = \begin{cases} C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx} & \text{si } a \neq b \\ C_1 e^{ax} + C_2 x e^{ax} & \text{si } a = b \\ C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x) & \text{si } a \notin \mathbb{R}, \ \begin{matrix} \alpha = \operatorname{Re}(a) \\ \beta = \operatorname{Im}(a) \end{matrix} \end{cases}$$

SUPERPOSITION DES SOLUTIONS

Si y_1 et y_2 sont des solutions d'une EDL2 homogène, alors $A y_1 + B y_2$ l'est aussi $\forall A, B \in \mathbb{R}$.

SOLUTIONS LINÉAIREMENT INDÉPENDANTES (EDL2 HOMOGÈNE)

La solution d'une EDL2 homogène a deux constantes arbitraires (deux solutions **linéairement indépendantes** : $\alpha y_1 + \beta y_2 \neq 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

Il n'y a donc qu'une seule solution d'EDL2 où $y(x_0)$ et $y'(x_0)$ sont fixées.

TROUVER LA 2E SOLUTION

Si v_1 est une solution d'une EDL2 homogène, telle que $v_1(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$, on obtient l'autre par :

$$v_2(x) = v_1(x) \cdot c(x) = v_1(x) \cdot \int \frac{e^{-P(x)}}{{v_1}^2(x)}\,dx$$

SOLUTION GÉNÉRALE

Si v_1 et v_2 sont deux solutions linéairement indépendantes d'une EDL2 homogène, alors la solution générale est de la forme :

$$v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x) \qquad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in I$$

WRONSKIEN

Le **Wronskien** de $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ (dérivables sur I) est :

$$W[v_1,\ v_2] = \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{vmatrix}$$

v_1 et v_2 sont linéairement indépendantes $\Leftrightarrow W[v_1,\ v_2] \neq 0 \quad \forall x \in I$.

MÉTHODE DE VARIATION DE CONSTANTE

La solution générale d'une EDL2 est :

$$v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x) + v_0(x) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ x \in I$$

La solution particulière v_0 est donnée par :

$$v_0(x) = c_1(x) v_1(x) + c_2(x) v_2(x) \quad \text{avec} \begin{cases} c_1(x) = -\displaystyle\int \frac{f(x) \cdot v_2(x)}{W[v_1,\ v_2](x)}\,dx \\ c_2(x) = +\displaystyle\int \frac{f(x) \cdot v_1(x)}{W[v_1,\ v_2](x)}\,dx \end{cases}$$

MÉTHODE DES COEFFICIENTS INDÉTERMINÉS

✨ Permet de trouver la y_{part} des EDL2 non-homogènes à **coefficients constants** rapidement.

$$f(x) = \begin{cases} e^{cx} P_n(x) \Rightarrow y_{\text{part}} = x^r e^{cx} P'_n(x) \\ \quad r \in \{0,1,2\} \text{ : multiplicité de } c \text{ dans } \lambda^2 + p\lambda + q \\ e^{ax} \begin{pmatrix} \cos(bx) P_n(x) \\ + \sin(bx) Q_m(x) \end{pmatrix} \Rightarrow y_{\text{part}} = \begin{cases} e^{ax} \begin{pmatrix} \cos(bx) P'_N(x) \\ + \sin(bx) Q'_N(x) \end{pmatrix} \\ \text{si } a + ib \text{ pas racine de l'é. c.} \\ x e^{ax} \begin{pmatrix} \cos(bx) P'_N(x) \\ + \sin(bx) Q'_N(x) \end{pmatrix} \\ \text{si } a + ib \text{ racine de l'é. c.} \end{cases} \\ \quad \text{avec } N = \max\{n, m\} \\ \text{comb. linéaire des 2} \Rightarrow y_{\text{part}} = y_{\text{part},1} + y_{\text{part},2} \\ \text{autre} \Rightarrow \text{utiliser une autre méthode} \end{cases}$$

où P_n est un polynôme de degré n, et P'_n un polynôme à coefficients indéterminés.

On détermine ensuite les coefficients en substituant y_{part} dans l'équation originale.

Topologie dans $\mathbb{R}^n$

Définitions

$\mathbb{R}^n$ est l'ensemble de tous les n-tuples ordonnés de nombres réels, muni de l'addition et de l'amplification par un scalaire habituelles.

PRODUIT SCALAIRE

$$\langle \bar{x},\ \bar{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

NORME EUCLIDIENNE

$\|\bar{x}\| = \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}$

DISTANCE

$\|\bar{x} - \bar{y}\| = d(\bar{x},\ \bar{y})$ est la **distance** entre $\bar{x}$ et $\bar{y}$.

PROPRIÉTÉS

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a :

- Norme positive $\quad \|\bar{x}\| \geq 0$
- Norme du vecteur nul $\quad \|\bar{x}\| = 0 \Rightarrow \bar{x} = \mathbf{0}$
- Amplification scalaire de la norme $\quad \|\lambda \bar{x}\| = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|$
- **Inégalité de Cauchy-Schwarz** $\quad |\langle \bar{x},\ \bar{y} \rangle| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$
- **Inégalité triangulaire** $\quad \|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$
- **Inégalité triangulaire inverse** $\quad \|\bar{x} - \bar{y}\| \geq \Big| \|\bar{x}\| - \|\bar{y}\| \Big|$

Topologie dans $\mathbb{R}^n$

ENSEMBLES OUVERTS ET FERMÉS

BOULE OUVERTE

$B(\bar{x},\, \delta) = \left\{ \bar{y} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; d(\overrightarrow{x},\, \bar{y}) < \delta \right\}$ est la **boule ouverte** de centre $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ et rayon $\delta > 0$.

ENSEMBLE OUVERT

$E \subset R^n$ est **ouvert** $\Leftrightarrow$ $\forall \bar{x} \in E,\ \exists \delta > 0$ tel que $B(\bar{x},\, \delta) \subset E$.

ENSEMBLE FERMÉ

$E \subset R^n$ est **fermé** $\Leftrightarrow$ $\complement(E)$ est ouvert. où $\complement(E) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; y \notin E \right\}$

COMBINAISON DES DEUX

Un ensemble peut n'être ni ouvert ni fermé (par exemple $]1,\ 2]$).

Les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés sont $\mathbb{R}^n$ et $\emptyset$.

UNION ET INTERSECTION

Soient O_i des ensembles ouverts et F_i des ensembles fermés.

$\bigcup_i O_i$ est **ouvert**.	$\bigcap_i F_i$ est **fermé**.	$\bigcap_i^{n \text{ fini}} O_i$ est **ouvert**.	$\bigcup_i^{n \text{ fini}} F_i$ est **fermé**.

ADHÉRENCE ET FRONTIÈRE

ADHÉRENCE (→ FERMÉ)

$$\overline{E} = \bigcap \Big[\text{Ensembles fermés contenant } E \Big]$$

FRONTIÈRE

$\partial E = \{\text{points frontière}\} = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n \,|\, \forall \delta > 0,\ B(\bar{y}, \delta)$ contient un point de E et de $\complement_E\}$

$\partial \mathbb{R}^n = \partial \emptyset = \emptyset$

INTÉRIEUR

$$\mathring{E} = E \setminus \partial E = \left\{ \bar{y} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \exists \delta > 0 \text{ tel que } B(\bar{y},\, \delta) \subset E \right\}$$

Suites dans $\mathbb{R}^n$

DÉFINITIONS

SUITE DANS $\mathbb{R}^n$

Une suite dans $\mathbb{R}^n$ est une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$.

CONVERGENCE

La suite $\{\bar{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$ est **convergente** et admet pour limite (unique) $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq k_0,\ \|\bar{x}_k - \bar{x}\| \leq \varepsilon$.

On peut aussi vérifier la convergence de chaque coordonnée individuellement.

SUITE BORNÉE

Tous les termes d'une **suite bornée** sont contenus dans une boule fermée $\overline{B(\bar{0},\ M)}$ avec $M > 0$.

📝 Toute suite convergente est bornée.

