Circuits et systèmes

1. Notions de base

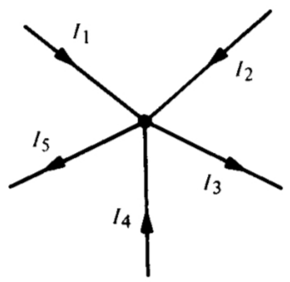
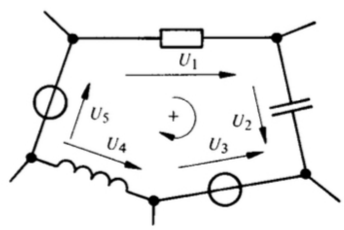
Le courant est le taux de variation de la charge : $i(t) = \dfrac{dq}{dt} \implies q(t) = \displaystyle\int_0^t i(\tau)\, d\tau$

Capacité : $q(t) = Cu(t)$, et comme $i(t) = \dfrac{dq}{dt}$, on a $i(t) = C\dfrac{du}{dt}$ et donc :

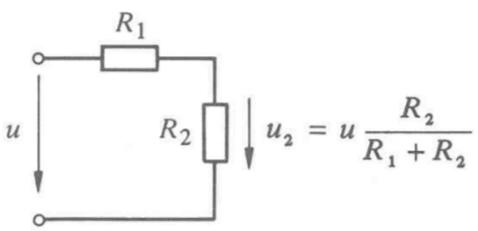
$$u(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau = u(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\, d\tau$$

Inductance: $u(t) = L\dfrac{di}{dt}$ et $i(t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau = i(0) + \dfrac{1}{L}\int_0^t u(\tau)\, d\tau$

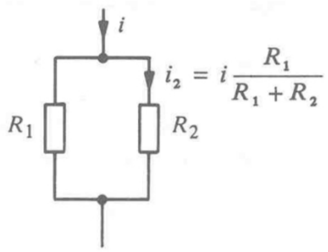
Lois de Kirchhoff

Noeuds	Mailles
	
$\sum_{j=1}^{N} i_j = 0 : i_1 + i_2 - i_3 + i_4 - i_5 = 0$	$\sum_{j=1}^{N} u_j = 0 : U_1 + U_2 - U_3 - U_4 + U_5 = 0$

Diviseur de tension



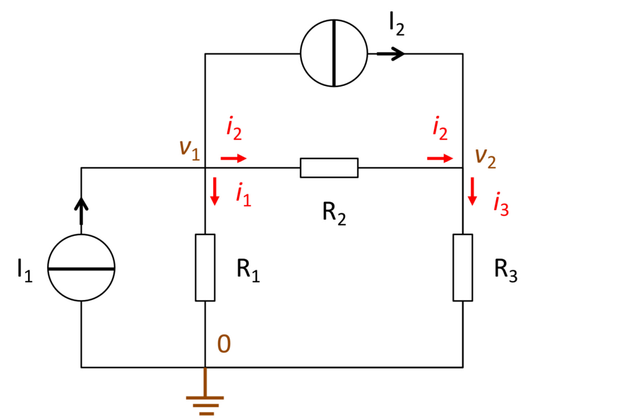
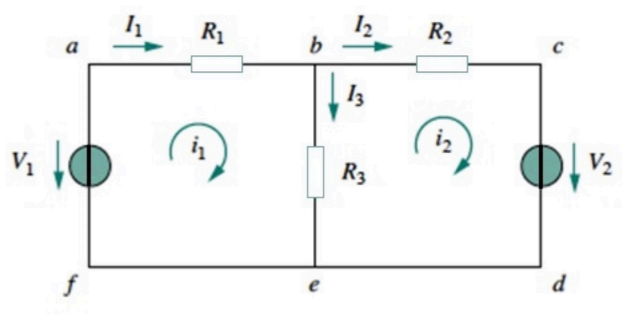
Diviseur de courant



2. Théorèmes fondamentaux

Transfert maximal de puissance : $R_L = R_i \implies P_{\max} = \dfrac{U^2}{4R_i}$

