EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
mars 2021

Analyse II

Résumé: Équations différentielles ordinaires.

Définitions.

1. Une *équation différentielle ordinaire* est une expression

$$E(x, y(x), y'(x), \dots y^{(n)}(x)) = 0$$

   où $E : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ une fonction donnée, $n \in \mathbb{N}_+$. On cherche un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction de classe C^n telle que l'équation soit satisfaite pour tout $x \in I$.

2. *L'ordre* de l'équation différentielle est l'ordre maximal de dérivée de $y(x)$ qui apparaît dans l'équation.

3. *La solution générale* d'une équation différentielle est l'ensemble de toutes les solutions de l'équation.

4. Problème de Cauchy: résoudre l'équation $E(x, y(x), y'(x), \dots y^{(n)}(x)) = 0$ et trouver l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $y(x) : I \to \mathbb{R}$ de classe $C^n(I)$ telle que *les conditions initiales* $y(x_0) = a_0, y'(x_0) = b_0$, etc. sont satisfaites. Le nombre et caractère des conditions initiales dépend du type de l'équation.

5. *La solution maximale* du problème de Cauchy est la solution définie sur le plus grand intervalle possible.

Méthodes de résolution des certains types des équations différentielles.

1. Équation différentielle à variables séparées du premier ordre (EDVS):

$$f(y) \cdot y'(x) = g(x)$$

   où $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur I, et $g : J \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur J.

2. (Existence et unicité d'une solution de EDVS avec la condition initiale donnée).
   Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(y) \neq 0$ sur I, et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout couple $x_0 \in J$, $b_0 \in I$, l'équation

$$f(y)y'(x) = g(x)$$

   admet une solution $y : J' \to I$, $J' \subset J$ vérifiant les conditions initiales $y(x_0) = b_0$. Si $y_1 : J_1 \to I$ et $y_2 : J_2 \to I$ sont deux solutions telle que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = b_0$, alors $y_1(x) = y_2(x)$ pour tout $x \in J_1 \cap J_2$.

3. Pour résoudre une EDVS:
$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$
où $\int g(x)\,dx$ est la primitive générale. La solution de cette équation pour $y = y(x)$ donne la solution générale de l'EDVS.

4. Équation différentielle linéaire du priemier ordre (EDL1): Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Une équation
$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = f(x),$$
où $p, f : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

5. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Une équation
$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = 0,$$
où $p, f : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, est une équation différentielle linéaire du premier ordre *homogène*.

6. Soit $y'(x) + p(x) \cdot y(x) = 0$ une EDL1 homogène. Alors la fonction $y : I \to \mathbb{R}$,
$$y(x) = Ce^{-P(x)},$$
où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur I, est la solution générale de cette équation pour tout $C \in \mathbb{R}$.

7. Principe de superposition des solutions pour EDL1: Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert, $p, f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Supposons que $v_1 : I \to \mathbb{R}$ et $v_2 : I \to \mathbb{R}$ sont des solutions des équations $y' + p(x)y = f_1(x)$ et $y' + p(x)y = f_2(x)$, respectivement. Alors la fonction
$$v(x) = v_1(x) + v_2(x)$$
est une solution particulière de l'équation $y' + p(x)y = f_1(x) + f_2(x)$.

8. Méthode de la variation des constantes pour EDL1: Une solution particulère de l'équation $y' + p(x)y = f(x)$ est la fonction $v : I \to \mathbb{R}$:
$$v(x) = \left(\int f(x)e^{P(x)}\,dx\right) \cdot e^{-P(x)}$$
où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$.

9. Solution générale de l'EDL1: Soient $f, p : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors la solution générale de l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$ est
$$v(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) = Ce^{-P(x)} + \left(\int f(x)e^{P(x)}\,dx\right) \cdot e^{-P(x)},$$
où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$.

10. Équation différentielle linéaire du second ordre (EDL2): Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Une équation différentielle de la forme
$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$$
où $p, q, f : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, est dite une équation différentielle linéaire du second ordre (EDL2).

11. Équation différentielle linéaire du second ordre *homogène* est une équation de la forme

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0,$$

où $p, q : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

12. Équation différentielle linéaire du second ordre homogène *à coefficients constants* est une équation de la forme

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0,$$

où p, q sont des nombres réels.

13. Soit $y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$, une EDL2 (hom) à coefficients constants $p, q \in \mathbb{R}$, et supposons que a, b sont des solutions de l'équation caractéristique $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Alors sa solution générale pour tout $x \in \mathbb{R}$ est

$$y(x) = \left[\begin{array}{lll} C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}, & \text{si} & a \neq b, \ \ a, b \in \mathbb{R}, \\ C_1 e^{ax} + C_2 x e^{ax}, & \text{si} & a = b \in \mathbb{R}, \\ C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x, & \text{si} & a = \alpha + i\beta = \bar{b} \notin \mathbb{R} \end{array} \right.$$

pour tout couple $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

14. Une EDL2 homogène admet une seule solution $y : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $y(x_0) = a_0$ et $y'(x_0) = b_0$ pour tout $x_0 \in I$, $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$.

15. Deux solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ d'une EDL2 homogène sur $I \subset \mathbb{R}$ sont dites linéairement indépendantes s'il n'existe pas de constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $y_2(x) = cy_1(x)$ ou $y_1(x) = cy_2(x)$ pour tout $x \in I$.