THÉORÈME DE BOLZANO-WEIERSTRASS

De toute suite bornée $\{\bar{x}_n\} \in \mathbb{R}^n$, on peut extraire une sous-suite convergente.

CONVERGENCE ET ENSEMBLE FERMÉS

Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé $\Leftrightarrow$ toute suite convergente $\{\bar{x}_n\} \subset E$ est telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{x}_n \in E$.

CONSTRUCTION DE L'ADHÉRENCE PAR LES SUITES

Pour obtenir l'adhérence $\overline{E}$ d'un ensemble E, on peut la construire ainsi :

$$\overline{E} = E \cup \left\{\text{limites des suites convergentes } \{\bar{x}_k\}_{n=k}^{\infty} \subset E\right\}$$

THÉORÈME D'HEINE-BOREL-LEBESGUE

ENSEMBLE COMPACT

$E \subset R^n$ est **compact** $\Leftrightarrow$ E est **fermé** et **borné**.

RECOUVREMENT

Les ensembles A_i forment un recouvrement de $E \Leftrightarrow E \subset \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

THÉORÈME D'HEINE-BOREL-LEBESGUE

Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide est **compact**

$\Leftrightarrow$ de tout recouvrement de E par des sous-ensembles ouverts, on peut extraire un nombre fini d'éléments qui recouvrent E.

Fonctions réelles de plusieurs variables réelles

Définitions

FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES

Une fonction $f\,:\,\underset{\neq\emptyset}{E}\subset\mathbb{R}^n\ (n\geq 1)\to\mathbb{R}$ est une application qui envoie $\bar{x}=(x_1,\ \dots,\ x_n)$ vers $\mathbb{R}$.

E est son **domaine de définition** et $f(E)$ son **ensemble image**.

ENSEMBLE DE NIVEAU

$\mathcal{N}_f(c)=\{\bar{x}\in E : f(\bar{x})=c\}\subset E$

Limites et continuité

LIMITE

Soit f définie dans un voisinage épointé de $\bar{x}_0$ ($\exists\delta>0$ tel que $B(\bar{x}_0,\ \delta)\backslash\{\bar{x}_0\}\subset E$).

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x})=\ell\Leftrightarrow \begin{array}{l}\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ tel que } \forall x\in E,\\ 0<\|\bar{x}-\bar{x}_0\|\leq\delta\Rightarrow|f(\bar{x})-\ell|\leq\varepsilon\end{array}$$

CARACTÉRISATION À PARTIR DES SUITES

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x})=\ell\Leftrightarrow \begin{array}{l}\text{pour toute suite } \{\bar{x}_k\}\subset E\backslash\{\bar{x}_0\}\\ \text{avec } \lim\limits_{k\to\infty}\bar{x}_k=\bar{x}_0,\ \lim\limits_{k\to\infty}f(\bar{x}_k)=\ell\end{array}$$

OPÉRATIONS ALGÉBRIQUES

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}(\bar{a}_n)+\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}(\bar{b}_n)=\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}(\bar{a}_n+\bar{b}_n)\qquad \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}(\bar{a}_n)-\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}(\bar{b}_n)=\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}(\bar{a}_n-\bar{b}_n)$$

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}(\bar{a}_n)\cdot\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}(\bar{b}_n)=\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}(\bar{a}_n\cdot\bar{b}_n)\qquad \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}\left(\frac{\bar{a}_n}{\bar{b}_n}\right)=\frac{\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}(\bar{a}_n)}{\lim_{n\to\infty}(\bar{b}_n)}\quad \text{si } b_n \text{ et } \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}\bar{b}_n\neq 0$$

REMARQUES

- **Pas de détachement des variables.** En général : $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\ y)\neq\lim\limits_{x\to x_0}\left[\lim\limits_{y\to y_0}f(x,\ y)\right]$.
- **Échange de l'ordre.** Si la limite en $(x,\ y)$ et les limites en x et y existent,
  alors $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\lim\limits_{y\to y_0}f(x,\ y)\right]=\lim\limits_{y\to y_0}\left[\lim\limits_{x\to x_0}f(x,\ y)\right]$.
- L'existence des limites multidimensionnelles n'implique pas l'existence des limites « 1D ».

THÉORÈME DES DEUX GENDARMES

Soient trois fonctions $f, g, h\,:\,E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ telles que $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}f(x)=\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}g(x)=\ell\in\mathbb{R}$.

S'il existe un α-voisinage pointé de $\bar{x}_0$ ($\{x\in E : 0<\|\bar{x}-\bar{x}_0\|\leq\alpha\}$ avec $\delta>0$)

dans lequel $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$, alors $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}h(x)=\ell$.

CHANGEMENT DE VARIABLES USUELS

On peut prouver certaines limites dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ avec le changement de variables suivants.

On peut alors calculer la limite en $r \to 0$, où φ et θ sont des fonctions inconnues de r.

COORDONNÉES POLAIRES

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

COORDONNÉES SPHÉRIQUES

$$\begin{cases} x = \cos\varphi\sin\theta \\ y = \sin\varphi\sin\theta \\ z = \cos\theta \end{cases}$$

CONTINUITÉ

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ et $\bar{x}_0 \in \mathring{E}$ un point intérieur de E.

$$f \text{ est continue en } \bar{x} = \bar{x}_0 \Leftrightarrow \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)$$

EXEMPLES DE FONCTIONS CONTINUES DANS $\mathbb{R}^n$

Addition, multiplication, polynômes, fonctions rationnelles…

CONTINUITÉ D'UNE FONCTION COMPOSÉE

Soient $\begin{matrix} \bar{g} : A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^p \\ f : B \to \mathbb{R} \end{matrix}$. Si :

- les coordonnées de $\bar{g}$ sont continues en $\bar{x}_0 \in A$
- f est continue en $\bar{g}(\bar{x}_0)$

$\Rightarrow$ $f \circ g(\bar{x})$ est continue en $\bar{x} = \bar{x}_0$.

MAXIMUM ET MINIMUM D'UNE FONCTION SUR UN COMPACT

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

DÉFINITIONS

$m \in \mathbb{R}$ est un **minimum** de f si $m \in f(E)$ et $\forall x \in E,\ f(x) \geq m$.

$M \in \mathbb{R}$ est un **maximum** de f si $M \in f(E)$ et $\forall x \in E,\ f(x) \leq M$.

IMAGE D'UN COMPACT

Si f est **continue** et $C \subset E$ est **compact**, alors $f(C)$ atteint son minimum et son maximum sur C.

VALEURS INTERMÉDIAIRES

Si de plus C est **convexe par chemins**, alors toute valeur intermédiaire entre m et M est atteinte.

Calcul différentiel des fonctions de plusieurs variables

Soit $f : E \to \mathbb{R}$, où $E \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert, et $\bar{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in E$.

Dérivées partielles et gradient

DÉRIVÉE PARTIELLE

On pose la fonction à une variable $g(s) = f(a_1,\ \ldots,\ \overset{k}{s},\ \ldots,\ a_n)$. Alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) = D_i(\bar{a}) = g'(a_i)$$

Par la définition de la dérivée, $\frac{\partial x}{\partial x_i}(\bar{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{e}_i) - f(\bar{a})}{t}$ (avec $\bar{e}_i = (0,\ \ldots,\ \overset{k}{1},\ \ldots,\ 0)$).

GRADIENT

Si toutes les dérivées partielles de f existent en $\bar{a}$,

$$\nabla f(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}),\ \cdots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \right)$$

DÉRIVÉE DIRECTIONNELLE

DÉFINITION

Soit $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{v} \neq \bar{0}$.

$$Df(\bar{a},\ \bar{v}) = \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{v}) - f(\bar{a})}{t}$$

GÉNÉRALISATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

$Df(\bar{a},\ \bar{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$. Donc si toutes les $Df(\bar{a},\ \bar{v})$ existent, les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ aussi.

AMPLIFICATION PAR UN SCALAIRE

$$Df(\bar{a},\ \lambda\bar{v}) = \lambda \cdot Df(\bar{a},\ \bar{v})$$

On peut donc calculer la dérivée directionnelle à partir des vecteurs unitaires.