3. Méthodes d'analyse

Analyse nodale	**Analyse de mailles**
	
$I_1 = I_2 + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} \implies I_1 = I_2 + G_1 v_1 + G_2(v_1 - v_2)$ $I_2 + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = \frac{v_2}{R_2} \implies I_2 + G_2(v_1 - v_2) = G_3 v_2$	$-V_1 + R_1 i_1 + R_3(i_1 - i_2) = 0 \implies (R_1 + R_3)i_1 - R_3 i_2 = V_1$ $R_2 i_2 + V_2 + R_3(i_1 - i_2) = 0 \implies -R_3 i_1 + (R_2 + R_3)i_2 = -V_2$
$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix}$

4. Régime sinusoïdal I

Fonctions périodiques

Valeur moyenne : $\overline{X} = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_T^{t+T} x(\tau)\, d\tau$

Valeur efficace : $X = \sqrt{\dfrac{1}{T} \displaystyle\int_t^{t+T} x^2(\tau)\, d\tau}$ (ou valeur RMS - Root Mean Square)

Fonctions sinusoïdales

Forme générale : $x(t) = A \sin\left(\dfrac{2\pi}{T} t + \alpha\right) = A \sin(\omega t + \alpha)$ avec $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$

⚠️ Attention à la forme pour les phaseurs ($\cos$ et non $\sin$)

Valeur moyenne : $\overline{X} = 0$

Valeur efficace : $X = A/\sqrt{2}$

Déphasage φ entre $u(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \alpha)$ et $i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \beta)$: $\varphi = \alpha - \beta$

Échauffement d'une résistance : $P = \dfrac{U^2}{R} = RI^2$

5. Régime sinusoïdal II

Pour $z = re^{j\theta}$, on a $\dfrac{dz}{d\theta} = re^{j(\theta+\pi/2)}$ et $\displaystyle\int z = re^{j(\theta-\pi/2)}$

Les phaseurs

Pour une fonction de la forme $x(t) = \sqrt{2}X\cos(\omega t + \theta)$, le phaseur associé est $\underline{X} = Xe^{j\theta}$ (avec $\omega = 2\pi f$ et f la fréquence), ce qui donne :

- $x(t) = \sqrt{2}X\cos(\omega t + \theta)$: grandeur sinusoïdale
- $\underline{x} = Xe^{j\theta}e^{j\omega t}$: valeur instantanée complexe
- $\underline{X} = Xe^{j\theta}$: phaseur

Dérivation par rapport au temps : $y = \dfrac{dx}{dt} \iff \underline{Y} = j\omega\underline{X} =$

Intégration par rapport au temps : $y = \displaystyle\int x(t)\,dt \iff \underline{Y} = \dfrac{\underline{X}}{j\omega}$

Impédance complexe d'un bipôle en régime permanent sinusoïdal : $\underline{Z} = \dfrac{\underline{u}}{\underline{i}} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}$ (en Ω)

Admittance complexe d'un bipôle en régime permanent sinusoïdal : $\underline{Y} = \dfrac{\underline{i}}{\underline{u}} = \dfrac{\underline{I}}{\underline{U}} = \dfrac{1}{\underline{Z}}$ (en S)

Pour une **impédance** $\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = R + jX$, on a :

- Résistance R : $R = Z\cos(\varphi)$
- Réactance X : $X = Z\sin(\varphi)$

Donc $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ et $\varphi = \arctan(X/R)$

Pour une **admittance** $\underline{Y} = Ye^{-j\varphi} = G + jB$, on a :

- Conductance G : $G = Y\cos(\varphi)$
- Susceptance B : $B = -Y\sin(\varphi)$

Donc $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$ et $\varphi = \arctan(-B/G)$