16. Si $v_1 : I \to \mathbb{R}$ est une solution de l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ telle que $v_1(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors

$$v_2(x) = v_1(x) \cdot \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} \, dx$$

est une solution linéairement indépendante, où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$.

17. Si $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables sur $I \subset \mathbb{R}$, alors la fonction $W[v_1, v_2] : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$W[v_1, v_2](x) = \det \begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} = v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x)$$

est appelée le Wronskien de v_1 et v_2.

18. Soient $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$. Alors les fonctions $v_1(x)$ et $v_2(x)$ sont linéairement indépendantes si et seulement si $W[v_1, v_2] \neq 0$ pour tout $x \in I$.

19. Soient $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions linéairement indépendantes de l'EDL2 homogène. Alors la solution générale de cette équation est de la forme

$$v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad x \in I.$$

20. Méthode de la variation des constantes pour EDL2: Supposons que $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$. Alors la fonction

$$v(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x),$$

où

$$c_1(x) = -\int \frac{f(x)v_2(x)}{W[v_1, v_2](x)}\,dx \qquad c_2(x) = \int \frac{f(x)v_1(x)}{W[v_1, v_2](x)}\,dx$$

(où on supprime les constantes), est une solution de l'équation complète $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x) = f(x)$.

21. Méthode des coefficients indéterminés pour EDL2 à coefficients constants I: Considérons l'équation

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = f(x), \qquad p, q \in \mathbb{R},$$

où $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, $P_n(x)$ un polynôme de dégré n, et a un nombre réel. Alors

   (a) si $a \in \mathbb{R}$ n'est pas une solution de l'équation caractèristique $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, on utilise l'Ansatz $y(x) = e^{ax}T_n(x)$, où $T_n(x)$ est un polynôme inconnu de dégré n.

   (b) si $a \in \mathbb{R}$ est une solution de l'équation caractèristique $\lambda^2+p\lambda+q = 0$ de multiplicité r ($r = 1, 2$), on utilise l'Ansatz $y(x) = x^r e^{ax}T_n(x)$, où $T_n(x)$ est un polynôme inconnu de dégré n.

   Ensuite on remplace l'Ansatz dans l'équation différentielle pour obtenir les équations sur les coefficients indéterminés.

22. Méthode des coefficients indéterminés pour EDL2 à coefficients constants II: Considérons l'équation

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = f(x), \qquad p, q \in \mathbb{R},$$

où $f(x) = e^{ax}(\cos(bx)P_n(x) + \sin(bx)Q_m(x))$, $P_n(x)$ et $Q_m(x)$ des polynômes de degré n et m respectivement, et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

   (a) si $a \pm ib \in \mathbb{C}$ n'est pas une solution de l'équation caractèristique $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, on utilise l'Ansatz $y(x) = e^{ax}(T_N(x)\cos(bx) + S_N(x)\sin(bx)$, où $N = \max(n, m)$, $T_N(x)$ et $S_N(x)$ sont des polynômes inconnus de degré N.

   (b) si $a \pm ib \in \mathbb{C}$ est une solution de l'équation caractèristique $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, on utilise l'Ansatz $y(x) = xe^{ax}(T_N(x)\cos(bx) + S_N(x)\sin(bx)$, où $N = \max(n, m)$, $T_N(x)$ et $S_N(x)$ sont des polynômes inconnus de degré N.

   Ensuite on remplace l'Ansatz dans l'équation différentielle pour obtenir les équations sur les coefficients indéterminés.

23. Principe de superposition des solutions pour EDL2: Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert, $p, q, f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Supposons que $v_1 : I \to \mathbb{R}$ et $v_2 : I \to \mathbb{R}$ sont des solutions particulières des équations $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f_1(x)$ et $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f_2(x)$, respectivement. Alors la fonction $v : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$v(x) = v_1(x) + v_2(x)$$

est une solution particulière de l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Anna Lachowska

Analyse II
Résumé: Espace $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel normé.

1. $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des tous les n-tuples ordonnés $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)$ des nombres réels muni des opérations suivantes:
   (a) l'addition vectorielle : $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots y_n)$,
   $$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots x_n + y_n)$$
   (b) la multiplication par un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$,
   $$\lambda \cdot \bar{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots \lambda x_n).$$
   (c) le produit scalaire
   $$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
   (d) la norme euclidienne
   $$||\bar{x}|| = (\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}.$$

   Donc $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel normé.

2. Propriétés de la norme euclidienne:
   (a) $||\bar{x}|| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = (0, 0, \dots 0)$
   (b) $||\lambda \cdot \bar{x}|| = |\lambda| \cdot ||\bar{x}||$ pour tout $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$
   (c) Cauchy-Schwartz: pour tout $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$,
   $$|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq ||\bar{x}|| \cdot ||\bar{y}||$$
   (d) L'inégalité triangulaire: pour tout $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$,
   $$||\bar{x} + \bar{y}|| \leq ||\bar{x}|| + ||\bar{y}||$$
   (e) L'inégalité triangulaire inverse: pour tout $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$,
   $$||\bar{x} - \bar{y}|| \geq |\ ||\bar{x}|| - ||\bar{y}||\ |$$

Topologie dans $\mathbb{R}^n$.

1. Boule ouverte: Pour tout $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $\delta > 0$, l'ensemble $B(\bar{x}, \delta) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : ||\bar{y} - \bar{x}|| < \delta\}$ est appelé *la boule ouverte* de centre $\bar{x}$ et de rayon δ.