Différentielle

DÉFINITION

f est **dérivable** au point $\bar{a}$ s'il existe $L_{\bar{a}} : E \to \mathbb{R}$ **linéaire** telle que :

$$f(\bar{x}) = f(\bar{a}) + L_{\bar{a}}(\bar{x} - \bar{a}) + r(\bar{x}) \quad \forall x \in E \quad \text{avec } \lim_{\bar{x} \to \bar{a}} \frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{a}\|} = 0$$

$L_{\bar{a}}$ s'appelle la **différentielle** de f au point $\bar{a}$. On la note aussi $L_{\bar{a}} = df(\bar{a})$.

C'est la même définition que pour dérivable en une dimension, où $L_{\bar{a}}$ est un scalaire.

D① IMPLICATIONS DE LA DÉRIVABILITÉ

Si f est **dérivable** en $\bar{a}$, alors :

- **Continuité** : f est continue en $\bar{a}$.
- **Dérivées directionnelles** : $Df(\bar{a}, \bar{v}) = L_{\bar{a}}(\bar{v})$ pour tout $\bar{v} \neq \bar{0}$.
- **(Dérivées partielles)** : Également, $\frac{\partial f}{\partial x_i} = L_{\bar{a}}(\bar{e}_k)$.
- **Gradient** : $\nabla f(\bar{a}) = \left(L_{\bar{a}}(\bar{e}_1),\ \dots,\ L_{\bar{a}}(\bar{e}_n)\right)$
- **Calcul de $L_{\bar{a}}$ par le gradient** : $L_{\bar{a}}(\bar{v}) = \langle \bar{v},\ \nabla f(\bar{a}) \rangle$
- **Gradient : plus grande pente** : Pour tout $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\bar{v}\| = 1$,
  $Df(\bar{a}, \bar{v}) \leq \|\nabla f(\bar{a})\|$
  et $\|\Delta f(\bar{a})\| = Df\left(\bar{a},\ \frac{\nabla f(\bar{a})}{\|\nabla f(\bar{a})\|}\right)$.
  Le gradient est $\perp$ aux courbes de niveau.

APPLICATION : PLAN TANGENT À LA SURFACE

L'équation du plan tangent à la surface de $z = f(x, y)$ au point $\left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right)$ est :

$$z = z_0 + \left\langle \nabla f(x_0, y_0),\ (x - x_0,\ y - y_0) \right\rangle$$

⚠️ Cette formule nécessite que f soit **dérivable** en ce point pour qu'elle ait du sens.

Dérivabilité

D② CONDITION SUFFISANTE POUR LA DÉRIVABILITÉ

S'il existe $\delta > 0$ tel que dans $B(\bar{a},\ \delta)$, toutes les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent et sont **continues en** $\bar{a}$
alors f est **dérivable en** $\bar{a}$.

CALCUL PAR LA DÉFINITION

On peut également savoir si la fonction est dérivable par la définition. Il faut que $\nabla f(\bar{a})$ existe et

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} \frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x}-\bar{a}\|} = 0 \qquad \text{où } r(\bar{x}) = f(\bar{x}) - f(\bar{a}) - \left\langle \nabla f(\bar{a}),\ \bar{x}-\bar{a} \right\rangle$$

Dérivées partielles d'ordre supérieur à 1

DÉRIVÉE PARTIELLE SECONDE

Si $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ existe en tout point, et qu'elle admet une dérivée partielle par rapport à x_i,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\ \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$$

FONCTION DE CLASSE C^p

On peut aussi définir les dérivées partielles d'ordre supérieur, par exemple ordre p.

Si toutes les dérivées partielles d'ordre p **existent** et sont **continues** sur E, alors $f \in C^p$.

D③ THÉORÈME DE SCHWARTZ (ORDRE DES DÉRIVÉES PARTIELLES)

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\ \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\ \partial x_i}$ sont **continues** en $\bar{a}$, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\ \partial x_j}(\bar{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\ \partial x_i}(\bar{a})$.

Il faut donc qu'elles existent dans un voisinage de $\bar{a}$.

Matrice hessienne

La **matrice hessienne** d'une fonction contient toutes ses dérivées partielles d'ordre 2.

Si f est de classe C^2, alors $\text{Hess}(f)(\bar{a})$ est **symétrique**.

$$\text{Hess}(f)(\bar{a}) = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\ \partial x_1}(\bar{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\ \partial x_1}(\bar{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\ \partial x_2}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\bar{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\ \partial x_2}(\bar{a}) \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\ \partial x_n}(\bar{a}) & \cdots & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{a}) \end{pmatrix}\right\}}_{2^{e}\text{ variable}} 1^{re}\text{ variable}$$

Extrema d'une fonction à plusieurs variables

DÉFINITIONS

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

POINT STATIONNAIRE

$\bar{a} \in E$ est un **point stationnaire** de f si $\nabla f(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}),\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})\right) = \bar{0}$.

MINIMUM/MAXIMUM LOCAL

f admet au point $\bar{a} \in E$ un :

- **minimum local** s'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall \bar{x} \in B(\bar{a}, \delta),\ f(\bar{a}) \leq f(\bar{x})$.
- **maximum local** s'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall \bar{x} \in B(\bar{a}, \delta),\ f(\bar{a}) \geq f(\bar{x})$.

Si f admet un minimum/maximum local le long de chaque droite passant par $\bar{a}$, cela n'implique pas qu'il y ait un minimum/maximum en $\bar{a}$.

POINT CRITIQUE

$\bar{a} \in E$ est un **point critique** de f

si $\bar{a}$ est un **point stationnaire** *ou* au moins une des dérivées partielles **n'existe pas** en $\bar{a}$.

Il n'y a des extremums locaux **qu'aux points critiques**.

Pour trouver les min/max sur un borné, on les cherche ① à l'intérieur et ② sur la frontière.

CONDITION SUFFISANTE

POUR n QUELCONQUE

Si $\bar{a} \in E$ est un **point stationnaire** de f, et les λ_i les **valeurs propres de** $\mathrm{Hess}_f(\bar{a})$,

$$\begin{cases} \lambda_i > 0 \quad \forall i \Rightarrow \text{minimum local en } \bar{a} \\ \lambda_i < 0 \quad \forall i \Rightarrow \text{maximum local en } \bar{a} \\ \lambda_i > 0 \text{ et } \lambda_j < 0 \Rightarrow \text{pas d'extremum en } \bar{a} \end{cases}$$

POUR $n = 2$

$$\mathrm{Hess}_f(\bar{a}) = \begin{pmatrix} r & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \det \mathrm{Hess}(\bar{a}) > 0 \text{ et } r > 0 \Rightarrow \text{min. loc. en } \bar{a} \\ \det \mathrm{Hess}(\bar{a}) > 0 \text{ et } r < 0 \Rightarrow \text{max. loc en } \bar{a} \\ \det \mathrm{Hess}(\bar{a}) < 0 \Rightarrow \text{pas d'ex. en } \bar{a} \end{cases}$$

POUR $n = 3$

$$\mathrm{Hess}_f(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3\, \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3\, \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x^3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \Delta_3 = 0 \Rightarrow \text{sans conclusion} \\ \Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 > 0 \Rightarrow \text{min. loc. en } \bar{a} \\ \Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0 \Rightarrow \text{max. loc en } \bar{a} \\ \text{sinon, avec } \Delta_3 \neq 0 \Rightarrow \text{pas d'extremum} \end{cases}$$

EXTREMA LIÉS : MÉTHODE DES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE

CAS $n = 2$

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la **fonction à analyser** et $g : E \to \mathbb{R}$ la **contrainte**,
où f et g sont de classe C^1 et $\nabla g(\bar{x}) \neq \bar{0}$.

$$\bar{x} \text{ est un extremum de } f \text{ sous la contrainte } g(\bar{x}) = 0$$
$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \nabla f(\bar{x}) = \lambda \cdot \nabla g(\bar{x})$$

λ s'appelle le **multiplicateur de Lagrange**.