Application à une inductance L : $\underline{U} = j\omega L\underline{I}$

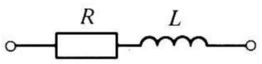
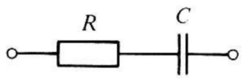
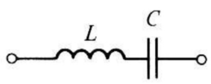
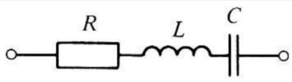
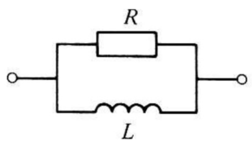
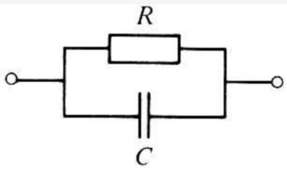
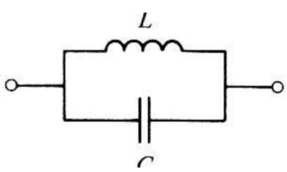
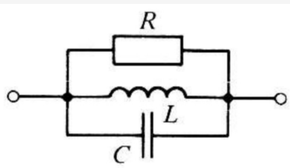
Application à une capacité C : $\underline{I} = j\omega C\underline{U} \implies \underline{U} = \dfrac{\underline{I}}{j\omega C}$

6. Régime sinusoïdal III

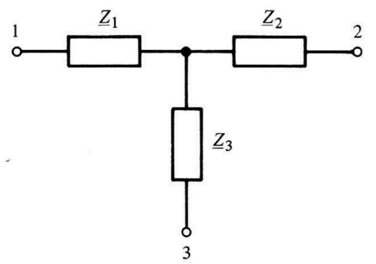
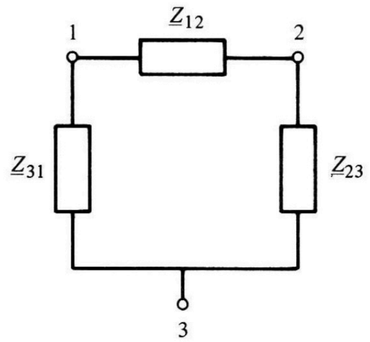
Nature d'une impédance $\underline{Z} = R + X$:

- $X = 0$: Résistive, la tension et le courant sont en phase
- $X < 0$: Capacitive, le courant est en avance sur la tension
- $X > 0$: Inductive, la tension est en avance sur le courant

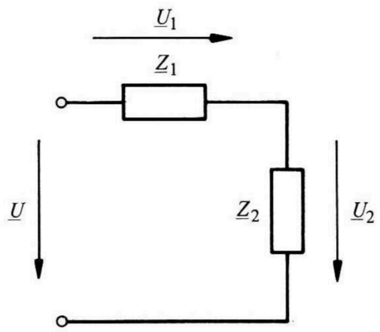
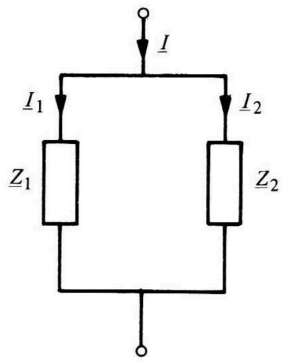
Dipôles composites élémentaires

Circuit	**Impédance $\underline{Z}$**	**Admittance $\underline{Y}$**
	$R + j\omega L$	$\dfrac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$
	$R + \dfrac{1}{j\omega C}$	$\dfrac{R\omega^2 C^2 + j\omega C}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$
	$j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)$	$j\dfrac{\omega C}{1 - \omega^2 LC}$
	$R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)$	$\dfrac{R - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$
	$\dfrac{R\omega^2 L^2 + j\omega L R^2}{R^2 + \omega^2 L^2}$	$\dfrac{1}{R} - j\dfrac{1}{\omega L}$
	$\dfrac{R - j\omega C R^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$	$\dfrac{1}{R} + j\omega C$
	$j\dfrac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}$	$j\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)$
	$\dfrac{R - jR^2\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}{1 + R^2\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$	$\dfrac{1}{R} - j\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)$

Tripôles équivalents

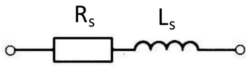
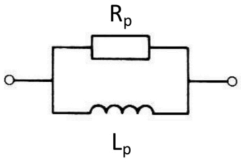
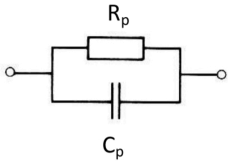
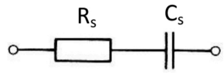
	