2. $\bar{x} \in E \subset \mathbb{R}^n$ est *un point intérieur* du sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ s'il existe $\delta > 0$ tel que $B(\bar{x}, \delta) \subset E$. L'ensemble des points intérieurs de E est appelé *l'intérieur* de E et noté $\mathring{E}$.

3. Un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$ si tout point de E est un point intérieur. ($\Leftrightarrow E = \mathring{E}$). L'ensemble vide $\emptyset \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert par la définition.

4. Toute réunion de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. Toute intersection finie de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

5. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. Alors E est *fermé* si son complémentaire $CE = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \notin E\}$ est ouvert.

6. Toute intersection de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$. Toute réunion finie de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

7. Les seuls sous-ensembles à la fois ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$ sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$.

8. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non-vide. Alors l'intersection de tous les fermés contenant E est appelée *l'adhérence* de E et notée $\bar{E}$. Pour tout sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$, on a $\mathring{E} \subset E \subset \bar{E}$.

9. Un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé $\Leftrightarrow E = \bar{E}$.

10. Un point $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est *un point frontière* de $E \subset \mathbb{R}^n : E \neq \emptyset$, $E \neq \mathbb{R}^n$ si toute boule ouverte de centre $\bar{x}$ contient au moins un point de E et au moins un point de CE. L'ensemble des points frontières de E est *la frontière* de E, notée ∂E.

11. Soit $E \subset \mathbb{R}^n : E \neq \emptyset$, $E \neq \mathbb{R}^n$. Propriétés de la frontière:
    (a) $\partial E \cap \mathring{E} = \emptyset$
    (b) $\mathring{E} \cup \partial E = \bar{E}$
    (c) $\bar{E} \setminus \mathring{E} = \partial E$.

12. Une *suite* d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$,
$$f : k \to \bar{x}_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, \dots x_{n,k}) \in \mathbb{R}^n.$$
Notation: $\{\bar{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$.

13. Une suite $\{\bar{x}_k\}$ est *convergente* et admet pour limite $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, on a $||\bar{x}_k - \bar{x}|| \leq \varepsilon$. Notation:
$$\lim_{k \to \infty} \bar{x}_k = \bar{x}.$$

14. La limite d'une suite $\{\bar{x}_k\}$, si elle existe, est unique.

15. Une suite $\{\bar{x}_k\}$ est *bornée* s'il existe $M > 0$ tel que $||\bar{x}_k|| \leq M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

16. Toute suite convergente d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est bornée.

17. (Théorème Bolzano-Weierstrass) De toute suite bornée $\{\bar{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ on peut extraire une sous-suite convergente.

18. Un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé si est seulement si toute suite $\{\bar{x}_k\} \subset E$ qui converge, converge vers un élément de E.

19. Pour obtenir l'adhérence d'un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$, il faut et il suffit d'ajouter à E les limites des toutes suites convergentes d'éléments de E.

20. Un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est *borné* s'il existe $M > 0$ tel que $||\bar{x}|| \leq M$ pour tout $\bar{x} \in E$.

21. Un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est *compact* s'il est à la fois fermé et borné.

22. (Théorème Heine-Borel-Lebesgue) Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact si est seulement si de tout recouvrement de E par des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$

$$E \subset \cup_{i \in I} A_i, \qquad A_i \subset \mathbb{R}^n \text{ ouvert } \forall i \in I$$

on peut extraire une famille finie qui est un recouvrement de E:

$$E \subset \cup_{j=1}^{m} A_{i_j}, \qquad i_j \in I \quad \forall j = 1, \ldots m.$$

EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
avril 2021

Analyse II

Résumé: Limites et continuité des fonctions de plusieurs variables.

Définitions et résultats.

1. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $\bar{x}_0$ (mais pas nécessairement en x_0). Alors f admet pour limite le nombre réel l lorsque $\bar{x}$ tend vers $\bar{x}_0$ si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $\delta > 0$ tel que pour tout $\bar{x} \in E : 0 < ||\bar{x} - \bar{x}_0|| \leq \delta$, on a $|f(\bar{x}) - l| \leq \varepsilon$. Alors on écrit $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l$.

2. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $\bar{x}_0 \in E$ un point intérieur. Alors $f : E \to \mathbb{R}$ est continue en $\bar{x}_0$ si
$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0).$$

3. (Caractérisation de la limite). Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\bar{x}_0$ (mais pas nécessairement en x_0) admet pour limite le nombre réel l lorsque $\bar{x}$ tend vers $\bar{x}_0$ si et seulement si pour toute suite $(\bar{a}_k)$ d'éléments de $\{\bar{x} \in E : \bar{x} \neq \bar{x}_0\}$, qui converge vers $\bar{x}_0$, la suite $f(\bar{a}_k)$ converge vers l.

4. (Opérations sur les limites). Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $f, g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l_l$ et $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} g(\bar{x}) = l_2$. Alors
   (a) $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} (\alpha f + \beta g)(\bar{x}) = \alpha l_1 + \beta l_2$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   (b) $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} (f \cdot g)(\bar{x}) = l_1 \cdot l_2$.
   (c) Si $l_2 \neq 0$, alors $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \left(\frac{f}{g}\right)(\bar{x}) = \frac{l_1}{l_2}$.