CAS GÉNÉRAL

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la **fonction à analyser** et $g_1, \ \ldots, g_m : E \to \mathbb{R}$ les **contraintes**
de classe C^1 (sans de contraintes : $m \leq n - 1$). Si les $\nabla g_i(\bar{x})$ sont **linéairement indépendants**,

$$\bar{x} \text{ est un extremum de } f \text{ sous les contraintes } g_i(\bar{x}) = 0$$
$$\Rightarrow \exists \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \nabla f(\bar{x}) = \lambda_1 \cdot \nabla g_1(\bar{x}) + \cdots + \lambda_m \cdot \nabla g_m(\bar{x})$$

RECHERCHE D'EXTREMUMS

Si on cherche des extremums sous contraintes,

- On vérifie que les **contraintes** définissent un **compact**.
- On recherche les points sur la contrainte ($g(\bar{x}) = 0$) tels que $\nabla f(\bar{x}) = \lambda \cdot \nabla g(\bar{x})$ pour un λ.
- On compare les valeurs de f dans les points trouvés.

Fonctions à valeurs dans ℝᵐ

Définitions

$\bar{f} : E \to \mathbb{R}^m$ (où $E \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert), définie par $\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ (avec $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), est une **fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^m$**.

LIMITE

$\bar{f}$ **admet comme limite** $\bar{\ell} \in \mathbb{R}^m$ lorsque $\bar{x} \to \bar{a}$ si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ t.q. $\begin{array}{r} 0 < \|\bar{x} - \bar{a}\|_{\mathbb{R}^n} \leq \delta \\ \Rightarrow \|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{\ell}\|_{\mathbb{R}^m} \leq \varepsilon \end{array}$.

On peut la calculer composante par composante (si toutes existent) : $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} \bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f_1(\bar{a}) \\ \vdots \\ \lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f_m(\bar{a}) \end{pmatrix}$.

DÉRIVATION

DÉRIVÉE PARTIELLE, DÉRIVÉE DIRECTIONNELLE

Les dérivées partielles et directionnelles sont calculées par composante (si toutes existent) :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k}(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\bar{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(\bar{a}) \end{pmatrix} \qquad D\bar{f}(\bar{a},\, \bar{v}) = \begin{pmatrix} Df_1(\bar{a},\, \bar{v}) \\ \vdots \\ Df_m(\bar{a},\, \bar{v}) \end{pmatrix}$$

DÉRIVABILITÉ

$\bar{f}$ est **dérivable** en $\bar{a} \in E$ s'il existe $\bar{L}_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire (appelée **différentielle**) telle que :

$$\bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{a}) + \bar{L}_{\bar{a}}(\bar{x} - \bar{a}) + \bar{r}(\bar{x}) \quad \text{avec } \lim_{\bar{x} \to \bar{a}} \frac{\bar{r}(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{a}\|} = \bar{0}$$

(C'est la même définition que dans le cas $m = 1$, mais $\bar{r}(\bar{x})$ est un vecteur).

La différentielle peut s'obtenir composante par composante : $\bar{L}_{\bar{a}}(\bar{v}) = \begin{pmatrix} L_{1,\bar{a}}(\bar{v}) \\ \vdots \\ L_{m,\bar{a}}(\bar{v}) \end{pmatrix}$.

Matrice jacobienne

DÉFINITION

Si $\bar{f}$ possède toutes les dérivées partielles en $\bar{a}$, alors sa **matrice jacobienne** est :

$$J_{\bar{f}}(\bar{a}) = \text{fonction}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{a}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \vdots & & \ddots & \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{a}) & & & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{a}) \end{pmatrix}}_{\text{variable}}\right. = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\bar{a}) \end{pmatrix}$$

JACOBIEN

$|J_{\bar{f}}(\bar{a})| = \det J_{\bar{f}}(\bar{a})$ est appelé **jacobien** ou **déterminant de Jacobi**.

APPLICATIONS

CALCUL DE LA DÉRIVÉE DIRECTIONNELLE

Si $\bar{f}$ est dérivable,

$$D\bar{f}(\bar{a}, \bar{v}) = J_{\bar{f}}(\bar{a}) \cdot \bar{v}$$

DÉRIVÉES D'UNE FONCTION COMPOSÉE

Si $\bar{g}$ est dérivable en $\bar{a}$, et $\bar{f}$ est dérivable en $\bar{g}(\bar{a})$, alors on a :

$$J_{\bar{f}\circ\bar{g}}(\bar{a}) = J_{\bar{f}}\big(\bar{g}(\bar{a})\big) \cdot J_{\bar{g}}(\bar{a})$$

La différentielle est alors donnée par $\bar{L}_{\bar{f}\circ\bar{g}} = \bar{L}_{\bar{f}} \cdot \bar{L}_{\bar{g}}$.

CHANGEMENT DE VARIABLES

Si $\bar{g}$ est un changement de variable, son inverse $\bar{g}^{-1}$ doit être tel que $\det(\bar{g}) \cdot \det(\bar{g}^{-1}) = 1$.

Donc si $\bar{g}$ est **dérivable en** $\bar{a}$,

$$\bar{g} \text{ bijective dans un voisinage de } \bar{a} \Leftrightarrow \det J_{\bar{g}}(\bar{a}) \neq 0$$

LAPLACIEN

= Somme des dérivées partielles secondes par rapport à chaque variable.

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Le **laplacien** de f est :

$$\Delta f(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

CALCUL PAR LES COORDONNÉES POLAIRES

✨ Permet de calculer le gradient et le laplacien lorsque c'est fastidieux.

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \left(\cos\varphi \dfrac{d\tilde{f}}{\partial r} - \dfrac{1}{r} \sin\varphi \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi},\ \sin\varphi \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \dfrac{1}{r} \cos\varphi \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \right) \\ \Delta f(x, y) = \dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2} \end{cases}$$

où $\tilde{f}(r, \varphi)$ est la fonction en coordonnées polaires ($\tilde{f} = f \circ g(r, \varphi)$).

FONCTION HARMONIQUE

Une fonction est **harmonique sur** $E \subset \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \Delta f(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in E$.

Une fonction harmonique sur E atteint son **minimum et son maximum** sur la **frontière de** E.

Intégration

Soit $f : [a, b] \times I \to \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}$ ouvert, et $\frac{\partial f}{\partial y}$ continue.

DÉRIVÉE D'UNE VARIABLE AUTRE QUE LA VARIABLE D'INTÉGRATION

$$g(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx \qquad \Rightarrow g'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx \ \text{(de classe } C^1\text{)}$$

DÉRIVÉE D'UN INTÉGRATION AVEC BORNES PARAMÉTRÉES

$$F(t) = \int_{h(t)}^{g(t)} f(x, t)\, dx$$

$$\Rightarrow F'(t) = f\big(g(t), t\big) \cdot g'(t) \ - \ f\big(h(t), t\big) \cdot h'(t) \ + \ \int_{h(t)}^{g(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, dx$$

Formule de Taylor

Soit $f\,:\,E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ telle que dans un voisinage de $\bar{a}=(a,\ b,\ \cdots)\in E$, f est de classe C^{p+1}.

Alors il existe $\delta>0$ tel que $\forall\bar{x}\in B(\bar{a},\ \delta)\subset E$, il existe $\theta\in\,]0,\ 1[$ tel que :

$$f(\bar{x})=\underbrace{F(0)+F'(0)+\frac{1}{2}F''(0)+\cdots+\frac{1}{p!}F^{(p)}(0)}_{\text{Polynôme de Taylor } P_p f_{(\bar{x})}}+\underbrace{\frac{1}{(p+1)!}F^{(p+1)}(\theta)}_{\text{reste}}$$

avec $F\,:\,I\to\mathbb{R},\ F(t)=f(\bar{a}+t(\bar{x}-\bar{a}))$.