$\underline{Z}_{12} = \dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}$ $\underline{Z}_{23} = \dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1}$ $\underline{Z}_{12} = \dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$	$\underline{Z}_1 = \dfrac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}$ $\underline{Z}_2 = \dfrac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}$ $\underline{Z}_3 = \dfrac{\underline{Z}_{23}\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}$

Diviseurs de tension et de courant

Diviseur de tension	**Diviseur de courant**
	
$\underline{U}_1 = \dfrac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{U}$ $\underline{U}_2 = \dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{U}$	$\underline{I}_1 = \dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{I}$ $\underline{I}_2 = \dfrac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{I}$

Inductance/capacité avec pertes

Une inductance/capacité réelle comporte des pertes qui peuvent être introduites dans le modèle par une résistance en série avec l'inductance. On définit alors le facteur de qualité Q.

Inductance avec pertes	**Capacité avec pertes**
 	 
$Q = \frac{\text{réactance}}{\text{résistance}} = \frac{\omega L_s}{R_s} = \frac{R_p}{\omega L_p}$ Lorsque $Q^2 \gg 1$, $L_s = L_p$ et $R_p = Q^2 R_s$	$Q = \frac{\text{-réactance}}{\text{résistance série}} = \frac{1/\omega C_s}{R_s} = \frac{R_p}{1/\omega C_p}$ Lorsque $Q^2 \gg 1$, $C_s C_p$ et $R_p = Q^2 R_s$

Le lieu complexe relatif à une grandeur complexe est le lieu décrit par l'extrémité du vecteur représentant cette grandeur lorsqu'on fait varier un paramètre, généralement la pulsation ω.

7. Régime sinusoïdal IV

En régime sinusoïdal :
- $u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \alpha) \implies \underline{U} = Ue^{j\alpha}$
- $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \beta) \implies \underline{I} = Ie^{j\beta}$
- $p(t) = u(t)i(t) = 2UI\cos(\omega t + \alpha)\cos(\omega t + \beta) = UI\cos\varphi + UI\cos(2\omega t + \alpha + \beta)$

On a donc :
- **Puissance active :** $P = UI\cos\varphi = RI^2$ (en W)
- **Puissance réactive :** $Q = UI\sin\varphi = XI^2$ (en var)
- **Puissance apparente :** $S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$ (en VA)

P et Q pour les composants communs :
- Résistance : $P = UI = \frac{U^2}{R} = RI^2$, $Q = 0$ et $p(t) = P\left(1 + \cos(2\omega t)\right)$
- Inductance : $P = 0$, $Q = UI = \frac{U^2}{X_L} = X_L I^2$ et $p(t) = Q\sin(2\omega t + 2\alpha)$
- Capacité : $P = 0$, $Q = -UI = \frac{U^2}{X_C} = X_C I^2$ et $p(t) = Q\sin(2\omega t + 2\alpha)$

Puissance apparente complexe : $\underline{S} = P + jQ$ (en VA)
- Pour une impédance $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$: $\underline{S} = UIe^{j\varphi} = Se^{j\varphi}$ avec $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$

Facteur de puissance : $F_p = \cos\varphi$, avec
- $F_p = 1$ pour une résistance
- $F_p = 0$ pour une inductance/capacité

8. Régime Sinusoïdal Triphasé

Un système triphasé est composé de trois sources sinusoïdales déphasées entre elles de 120° ($\frac{2\pi}{3}$) et telle que leur somme soit en permanence égale à 0.

Sur un système symétrique (équilibré), les trois tensions de source ont la même amplitude (valeur efficace).

Lorsqu'on indique une seule tension, il s'agit par convention de la valeur efficace de la tension composée.