5. Toutes les fonctions rationnelles et trigonométriques sont continues sur leurs domaines.

6. (Deux gendarmes). Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $f, g, h : E \to \mathbb{R}$ trois fonctions telles que (1) $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} g(\bar{x}) = l$ et (2) il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout $\bar{x} \in \{\bar{x} \in E : 0 < ||\bar{x} - \bar{x}_0|| \leq \alpha\}$, on a $f(\bar{x}) \leq h(\bar{x}) \leq g(\bar{x})$. Alors $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} h(\bar{x}) = l$.

7. Une fonction continue sur un sous-ensemble compact $D \subset \mathbb{R}^n$ atteint son maximum et son minimum.

Anna Lachowska
mai 2021

Analyse II

Résumé: Calcul différentiel des fonctions des plusieurs variables.

Dérivées partielles et directionnelles.

1. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert, $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction, $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots a_n) \in E$. On définit la fonction $g(s) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, s, a_{k+1}, \dots, a_n)$. Alors si g est dérivable en $a_k \in \mathbb{R}$, on dit que la k-ème dérivée partielle de f existe et est égale à $g'(a_k)$. On écrit

$$\partial_k f(\bar{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) = g'(a_k) = \lim_{t \to 0} \frac{g(a_k + t) - g(a_k)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{e}_k) - f(\bar{a})}{t}.$$

Ici $\bar{e}_k$ est le k-ème vecteur de la base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

2. Si toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{a}), \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})$ existent en $\bar{a}$, alors on définit le gradient de f en $\bar{a}$ comme le vecteur

$$\nabla f(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \right).$$

3. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert, $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction, $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots a_n) \in E$, $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur tel que $\bar{v} \neq \bar{0}$. On définit la fonction $g(s) = f(\bar{a} + t\bar{v})$. Alors si g est dérivable en $t = 0$, on dit que la dérivée directionnelle de f en $\bar{a}$ suivant le vecteur $\bar{v}$ existe et est égale à $g'(0)$. On écrit

$$Df(\bar{a}, \bar{v}) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{v}) - f(\bar{a})}{t}.$$

4. (Propriétés des dérivées directionnelles)
   (a) Si $\bar{v} = \bar{e}_k$, le k-ème vecteur de la base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, alors $Df(\bar{a}, \bar{e}_k) = \partial_k f(\bar{a})$.
   (b) $Df(\bar{a}, \lambda\bar{v}) = \lambda Df(\bar{a}, \bar{v})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $\bar{v} \neq \bar{0}$.

Dérivabilité et la différentielle.

1. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert, $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction, $\bar{a} \in E$. On dit que f est dérivable au point $\bar{a}$ s'il existe une application linéaire $L_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et une fonction $r : E \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $\bar{x} \in E$

$$f(\bar{x}) = f(\bar{a}) + L_{\bar{a}}(\bar{x} - \bar{a}) + r(\bar{x}), \qquad \lim_{\bar{x} \to \bar{a}} \frac{r(\bar{x})}{||\bar{x} - \bar{a}||} = 0.$$

L'application linéaire $L_{\bar{a}}$ s'appelle la différentielle de f au point $\bar{a} \in E$.

2. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est dérivable en tout $\bar{a} \in E$, alors on dit que f est dérivalbe sur $E \subset \mathbb{R}^n$.

3. (Propriétés des fonctions dérivables). Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{a} \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}$ telle que f est dérivable en $\bar{a}$ de différentielle $L_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Alors:

   (a) f est continue en $\bar{a}$.

   (b) Pour tout $\bar{v} \neq \bar{0}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$, la dérivée directionnelle $Df(\bar{a}, \bar{v})$ existe et $Df(\bar{a}, \bar{v}) = L_{\bar{a}}(\bar{v})$.

   (c) En particulier, toutes les dérivées partielles existent et $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) = L_{\bar{a}}(\bar{e}_k)$.

   (d) Le graident de f existe en $\bar{a}$ et $\nabla f(\bar{a}) = (L_{\bar{a}}(\bar{e}_1), L_{\bar{a}}(\bar{e}_2), \ldots L_{\bar{a}}(\bar{e}_n))$.

   (e) Pour tout $\bar{v} \neq \bar{0}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$, on a $Df(\bar{a}, \bar{v}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{v} \rangle$.

   (f) Pour tout $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $||\bar{v}|| = 1$, on a $Df(\bar{a}, \bar{v}) \leq ||\nabla f(\bar{a})||$. Le gradient donne la direction de la plus grande pente de f en $\bar{a}$.

4. (Plan tangent). Soit $E \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en (x_0, y_0). Alors l'équation du plan tangent au graphique de f en point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est

$$z = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle.$$

5. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ telle que la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x})$ existe en tout $\bar{x} \in E$. Si la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ admet à son tour une dérivée partielle par rapport à x_i sur E, on obtient la dérivée partielle d'ordre 2

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}.$$

   On peut définir ainsi les dérivées partielles d'ordre $p \geq 1$.

6. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble ouvert et $p \geq 1$ un nombre naturel. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite de classe C^p dans E si toutes les dérivées partielles de f d'ordre $1, 2, \ldots p$ existent et sont continues dans E.

7. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble ouvert, et $p \geq 2$ un nombre naturel. Alors $f \in C^p(E)$ implique $f \in C^k(E)$ pour tout $k = 1, 2, \ldots p - 1$.