CALCUL DE $F^{(i)}$

On obtient $F^{(i)}$ par les coefficients de $(x_1+\cdots+x_n)^i$. Par exemple, pour $n=2$,

$$\begin{cases} F(0)=f(\bar{a}) \\ F'(0)=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a})\cdot(x-a)+\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{a})\cdot(y-b) \\ F''(0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{a})\cdot(x-a)^2+2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}(\bar{a})\cdot(x-a)(y-b)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\bar{a})\cdot(y-b)^2 \end{cases}$$

CALCUL EN UTILISANT LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS CONNUS

On peut essayer de réécrire une partie d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ en une fonction d'une seule variable qui tend vers 0 et utiliser les développements limités connus dans $\mathbb{R}$.

Théorème des fonctions implicites (TFI)

Soit $F : E \overset{n\geq 2}{\mathbb{R}^n}$ de classe C^1 au voisinage de $\bar{a} = (a_1,\ \dots,\ a_n) \in E$,
telle que $F(\bar{a}) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial x_n}(\bar{a}) \neq 0$.

Alors il dans un voisinage $B(\check{a},\ \delta)$ $(\check{a} = (a_1,\ \dots,\ a_{n-1}))$ une fonction $f : B(\check{a},\ \delta) \to \mathbb{R}$ telle que :

- $a_n = f(\check{a})$. « Dernière variable en sortie »
- $F\big(\underbrace{x_1, \dots, x_{n-1}}_{\check{x}},\ f(\check{x})\big) = 0$ pour tout $\check{x} \in B(\check{a},\ \delta)$. Satisfait l'équation au voisinage
- f est de classe C^1 et $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\check{a}) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{a})}{\frac{\partial F}{\partial x_n}(\bar{a})}$. Continuité de f et formule pour $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$

REFORMULATIONS

DANS LE CAS $n = 2$

Soit $F : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C_1 au voisinage de $(x, y) \in E$,
telle que $F(x, y) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$.

Alors dans un voisinage $]x - \delta,\ x + \delta[$, il existe f telle que :

- $y = f(x)$,
- $F\big(x,\ f(x)\big) = 0$ pour tout x du voisinage,
- $f \in C^1$ et $f'(x) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}\big(x,\ f(x)\big)}{\frac{\partial F}{\partial y}\big(x,\ f(x)\big)}$.

DANS LE CAS $n = 3$

Soit $F : E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C_1 au voisinage de $(x, y, z) \in E$,
telle que $F(x, y, z) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \neq 0$.

Alors dans un voisinage $B\big((x, y),\ \delta\big)$, il existe f telle que :

- $z = f(x,\ y)$,
- $F\big(x, y,\ f(x, y)\big) = 0$ dans le voisinage,
- $f \in C^1$ et $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}\big(x, y, f(x, y)\big)}{\frac{\partial F}{dz}\big(x, y, f(x, y)\big)} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, y, f(x, y)\big)}{\frac{\partial F}{dz}\big(x, y, f(x, y)\big)} \end{cases}$

(HYPER)PLAN TANGENT

L'équation de l'(hyper)plan tangent à $F(\bar{x}) = \bar{0}$ en $\bar{a}$ est :

$$\boxed{\big\langle \nabla F(\bar{a}),\ \bar{x} - \bar{a} \big\rangle = 0}$$

Calcul intégral des fonctions de plusieurs variables

Intégrales sur un pavé fermé

PAVÉS

$P \subset \mathbb{R}^n = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ est un **pavé fermé** (avec $a_i < b_i$ pour tout i).

Le **pavé ouvert** associé est $\mathring{P} =]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[$.

Son **volume** est $|P| = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$.

SOMMES DE DARBOUX

SUBDIVISION

Dans $\mathbb{R}$, une subdivision σ de $[a, b]$ est un ensemble $\{a, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, b\}$ avec $x_i < x_{i+1}$.

Dans $\mathbb{R}^n$, on forme une **subdivision σ de P** avec une subdivision par coordonnée.

La collection des pavés obtenus est dénotée par $D(\sigma)$.

SOMMES DE DARBOUX

- **Somme de Darboux inf. pour σ** $\quad \underline{S}_\sigma(f) = \sum_{Q \in D(\sigma)} m_Q \cdot |Q|$ où $m_Q = \inf_{\bar{x} \in Q} f(\bar{x})$
- **Somme de Darboux sup. pour σ** $\quad \overline{S}_\sigma(f) = \sum_{Q \in D(\sigma)} M_Q \cdot |Q|$ où $M_Q = \sup_{\bar{x} \in Q} f(\bar{x})$
- **Somme de Darboux inférieure** $\quad \underline{S}(f) = \sup_{\sigma \text{ de } P} \underline{S}_\sigma(f)$
- **Somme de Darboux supérieure** $\quad \overline{S}(f) = \inf_{\sigma \text{ de } P} \overline{S}_\sigma(f)$

ENCADREMENT + PRÉCISION

Soit $\tau = \sigma_1 \cup \sigma_2$.

$$\underline{S}_{\sigma_1}(f) \leq \underline{S}_\tau(f) \leq \underline{S}(f) \leq \overline{S}(f) \leq \overline{S}_\tau(f) \leq \overline{S}_{\sigma_1}(f)$$

INTÉGRABILITÉ

f bornée est **intégrable** sur un pavé fermé P si et seulement si $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$. On écrit alors

$$\int_P f(\bar{x})\, d\bar{x} = \iint \cdots \int f(\bar{x})\ dx_1\ \cdots\ dx_n = S(f)$$

Toute fonction **continue** est **intégrable** sur un pavé fermé.

INTÉGRALE : PROPRIÉTÉS

Pour P un pavé fermé, et f, g continues,

ADDITIVITÉ

$$P = \bigcup_i P_i \quad \Rightarrow \quad \int_P f(\bar{x})\, d\bar{x} = \sum_i \int_{P_i} f(\bar{x})\, d\bar{x}$$

P_i peut être infinie dénombrable.

LINÉARITÉ

$$\int_P \big(\alpha f(\bar{x}) + \beta g(\bar{x})\big)\, d\bar{x} = \alpha \int_P g(\bar{x})\, d\bar{x} + \beta \int_P g(\bar{x})\, d\bar{x} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ESTIMATION

$$|f(x)| \leq K \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow -K \cdot |P| \leq \int_P f(\bar{x})\, d\bar{x} \leq K \cdot |P|$$

THÉORÈME DE FUBINI

✨ Permet de calculer des intégrales à plusieurs variables sur un pavé fermé.

Soit $f : P \to \mathbb{R}$ continue où $P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ est un pavé fermé.

$$\int_P f(\bar{x})\, d\bar{x} = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(\bar{x})\, dx_n \right) \cdots dx_1$$

avec un **ordre d'intégration quelconque** (à choisir judicieusement !).

Intégrales sur un ensemble borné

INTÉGRABILITÉ

DÉFINITION

Soit E un domaine quelconque inclus dans un pavé fermé P. Alors

$$f(\bar{x}) \text{ intégrable sur } E \Leftrightarrow \hat{f}(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}) & \text{si } \bar{x} \in E \\ 0 & \text{si } \bar{x} \notin E \end{cases} \text{ intégrable sur } P.$$

CONDITION SUFFISANTE

Si f est **bornée** sur E, **continue** sur $\mathring{E}$ et ∂E est de **mesure nulle** (recouvrable par des sous-ensembles ouverts de volume $\leq \varepsilon$), alors $f(\bar{x})$ est **intégrable** sur E.

THÉORÈME DE FUBINI POUR LES DOMAINES RÉGULIERS

DOMAINE RÉGULIER DE TYPE ① (SELON x)

Soient $[a,\, b] \subset \mathbb{R}$,

$\varphi_1,\, \varphi_2 : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ continues

telles que $\varphi_1(x) < \varphi_2(x) \quad \forall x \in \,]a,\, b[$,

$D = \left\{(x, y) \subset \mathbb{R}^2 : x \in \,]a,\, b[, \;\; y \in \,]\varphi_1(x),\, \varphi_2(x)[\, \right\}$

et $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ continue sur l'adhérence.

$$\iint_D f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(\bar{x})\, dy \right) dx$$

DOMAINE RÉGULIER DE TYPE ② (SELON y)

Soient $[c,\, d] \subset \mathbb{R}$,

$\psi_1,\, \psi_2 : [c,\, d] \to \mathbb{R}$ continues

telles que $\psi_1(y) < \psi_2(y) \quad \forall y \in \,]c,\, d[$,

$D = \left\{(x, y) \subset \mathbb{R}^2 : y \in \,]c,\, d[, \;\; x \in \,]\psi_1(y),\, \psi_2(y)[\, \right\}$

et $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ continue sur l'adhérence.

$$\iint_D f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(\bar{x})\, dx \right) dy$$

On ne peut **pas** changer l'ordre d'intégration.