Pour un système triphasé symétrique, les tensions de lignes :
- Sont en avance de 30° par rapport aux tensions simples
- Ont un module $\sqrt{3}$ fois plus élevé

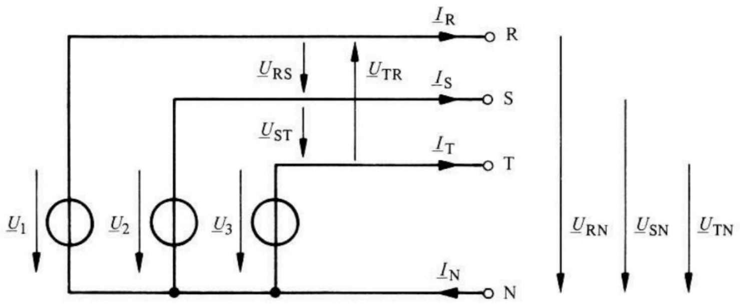
Dans le cas d'une source symétrique avec charge équilibrée, il n'est pas nécessaire de relier le point neutre.

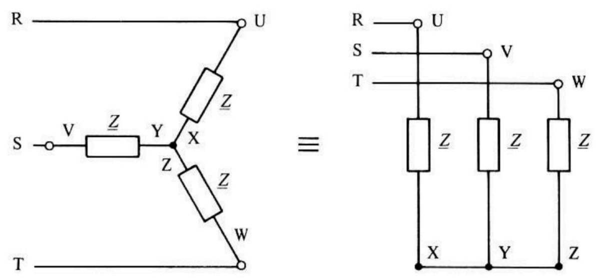
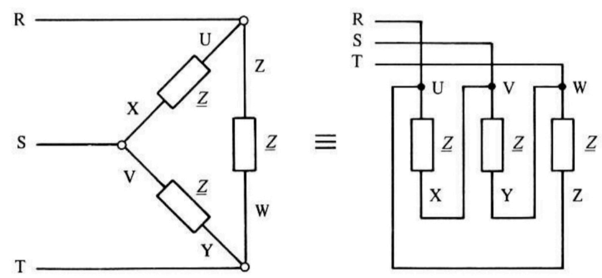
Tensions simples : $\underline{U}_{RN}$, $\underline{U}_{SN}$ et $\underline{U}_{TN}$

Tensions de lignes : $\underline{U}_{RS}$, $\underline{U}_{ST}$ et $\underline{U}_{TR}$
(aussi appelées tensions composées)

Courants de ligne : $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$ et $\underline{I}_T$

Courant de retour : $\underline{I}_N = \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T$



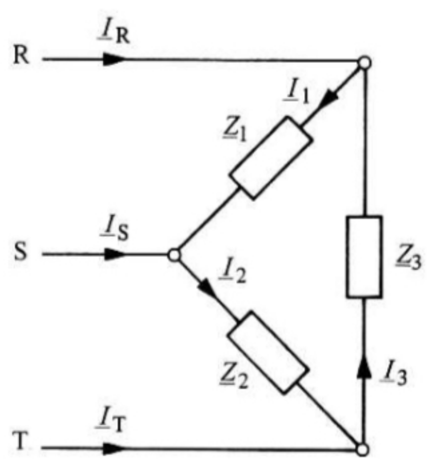
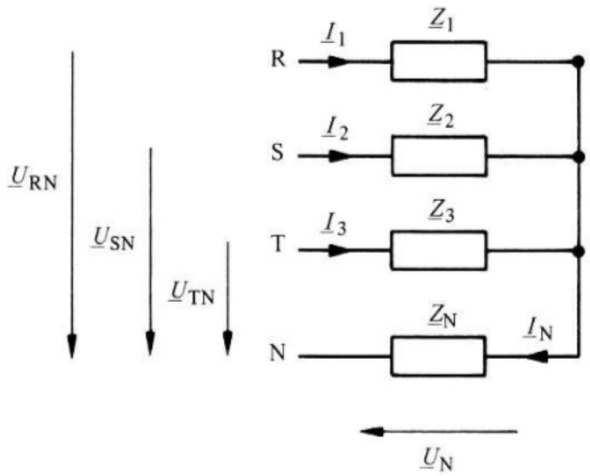
Connexion en étoile	**Connexion en triangle**
	