8. (Condition suffisante pour que la fonction soit dérivalbe à un point). Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{a} \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que toutes les dérivées partielles de f existent dans une boule ouverte de centre $\bar{a}$ et de rayon δ, et qu'elles sont continues en $\bar{a}$. Alors f est dérivalbe en $\bar{a}$. En particulier, $f \in C^1(E)$ implique la dérivabilité de f dans E.

9. (Théorème de Schwarz). Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{a} \in E$, et $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}$ existent et sont continues au point $\bar{a}$. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(\bar{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(\bar{a}).$$

   En particulier, $f \in C^2(E)$ implique l'égalité des dérivées partielles secondes mixtes de f dans E.

10. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ telle que toutes les dérivée partielle d'ordre 2 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(\bar{a})$ existent en $\bar{a} \in E$. Alors la matrice hessienne de f en $\bar{a}$ est

$$\text{Hess}_f(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\bar{a}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{a}) \end{pmatrix}.$$

11. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble ouvert et $f : E \to \mathbb{R}$. Alors on a:

$$f \in C^\infty(E) \implies f \in C^p(E)\ \forall p \geq 1 \implies f \in C^1(E) \implies f \text{ est derivable dans } E \implies$$

$$\implies \forall \bar{x} \in E, \bar{v} \in \mathbb{R}^n, \bar{v} \neq \bar{0}\ \ \exists\, Df(\bar{x}, \bar{v}) \implies \forall 1 \leq k \leq n, \bar{x} \in E\ \exists\ \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}).$$

Aussi, on a

$$f \text{ est derivable dans } E \implies f \text{ est continue dans } E.$$

Aucune implication n'est reversible.

12. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble ouvert et $f : E \to \mathbb{R}$. L'existence des dérivées directionnelles $Df(\bar{a}, \bar{v})$ de toutes directions $\bar{v} \in \mathbb{R}^n, \bar{v} \neq \bar{0}$ n'implique ni continuité ni dérivabilité de f au point $\bar{a}$. L'existence de toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}), k = 1, \dots n$ n'implique ni continuité ni dérivabilité de f au point $\bar{a}$.

Fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ et la matrice jacobienne.

1. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert. Alors on peut considerer les applications $\bar{f}(\bar{x}) : E \to \mathbb{R}^m$, où $\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots f_m(\bar{x}))^T$. Si $n = m$, alors on dit que $\bar{f}(\bar{x})$ est un champ vectoriel.

2. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Le champ vectoriel $(\nabla f(\bar{x}))^T$ est orthogonal aux linges (hypersurfaces) de niveau de la fonction $f(\bar{x})$.

3. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $\bar{f} : E \to \mathbb{R}^m$ une fonction. La k-eme dérivée partielle de $\bar{f}$ en $\bar{a} \in E$ est

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k}(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\bar{a}), \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(\bar{a}) \right)^T,$$

si chacune des fonctions $f_1, \dots f_m$ admet une dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_k}$ au point $\bar{a}$.

4. La fonction $\bar{f} : E \to \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$ est dérivable en $\bar{a} \in E$ si et seulement si chaque composante $f_i : E \to \mathbb{R}$ est dérivable en $\bar{a}$ pour tout $i = 1 \dots m$.

5. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. Si la fonction $\bar{f} : E \to \mathbb{R}^m$ est dérivable en $\bar{a} \in E$, alors sa matrice Jacobienne est définie par la formule:

$$J_{\bar{f}}(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{a}) \\ \nabla f_2(\bar{a}) \\ \dots \\ \nabla f_m(\bar{a}) \end{pmatrix},$$

où $\nabla f_i(\bar{a})$ est le gradient de la fonction f_i en $\bar{a}$.

6. Lorsque $m = n$, on définit le déterminant de Jacobi (le Jacobien) de $\bar{f} : E \to \mathbb{R}^n$ en $\bar{a}$ comme le determinant de la matrice Jacobienne.

7. La matrice Jacobienne du gradient d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 est égale à la matrice Hessienne de f :
$$J_{(\nabla f)^T}(\bar{a}) = \text{Hess}_f(\bar{a}).$$

8. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^p$, et les fonctions $\bar{g} : A \to \mathbb{R}^p$, $\bar{f} : B \to \mathbb{R}^q$ telles que (1) $\bar{g}(A) \subset B$, (2) $\bar{g}$ est dérivable en $\bar{a} \in A$, (3) $\bar{f}$ est dérivable en $\bar{b} = \bar{g}(\bar{a}) \in B$. Alors $\bar{f} \circ \bar{g}$ est dérivable en $\bar{a}$ et on a l'égalité pour les matrices Jacobiennes
$$J_{\bar{f}\circ\bar{g}}(\bar{a}) = J_{\bar{f}}(\bar{g}(\bar{a})) \cdot J_{\bar{g}}(\bar{a}),$$
où $\cdot$ est la multiplication matricielle. Par conséquence, on a aussi
$$\det(J_{\bar{f}\circ\bar{g}}(\bar{a})) = \det(J_{\bar{f}}(\bar{g}(\bar{a}))) \cdot \det(J_{\bar{g}}(\bar{a})).$$

9. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors la fonction
$$\Delta f : E \to \mathbb{R}, \qquad \Delta f(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$
est appelée le Laplacien de f.

10. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $\bar{g} : E \to \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable en $\bar{a} \in E$. Alors $\bar{g}$ est bijective dans un voisinage de $\bar{a}$ si et seulement si $\det(J_{\bar{g}}(\bar{a})) \neq 0$.