APPLICATION POUR LES DOMAINES NON RÉGULIERS

On divise en domaines réguliers et on utilise l'<u>additivité</u> de l'intégrale.

DOMAINES À TROIS DIMENSIONS

Soient $[a,\, b] \subset \mathbb{R},\; \underset{[a,\, b] \to \mathbb{R}}{\varphi_1,\, \varphi_2}$ continues avec $\underset{\forall x \in]a,\, b[}{\varphi_1(x) < \varphi_2(x)},\; D \subset \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x \in \,]a,\, b[\\ y \in \,]\varphi_1(x),\, \varphi_2(x)[\end{cases}$,

$G, H : \overline{D} \to \mathbb{R}$ continues telles que $\underset{\forall (x,y) \in D}{G(x,\, y) < H(x,\, y)}$ et $E \subset \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x \in \,]a,\, b[\\ y \in \,]\varphi_1(x),\, \varphi_2(x)[\\ z \in \,]G(x,\, y),\, H(x,\, y)[\end{cases}$.

Alors f est intégrable sur E :

$$\int_E f(\bar{x})\, dx\, dy\, dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{G(x,\, y)}^{H(x,\, y)} f(\bar{x})\, dz$$

Changement de variables

Soit $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** que l'on veut intégrer sur le **compact** $\overline{D}$.

Si la fonction est difficile à intégrer sur D mais plus facile en l'exprimant avec les coordonnées dans $E \subset \mathbb{R}^n$, où il y a un **changement de variable** $\psi : E \to D$ de classe C^1 (et bijectif),

$$\boxed{\int_D f(\bar{x})\, d\bar{x} = \int_E f\big(\psi(\bar{u})\big) \cdot \Big|\det J_\psi(\bar{u})\Big|\, d\bar{u}}$$

COORDONNÉES POLAIRES

$$\overset{r}{]0,\infty[} \times \overset{\varphi}{[0,2\pi[}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}}$$

$$|\det J_\psi| = r$$

COORDONNÉES SPHÉRIQUES

$$\overset{r}{]0,\infty[} \times \overset{\theta}{[0,\pi]} \times \overset{\varphi}{[0,2\pi[}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}}$$

$$|\det J_\psi| = r^2\sin\theta$$

COORDONNÉES CYLINDRIQUES

$$\overset{r}{]0,\infty[} \times \overset{\varphi}{[0,2\pi[} \times \overset{z}{\mathbb{R}}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}}$$

$$|\det J_\psi| = r$$

Il faut choisir la coordonnée « spéciale » z judicieusement !

Se baser sur les apparitions de $(x+y)^2$ et $(x+y+z)^2$.

Méthodes de démonstration

DÉFINITIONS

PROPOSITION

Une **proposition** est un énoncé qui est vrai ou faux.

DÉMONSTRATION

Une **démonstration** est une suite d'implications logiques pour dériver une proposition à partir d'axiomes et d'autres propositions préalablement obtenues.

MÉTHODES DE DÉMONSTRATION

DÉMONSTRATION DIRECTE

$P \Rightarrow Q \;\Leftrightarrow\; P \Rightarrow A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow \ldots \Rightarrow Q$

RAISONNEMENT PAR CONTRAPOSÉE

$P \Rightarrow Q \;\Leftrightarrow\;$ non $Q \Rightarrow$ non P

DISJONCTION DE CAS

On sépare P en plusieurs cas, et on montre que tous impliquent Q.

DÉMONSTRATION D'ÉQUIVALENCE

Pour démontrer $P \Leftrightarrow Q$:

- Démontrer $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ (**double implication**, plus simple) ;
- ou démontrer $P \Leftrightarrow R_1 \Leftrightarrow R_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow Q$ (méthode directe).

DÉMONSTRATION PAR L'ABSURDE

Pour montrer P, on montre que $\neg P$ implique un fait qu'on sait faux.

DÉMONSTRATION PAR LE PRINCIPE DES TIROIRS

Si $n+1$ objets sont placés dans n tiroirs, alors il y a au moins un tiroir avec 2 objets.

Si n objets sont placés dans k tiroirs, alors il y a au moins un tiroir avec $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ objets.

Pour prouver que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$ ($n \in \mathbb{N}$)…

RÉCURRENCE

On montre que $P(n_0)$ est vraie et $P(n) \Rightarrow P(n+1) \quad \forall n \geq n_0$.

GÉNÉRALISATION

On montre que $\left\{P(n_0),\ P(n_0+1),\ \cdots,\ P(n_0+k)\right\}$ sont vraies

et que $\{P(n),\ P(n+1),\ \cdots,\ P(n+k)\} \Rightarrow P(n+k+1) \quad \forall n \geq n_0$.

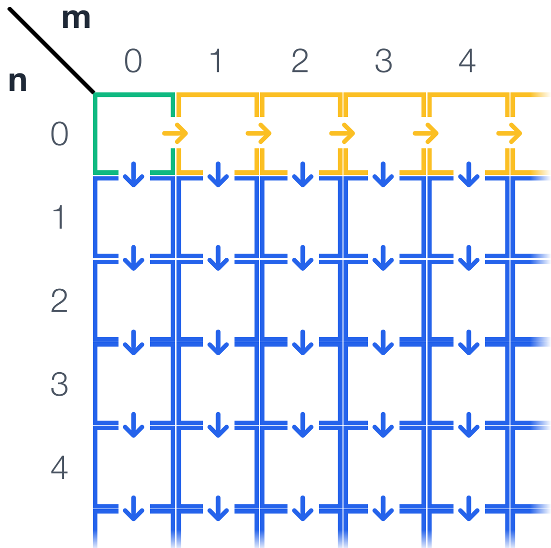
RÉCURRENCE FORTE

On montre que $P(n_0)$ est vraie et que $\{P(n_0),\ \ldots,\ P(n)\} \Rightarrow P(n+1) \quad \forall n \geq n_0$.

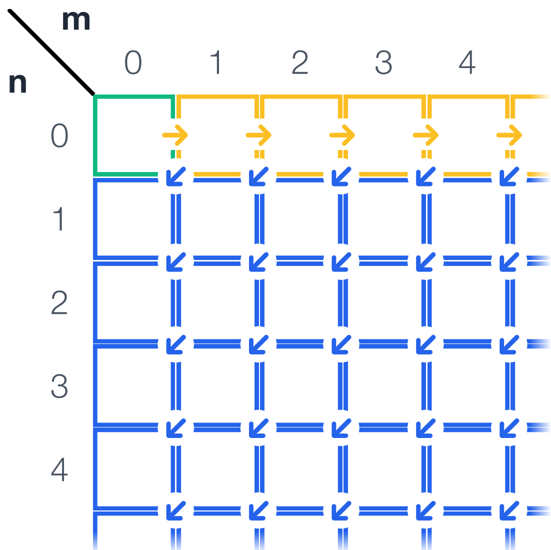
RÉCURRENCE À DEUX VARIABLES

On montre que $P(n,\ m)$ est vraie pour tout $n,\ m \geq 0$:

- **Méthode carrée**
  - **Base** : $P(0,\ 0)$ est vraie.
  - **1re ligne** : $P(n,\ 0) \Rightarrow P(n+1,\ 0) \quad \forall n \geq 0$.
    Si la situation est symétrique,
    on peut prouver
    $P(n,\ m) \Rightarrow P(n+1,\ m)$.
  - **Colonnes** :
    $P(n,\ m) \Rightarrow P(n,\ m+1) \quad \forall n,\ m \geq 0$.