11. (Dérivée d'une intégrale qui dépend d'un paramètre). Soient $g, h : I \to \mathbb{R}$ fonction continûment dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et $f(x,t) : J \times I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\frac{\partial f}{\partial t}$ est continue sur I. Alors la fonction $F(t) = \int\limits_{h(t)}^{g(t)} f(x,t)\, dx$ est continûment dérivable sur I et on a
$$F'(t) = f(g(t),t)g'(t) - f(h(t),t)h'(t) + \int\limits_{h(t)}^{g(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx.$$

Extrema des fonctions de plusieurs variables.

1. On dit que $\bar{a} \in E \subset \mathbb{R}^n$ est un point stationnaire de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ si $\nabla f(\bar{a}) = 0$.

2. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. On dit que $f : E \to \mathbb{R}$ admet un maximum (minimum) local au point $\bar{a} \in E$ s'il existe un voisinage U de $\bar{a}$ tel que $f(\bar{x}) \leq f(\bar{a})$ pour tout $\bar{x} \in U$ (respectivement $f(\bar{x}) \geq f(\bar{a})$ pour tout $\bar{x} \in U$.)

3. (Condition nécessaire) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un extremum local au point $\bar{a} \in E$ et telle que toutes les dérivées partielles de f existent en $\bar{a}$. Alors $\bar{a}$ est un point stationnaire.

4. (Points critiques). $\bar{a} \in E \subset \mathbb{R}^n$ est un point critique de $f : E \to \mathbb{R}$ si (1) $\bar{a}$ est un point stationnaire de f, ou (2) au moins une des dérivées partielles de f n'existe pas en $\bar{a}$.

5. (Condition suffisante, cas général) Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 au voisinage de point $\bar{a} \in E$, telle que $\nabla f(\bar{a}) = 0$. Alors :
(1) Si toutes les valeurs propres de la matrice Hessienne de f sont positives, $\bar{a}$ est un point de minimum local de f;
(2) Si toutes les valeurs propres de la matrice Hessienne de f sont negatives, $\bar{a}$ est un point de maximum local de f;
(3) Si la matrice Hessienne possède des valeurs propres positives et negatives, alors $\bar{a}$ n'est pas un point d'extremum local de f.

6. (Condition suffisante, cas $n = 2$). Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 au voisinage de point $\bar{a} \in E$, telle que $\nabla f(\bar{a}) = 0$. Alors :
(1) Si $\det(\mathrm{Hess}_f(\bar{a})) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{a}) > 0$, alors $\bar{a}$ est un point de minimum local de f;
(2) Si $\det(\mathrm{Hess}_f(\bar{a})) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{a}) < 0$, alors $\bar{a}$ est un point de maximum local de f;
(3) Si $\det(\mathrm{Hess}_f(\bar{a})) < 0$, alors $\bar{a}$ est un point selle (n'est pas un point d'extremum local de f);

7. (Formule de Taylor). Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ de classe C^{p+1} au voisinage de $\bar{a} \in E$. Alors il existe un voisinage U de $\bar{a}$ tel que pour tout $\bar{x} \in U$ il existe un $t \in \mathbb{R}$, $0 < t < 1$ tel que

$$f(\bar{x}) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \ldots + \frac{1}{p!}f^{(p)}(0) + \frac{1}{(p+1)!}F^{(p+1)}(t),$$

où $F(t)$ est la fonction $F(t) = f(\bar{a} + t(\bar{x} - \bar{a}))$.

8. (Formule de Taylor d'ordre 2, cas $n = 2$). Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ et $f : E \to \mathbb{R}$ de classe C^3 au voisinage de $(a, b) \in E$. Alors il existe un voisinage U de (a, b) tel que pour tout $(x, y) \in U$

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - b) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x - a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x - a)(y - b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y - b)^2 + \varepsilon((x - a)^2 + (y - b)^2),$$

où $\varepsilon(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $\lim_{t \to 0} \frac{\varepsilon(t)}{t} = 0$.

9. (Théorème des fonctions implicites). Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $F : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 au voisinage de $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n) \in E$ telle que $F(\bar{a}) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial x_n}(\bar{a}) \neq 0$. Alors il existe un voisinage U de $\check{a} = (a_1, a_2, \ldots a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ et une fonction implicite $f : U \to \mathbb{R}$ telle que :
(1) $a_n = f(a_1, a_2, \ldots a_{n-1})$;
(2) $F(x_1, x_2, \ldots, f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})) = 0$ pour tout $(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) \in U$;
(3) De plus, f est de classe C^1 dans U et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_p}(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_p}(x_1, x_2, \ldots, f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}))}{\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, x_2, \ldots, f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}))}.$$

10. (Théorème des fonctions implicites, cas $n = 2$). Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ et $F : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 au voisinage de $(a, b) \in E$ telle que $F(a, b) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Alors il existe un voisinage U de $a \in \mathbb{R}$ et une fonction implicite $f : U \to \mathbb{R}$ telle que :

(1) $b = f(a)$;
(2) $F(x, f(x)) = 0$ pour tout $x \in U$;
(3) De plus, f est de classe C^1 dans U et on a

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

11. (Théorème des fonctions implicites, cas $n = 3$). Soit $E \subset \mathbb{R}^3$ et $F : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 au voisinage de $(a, b, c) \in E$ telle que $F(a, b, c) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$. Alors il existe un voisinage U de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction implicite $f : U \to \mathbb{R}$ telle que :
(1) $c = f(a, b)$;
(2) $F(x, y, f(x, y)) = 0$ pour tout $(x, y) \in U$;
(3) De plus, f est de classe C^1 dans U et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))}.$$

12. (Multiplicateurs de Lagrange: condition nécessaire pour un extremum sous contraintes). Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $m \leq n-1$ et les fonctions $f, g_1, \ldots, g_m : E \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Supposons que $\bar{a} \in E$ est un point d'extremum de $f(\bar{x})$ sous les contraintes $g_1(\bar{x}) = g_2(\bar{x}) = \ldots = 0$. Supposons aussi que les vecteurs $\nabla g_1(\bar{a}), \nabla g_2(\bar{a}), \ldots \nabla g_m(\bar{a})$ sont linéarement indépendents. Alors il existe un vecteur $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\nabla f(\bar{a}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\bar{a}).$$

13. (Multiplicateurs de Lagrange: condition nécessaire pour un extremum sous une seule contrainte). Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ et les fonctions $f, g : E \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Supposons que $(\bar{a}) \in E$ est un point d'extremum de $f(\bar{x})$ sous la contrainte $g(\bar{x}) = 0$. Supposons aussi que $\nabla g(\bar{a}) \neq \bar{0}$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(\bar{a}) = \lambda \nabla g(\bar{a}).$$

14. (Extrema absoluts). Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert, $D \subset E$ compact, et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur E. Une fonction continue sur un ensemble compact atteint son minimum et son maximum. Pour trouver le maximum et le minimum de f sur D il faut :
(1) Trouver les points critiques $\{c_i\}$ de f dans l'intérieur $\mathring{D}$ et calculer les valeurs $\{f(c_i)\}$.
(2) Trouver les points critiques $\{d_j\}$ de f sur la frontière ∂D, soit directement, soit par le théorème des multiplicateurs de Lagrange, et calculer les valeurs $\{f(d_j)\}$.
(3) Choisir le minimum et le maximum de l'ensemble $\{f(c_i), f(d_j)\}$.

Anna Lachowska

Analyse II

Résumé: Calcul intégral des fonctions des plusieurs variables.

Définitions et résultats.

1. Un pavé fermé $P \subset \mathbb{R}^n$ est un produit cartésien de n intervalles fermés bornés
$$P = [a_1, b_1,] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n].$$

2. Une subdivision $D(\sigma)$ d'un pavé fermé P est un decomposition de P en pavés plus petits engendrée par la subdivision de chaque intervalle $[a_i, b_i]$ en sous-intervalles.

3. (Sommes de Darboux). Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un pavé fermé et $f : P \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Soit $D(\sigma)$ une subdivision de P. On pose
$$\underline{S}_\sigma(f) = \sum_{Q \in D(\sigma)} m(Q)|Q|, \qquad \overline{S}_\sigma(f) = \sum_{Q \in D(\sigma)} M(Q)|Q|,$$
où $m(Q)$ est l'infimum et $M(Q)$ le supremum de f sur le pavé Q, et $|Q|$ est le volume de Q. Alors on définit les sommes de Darboux de f comme
$$\underline{S}(f) = \sup(\underline{S}_\sigma(f)), \qquad \overline{S}(f) = \inf(\overline{S}_\sigma(f))$$
où le supremum et l'infimum sont calculés par rapport aux toutes les subdivisions de P.

4. (Intégrale de Riemann). Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un pavé fermé et $f : P \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur P. Alors f est intégrable sur P si et seulement si $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$. Dans ce cas l'intégrale de f sur P est définie par
$$\int_P f(\bar{x})\, d\bar{x} = \underline{S}(f) = \overline{S}(f).$$

5. (Théorème de Fubini pour les pavés). Soit $P = [a_1, b_1,] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$, et $f : P \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est intégrable sur P et on a
$$\int_P f(\bar{x})\, d\bar{x} = \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\ldots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(\bar{x})\, dx_1 \right) \ldots dx_{n-1} \right) dx_n \right).$$

6. (Théorème de Fubini pour les pavés, cas $n = 2$). Soit $P = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, et $f : P \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est intégrable sur P et on a
$$\int_P f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy.$$

7. (Intégrale sur un sous-ensemble borné). Soit $E \subset P \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble borné. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, et posons

$$\hat{f}(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}) & \bar{x} \in E \\ 0 & \bar{x} \in P \setminus E \end{cases}$$

La fonction f est intégrable sur E si $\hat{f}$ est intégrable sur P et on pose

$$\int_E f(\bar{x})\, d\bar{x} = \int_P \hat{f}(\bar{x})\, d\bar{x}.$$

8. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble compact telle que la frontière ∂E est assez régulière (de mesure nulle), et soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction borné et continue sur E. Alors f est intégrable sur E.