- **Méthode diagonale**
  - **Base** : $P(0,\ 0)$ est vraie.
  - **1re ligne** : $P(n,\ 0) \Rightarrow P(n+1,\ 0) \quad \forall n \geq 0$.
  - **Diagonales** :
    $P(n+1,\ m) \Rightarrow P(n,\ m+1) \quad \forall n,\ m \geq 0$.



Démonstrations à connaître

EXISTENCE DE LA SOLUTION D'UNE EDVS

ÉNONCÉ

Il existe une solution à $f(y) \cdot y' = g(x)$ dans les conditions $\begin{cases} f(I) : \text{continue}, \ f(y) \neq 0 \quad \forall y \in I \\ g(J) : \text{continue} \\ y(x_0) = b_0 \end{cases}$

On peut aussi prouver que cette solution est unique.

IDÉE

L'équation nous permet de poser $\int f(y)\, dy = \int g(x)\, dx$,

et la condition $f(y) \neq 0$ nous permet d'inverser F afin de trouver y.

DÉROULEMENT

- **Définition de $F(y)$**

  Soit $F(y) = \int_{b_0}^{y} f(t)\, dt$.

  - **Dérivée** Par le *TFCalculus*, F est dérivable sur I et $F'(y) = f(y)$.
  - **Inversibilité** Comme $f(t) \neq 0$, F est monotone et donc inversible sur I.

- **Définition de $G(x)$**

  Soit $G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt$.

  - **Dérivée** Par le *TFCalculus*, G est dérivable sur J et $G'(x) = g(x)$.

- **Solution + preuve**

  Soit $y(x) = F^{-1}(G(x))$, définie sur un voisinage de $x_0 \in J$ (car inversible sur intervalle)

  - **Bingo !** En dérivant $F(y) = G(x)$, cela implique la condition de départ.
  - **Cond. initiales** On substitue pour avoir $y(x_0) = b_0$.

SOLUTION GÉNÉRALE EDL1

ÉNONCÉ

Toute solution de l'équation $y'(x) + p(x)\, y(x) = f(x)$ est de la forme $v(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}$

(où $v_0(x)$ est une autre solution, C une constante réelle, et $P(x)$ une primitive de $p(x)$).

IDÉE

$v_1 - v_0$ est (par superposition) solution de l'équation homogène (EDVS ⇒ sol. générale connue).

DÉROULEMENT

Soit une solution v_1 quelconque.

Par le <u>principe de superposition</u>, $v_1 - v_0$ est solution de l'équation homogène $\begin{aligned} &y'(x) + p(x)\, y(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0 \end{aligned}$.

Or, c'est une EDVS de solution générale $Ce^{-P(x)}$. Donc la solution $v_1 - v_0 = Ce^{-P(x)}$ pour un C.

En réorganisant, on voit que notre solution quelconque est de la forme $v(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}$.

WRONSKIEN ≠ 0 ⇔ SOLUTIONS LINÉAIREMENT INDÉPENDANTES

ÉNONCÉ

Soient v_1 et v_2 deux solutions de l'EDL2 homogène ★ : $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$.

v_1 et v_2 sont linéairement indépendantes ⇔ $W[v_1, v_2](x) \neq 0 \quad \forall x \in I$.

IDÉE

On montre les deux implications par contraposée. Le premier sens découle directement du déterminant, et pour l'autre on passe par l'unicité de la solution avec conditions initiales.

DÉROULEMENT

- **Linéairement dépendantes ⇒ Wronskien nul en au moins un point.**

  Sans perte de généralité, $v_1 = c\,v_2$, donc le déterminant $\begin{vmatrix} v_1 & v_1' \\ c\,v_1 & c\,v_1' \end{vmatrix}$ est nul $\forall x \in I$.

- **Wronskien nul en x_0 ⇒ linéairement dépendantes.**

  Soit x_0 tel que $W[v_1,\, v_2](x_0) = 0$.

  - **On récupère les coefficients de dépendance linéaire en x_0…**

    $\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix} = 0$, donc il existe $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tel que $\begin{cases} a\,v_1(x_0) + b\,v_2(x_0) = 0 \\ a\,v_1'(x_0) + b\,v_2'(x_0) = 0 \end{cases}$.

  - **…ce qui nous donne une solution particulière de ★…**

    Par superposition, $v(x) = a\,v_1(x) + b\,v_2(x)$ est une solution de ★,

    et la seule pour laquelle $v(x_0) = 0$ et $v'(x_0) = 0$.

  - **…qui en fait est la solution triviale.**

    Or, $y(x) = 0$ remplit aussi ces conditions, donc c'est la même et $a\,v_1 + b\,v_2 = 0 \quad \forall x \in I$.

  - **On a donc un lien de dépendance linéaire.**

    Comme $(a,\, b) \neq (0,\, 0)$, on peut poser $v_1 = -\frac{b}{a}v_2$ ou $v_2 = -\frac{a}{b}v_1$.

SOLUTION GÉNÉRALE EDL2 HOMOGÈNE

ÉNONCÉ

Soient v_1 et v_2 deux solutions de l'EDL2 homogène ★ : $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$.

Alors la solution générale est donnée par $v(x) = C_1v_1(x) + C_2v_2(x) \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I$.

DÉROULEMENT

Soit $\tilde{v}(x)$ une autre solution. On va montrer que c'est un multiple de v_1 et v_2.

- **Point de repérage** Soit un point $x_0 \in I$ quelconque. On pose $a_0 = \tilde{v}(x_0)$ et $b_0 = \tilde{v}'(x_0)$.

- **Coefficients**

  Il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ uniques tels que $\begin{cases} c_1v_1(x_0) + c_2v_2(x_0) = a_0 \\ c_1v_1'(x_0) + c_2v_2'(x_0) = b_0 \end{cases}$ (car $W[v_1,\, v_2] \neq 0$).

- **Vérification** $v(x) = c_1v_1(x) + c_2v_2(x)$ est une solution (par superposition)

  et est identique à $\tilde{v}$ en tout point (unicité avec conditions initiales).

ENSEMBLE FERMÉ ⇔ CONVERGENCE DES SUITES INCLUSES

ÉNONCÉ

Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé ⇔ toute suite convergente $\{\bar{x}_n\} \subset E$ est telle que $\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n \in E$.

IDÉE

On prouve les deux implications par contraposée.

DÉROULEMENT

- **Existence d'une suite de E convergente en dehors de $E \Rightarrow E$ non fermé.**

  On montre par l'absurde que si E était fermé, la limite ne pourrait pas être en dehors.

  - **Supposons l'inverse par l'absurde.**

    Supposons qu'il existe une telle suite et que E fermé.

  - **La limite est donc à une certaine distance de E…**

    La limite $\bar{x}$ de cette suite est donc dans $\complement(E)$, qui est un ensemble ouvert.

    Donc il existe $\delta > 0$ tel que $B(\bar{x},\ \delta)$ et E soient distincts.

  - **…et donc on ne s'en approche pas arbitrairement depuis la suite.**

    Cependant, cela est contradictoire avec le principe de la limite, car il faudrait qu'à partir d'un certain n $\|\bar{x}_n - \bar{x}\| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui n'est pas le cas avec $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$.

- **E non fermé ⇒ Existence d'une suite de E convergente en dehors de E.**

  On construit une telle suite.

  - **Récupérons $\bar{y}$, un « point de la frontière non inclus »**

    E non fermé ⇒ $\complement(E)$ non ouvert

    ⇒ $\exists \bar{y} \notin E$ tel que $\forall \delta > 0, B(\bar{y},\ \delta)$ n'est pas incluse dans $\complement(E)$ (contient un él. de E).

  - **Suite de boules se refermant sur $\bar{y}$**

    On définit la suite de boules $B_k = B\left(\bar{y},\ \frac{1}{k}\right)$.

    Pour chacune de ces boules, il existe un point $\bar{x}_k \in B_k$ tel que $\bar{x}_k \in E$.

  - **Bingo !**

    Les $\bar{x}_k$ sont donc une suite contenue dans E et qui converge vers $\bar{y}$.

CARACTÉRISATION DE LA LIMITE PAR LES SUITES

ÉNONCÉ

$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = \ell \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} f(\bar{a}_k) = \ell$ pour toute suite $\{\bar{a}_k\} \subset E\backslash\{\bar{x}_0\} : \lim_{k\to\infty} \bar{a}_k = \bar{x}_0$.

IDÉE

On prouve les deux implications, par la définition de la limite puis la contraposée (+ inverse limite).

DÉROULEMENT

- $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = \ell \Rightarrow$ **pour toute suite** $\bar{x}_k \to \bar{x}_0$ **avec** $\bar{x}_k \neq \bar{x}_0$**,** $f(\bar{x}_k) \to \ell$**.**
  - **Définition de la limite** : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tel que $0 < \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq \delta \Rightarrow \|\bar{x}_k - \ell\| \leq \varepsilon$.
  - **Suite dans le** δ**-voisinage** : alors pour $\{\bar{a}_k\} \to \bar{x}_0,\ \exists k_0$ tel que $\forall k \geq k_0,\ \|\bar{a}_k - \bar{x}_0\| \leq \delta$.
  - **Substitution** : donc $|f(\bar{a}_k) - \bar{x}_0| \leq \varepsilon$, et par la définition de la limite $\lim_{n\to\infty} f(\bar{a}_k) = \ell$.
- **Pour toute suite** $\bar{x}_k \to \bar{x}_0$ **avec** $\bar{x}_k \neq \bar{x}_0$**,** $f(\bar{x}_k) \to \ell \Rightarrow \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = \ell$ *(par contraposée)*
  - **Début de la contraposée (inversion déf. limite)** : supposons que $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) \neq \ell$.

    Alors $\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0$, il existe donc $\bar{x}_\delta$ tel que $0 < \|\bar{x}_\delta - \bar{x}_0\| \leq \delta$ et $|f(\bar{x}_0) - \ell| > \varepsilon$.
  - **Suites des** $\bar{x}_\delta$ **(voisinages pour être en dehors de la limite)** : avec $\delta = \frac{1}{k},\ \forall k \in \mathbb{N}^*$,

    on obtient la suite $\bar{x}_\delta$ qui tend vers $\bar{x}_0$, mais avec $|f(\bar{x}_k) - \ell| > \varepsilon$. Donc $\lim_{k\to\infty} f(\bar{x}_k) \neq \ell$.

MIN/MAX D'UNE FONCTION CONTINUE ATTEINTS SUR UN COMPACT

ÉNONCÉ

Une fonction continue sur un sous-ensemble compact $E \subset \mathbb{R}^n$ y atteint son $\min$ et $\max$.

IDÉE

On montre que $f(E)$ est borné, puis qu'il y a une suite tendant vers l'$\inf/\sup$ incluse dans E.

DÉROULEMENT

- $f(E)$ **est borné.** On le prouve par l'absurde.
  - **Suite permettant d'aller vers ∞ par f** : si $f(E)$ n'est pas borné, $|f(\bar{x})|$ peut être arbitrairement grand. Il y a donc une suite $\{\bar{x}_k\}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $|f(\bar{x}_k)| \geq k$.
  - **Sous-suite convergente des paramètres** : $\{\bar{x}_k\} \subset E$, donc c'est une suite bornée.

    Par Bolzano-Weierstrass, Il il y a une sous-suite $\{\bar{x}_{k_p}\}$ de $\{\bar{x}_k\}$ qui converge vers $\bar{x}_0$.

    $\bar{x}_0 \in E$ car E est fermé (et cette suite de E converge vers $\bar{x}_0$).
  - **Mais la continuité de f cause une contradiction** : f continue $\Rightarrow \lim_{p\to\infty} f(\bar{x}_{k_p}) = f(\bar{x}_0) \in \mathbb{R}$.

    Donc la suite $\bar{x}_k$ qui avait été choisie justement pour croître arbitrairement ne le fait pas.
- f **atteint un minimum et un maximum sur E.**
  - **Infimum/supremum et suites pour y accéder**

    Comme $f(E)$ est borné, alors il existe $m = \inf f(E)$ et $M = \sup f(E)$,

    avec $\{\bar{a}_k\} \subset E$ et $\{\bar{b}_k\} \subset E$ tels que $\lim f(\bar{a}_k) = m$ et $\lim f(\bar{b}_k) = M$.
  - **Sous-suites convergentes**

    Ces suites sont bornées et donc il existe des sous-suites convergentes

    $\{\bar{a}_{k_p}\} \to \bar{a}$ et $\{\bar{b}_{k_p}\} \to \bar{b}$ (Bolzano-Weierstrass). $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont dans E car il est fermé.

    Donc $m = f(\bar{a}) = \lim_{n\to\infty} f(\bar{a}_{k_p})$ (f continue) et $M = f(\bar{b}) = \lim_{n\to\infty} f(\bar{b}_{k_p})$

    sont le minimum et le maximum de f sur E.

CONDITION SUFFISANTE POUR UN EXTREMUM, CAS $n = 2$

ÉNONCÉ

Soit la matrice 2×2 symétrique $\mathrm{Hess}_f(\bar{a}) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ et ses valeurs propres λ_i.

Ces conditions sont équivalentes : $\begin{cases} ① \ \lambda_1 > 0, \ \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow \det \mathrm{Hess}_f(\bar{a}) > 0 \text{ et } r > 0 \\ ② \ \lambda_1 < 0, \ \lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \det \mathrm{Hess}_f(\bar{a}) > 0 \text{ et } r < 0. \\ ③ \ \lambda_1 > 0, \ \lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \det \mathrm{Hess}_f(\bar{a}) < 0 \end{cases}$

IDÉE

Passer par les théorèmes de l'algèbre linéaire.

DÉROULEMENT

$\mathrm{Hess}_f(\bar{a})$ est symétrique donc orthodiagonalisable, avec les valeurs propres λ_1 et λ_2.

- **Signe du déterminant**
  - Si les valeurs propres sont du **même signe**, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det \mathrm{Hess}_f(\bar{a}) > 0$.
  - Si elles sont de **signe opposé**, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det \mathrm{Hess}_f(\bar{a}) < 0$.
- ①②⇔ **Si les valeurs propres sont du même signe, le signe de r est le même.**
  - **Signe de r et t identique** $\det \mathrm{Hess}_f(\bar{a}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, donc $rt - s^2 > 0$.
  - **Trace** $\mathrm{tr}\, \mathrm{Hess}_f(\bar{a}) = \lambda_1 + \lambda_2 = r + s \lesseqgtr 0$, donc $r \lesseqgtr 0$.

CONDITION NÉCESSAIRE POUR UN EXTREMUM SOUS CONTRAINTE

ÉNONCÉ

Soit $f, g : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec $f, g \in C^1$, et $\bar{x}$ tel que $g(\bar{x}) = 0$ et $\nabla g(\bar{x}) \neq \bar{0}$.

Si $\bar{x}$ est un extremum de f avec la contrainte $g(\bar{x}) = 0$, alors $\nabla f(\bar{x}) = \lambda \cdot \nabla g(\bar{x})$ avec un $\lambda \in \mathbb{R}$.

IDÉE

On passe par le théorème des fonctions implicites.

DÉROULEMENT

- **Conditions TFI** Par hypothèse, $g(\bar{x}) = 0$. Supposons que $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}) \neq 0$ (sinon, on le fait en x).
- **Application TFI** On a $y = h(x)$ avec $g(x, \ h(x)) = 0$ au voisinage de $x = a$…
- **TFI : dérivée** …et $h'(x) = -\dfrac{\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x})}{\frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x})}$.
- **f selon x** On peut donc réécrire au voisinage $f(x, y) = f\big(x, \ h(x)\big)$…
- **f' selon x** …donc $f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \ h(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \ h(x)) \cdot h'(x)$.