9. (Théorème de Fubini pour les domaines réguliers verticaux, cas $n = 2$). Soit $[a, b] \in \mathbb{R}$ un intervalle fermé, et $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\phi_1(x) < \phi_2(x)$ pour tout $x \in]a, b[$. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \phi_1(x) < y < \phi_2(x)\}$. Alors pour toute fonction continue $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ on a

$$\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

10. (Théorème de Fubini pour les domaines réguliers horizontaux, cas $n = 2$). Soit $[c, d] \in \mathbb{R}$ un intervalle fermé, et $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\psi_1(y) < \psi_2(y)$ pour tout $y \in]c, d[$. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c < y < d, \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\}$. Alors pour toute fonction continue $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ on a

$$\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

11. (Théorème de Fubini pour les domaines régulièrs, cas $n = 3$). Soit $[a, b] \in \mathbb{R}$ un intervalle fermé, et $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\phi_1(x) < \phi_2(x)$ pour tout $x \in]a, b[$. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \phi_1(x) < y < \phi_2(x)\}$. Soient $G, H : \overline{D} \to \mathbb{R}$ continues, telles que $G(x, y) < H(x, y)$ pour tout $(x, y) \in D$. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, G(x, y) < z < H(x, y)\}$. Alors pour toute fonction continue $f : \overline{E} \to \mathbb{R}$ on a

$$\int_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left(\int_{G(x,y)}^{H(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx.$$

Selon la géometrie du domaine, on peut appliquer le Théorème de Fubini en changeant l'ordre des variables.

12. (Additivité de l'intégrale). Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine compact à frontière réguliére, et $\{D_i\}_{i=1}^k$ une famille finie des domaines réguliers disjoints tels que $D = \cup_i D_i$. Alors pour toute fonction continue $f : D \to \mathbb{R}$ on a

$$\int_D f(\bar{x})\, d\bar{x} = \sum_{i=1}^k \int_{D_i} f(\bar{x})\, d\bar{x}.$$

13. (Linéarité de l'intégrale). Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine régulier, et $f, g : \overline{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors pour tout couple des nombres réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_D (\alpha f(\bar{x}) + \beta g(\bar{x}))\, d\bar{x} = \alpha \int_D f(\bar{x})\, d\bar{x} + \beta \int_D g(\bar{x})\, d\bar{x}.$$

14. (Bornes pour une intégrale). Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine régulier, et $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $0 \leq m \leq f(\bar{x}) \leq M$ pour tout $\bar{x} \in D$. Alors on a les inégalités :

$$m|D| = m \int_D d\bar{x} \leq \int_D f(\bar{x})\, d\bar{x} \leq M \int_D d\bar{x} = M|D|,$$

où $|D|$ est le volume du domaine D.

15. (Changement des variables). Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un domaine régulier et $G : E \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 telle que $G : E \to G(E)$ est bijective et $J_G(\bar{x})$ inversible pour $\bar{x} \in E$. Soit $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, où $D = G(E)$. Alors on a

$$\int_D f(\bar{x})\, d\bar{x} = \int_E f(G(\bar{u}))\, |\det(J_G(\bar{u}))|\, d\bar{u}.$$

16. (Changement des variables, coordonnées polaires). Soit $G(r, \varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))^T$. Alors pour toute fonction continue $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ sur un domaine régulier $D \subset \mathbb{R}^2$ on a

$$\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_{G^{-1}(D)} f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) r\, dr\, d\varphi.$$

17. (Coordonnées sphériques). Soit

$$G(r, \vartheta, \varphi) = \begin{cases} r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) & = & x \\ r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) & = & y \\ r\cos(\vartheta) & = & z \end{cases}$$

Alors $|\det(J_G(r, \vartheta, \varphi)| = r^2 \sin(\vartheta)$.

18. (Coordonnées cylindriques). Soit

$$G(r, \varphi, z) = \begin{cases} r\cos(\varphi) & = & x \\ r\sin(\varphi) & = & y \\ z & = & z \end{cases}$$

Alors $|\det(J_G(r, \varphi, z)| = r$.

Résumé du cours d'Analyse II - Complément

- **Longueur d'une courbe:** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une courbe de classe C^1, alors la longueur de la courbe est donnée par la formule: $L = \int_a^b \|f'(t)\|\, dt$
- **Angle d'intersection:** Soient deux courbes $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : J \to \mathbb{R}^n$ qui se croisent tel que $f(x_0) = g(y_0)$, alors l'angle d'intersection θ est donné par: $\cos\theta = \pm \dfrac{\langle f'(x_0), g'(y_0)\rangle}{\|f'(x_0)\| \cdot \|g'(y_0)\|}$
- **Courbure d'une courbe:** $\kappa = \dfrac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}$
- **Continuité uniforme:** Si $I \in \mathbb{R}^n$ est un ensemble <u>fermé et borné</u>, et $f : I \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue, alors f est uniformément continue sur I.
- **Intégrale de Gauss:** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$

Deux méthodes pour vérifier si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en un point $\overline{a} \in I$:

1. Si toutes les dérivées partielles d'ordre 1 sont continues en $\overline{a} \Longrightarrow f$ est dérivable en $\overline{a}$.
   ⚠️ Le fait qu'une ou plusieurs dérivées partielles de f ne soient pas continues en $\overline{a}$ n'implique pas que f n'est pas dérivable en $\overline{a}$.
2. Par la définition:
   A. Si $\nabla f(\overline{a})$ n'existe pas $\Longrightarrow f$ n'est pas dérivable en $\overline{a}$.
   B. Si $\nabla f(\overline{a})$ existe, posons $r(\overline{x}) = f(\overline{x}) - f(\overline{a}) - \langle \nabla f(\overline{a}), \overline{x} - \overline{a}\rangle$, et alors:
      - Si $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} = 0 \Longrightarrow f$ est dérivable en $\overline{a}$.
      - Si $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} \neq 0$ (ou que la limite n'existe pas) $\Longrightarrow f$ n'est pas dérivable en $\overline{a}$.