$U_{\text{phase,Y}} = \frac{U_{\text{ligne}}}{\sqrt{3}}$ $\quad I_{\text{phase,Y}} = I_{\text{ligne}}$	$U_{\text{phase},\Delta} = U_{\text{ligne}}$ $\quad I_{\text{phase},\Delta} = \frac{I_{\text{ligne}}}{\sqrt{3}}$
$I_{\text{ligne,Y}} = I_{\text{phase,Y}}$ $\quad U_{\text{ligne}} = \sqrt{3}U_{\text{phase,Y}}$	$U_{\text{ligne}} = U_{\text{phase},\Delta}$ $\quad I_{\text{ligne},\Delta} = \sqrt{3}I_{\text{phase},\Delta}$
$P = \sqrt{3}U_{\text{ligne}}I_{\text{ligne,Y}}\cos\varphi$ $Q = \sqrt{3}U_{\text{ligne}}I_{\text{ligne,Y}}\sin\varphi$ $S = \sqrt{3}U_{\text{ligne}}I_{\text{ligne,Y}}$	$P = \sqrt{3}U_{\text{ligne}}I_{\text{ligne},\Delta}\cos\varphi$ $Q = \sqrt{3}U_{\text{ligne}}I_{\text{ligne},\Delta}\sin\varphi$ $S = \sqrt{3}U_{\text{ligne}}I_{\text{ligne},\Delta}$

Pour un régime triphasé symétrique à charge équilibrée, $P = 3U_{\text{phase}}I_{\text{phase}}\cos\varphi$ et $P_Y = \frac{1}{3}P_\Delta$

Conversion triangle-étoile pour une charge équilibrée : $\underline{Z}_Y = \frac{\underline{Z}_\Delta}{3} \iff \underline{Z}_\Delta = 3\underline{Z}_Y$ (⚠️ conversion inverse dans le cas d'un condensateur).

Systèmes triphasés non symétriques

Un état non symétrique apparaît lorsque les impédances de phase de la charge ne sont pas identiques.

Charge en triangle	Charge en étoile
	
$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{RS}}{\underline{Z}_1}$ $\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{ST}}{\underline{Z}_2}$ $\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{TR}}{\underline{Z}_3}$ $\underline{I}_R = \underline{I}_1 - \underline{I}_3$ $\underline{I}_S = \underline{I}_2 - \underline{1}_1$ $\underline{I}_T = \underline{I}_3 - \underline{I}_2$	$\underline{I}_R = \underline{I}_1 \frac{\underline{U}_{RN} - \underline{U}_N}{\underline{Z}_1}$ $\underline{I}_S = \underline{I}_2 \frac{\underline{U}_{SN} - \underline{U}_N}{\underline{Z}_2}$ $\underline{I}_T = \underline{I}_3 \frac{\underline{U}_{TN} - \underline{U}_N}{\underline{Z}_3}$ Courant de retour : $\underline{I}_N = \frac{\underline{U}_N}{\underline{Z}_N}$ Tension : $\underline{U}_N = \underline{Z}_p\underline{I}_{N0}$, avec $\frac{1}{\underline{Z}_p} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_N}$ et $\underline{I}_{N0} = \frac{\underline{U}_{RN}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_{SN}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_{TN}}{\underline{Z}_3}$

9. Circuits en régime transitoire

Un régime transitoire correspond à une variation brusque des grandeurs internes ou externes d'un circuits électrique.

Réponse indicielle :

- Capacité $C : i(t) = C\dfrac{du}{dt}$ et $u(t) = U_0 + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(x)\,dx$
- Inductance $L : u(t) = L\dfrac{di}{dt}$ et $i(t) = I_0 + \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^t u(x)\,dx$

Constante de temps τ :

- Pour un circuit RC : $\tau = RC$
- Pour un circuit RL : $\tau = L/R$

Résolution illégale des équations différentielles :

- $y' = ay \implies y(x) = Ae^{ax}$
- $y' = ay + b \implies y(x) = Ae^{ax} - \dfrac{b}{a}$

Pour un enclenchement sur une source de tension sinusoïdale (avec conditions initiales nulles), seule la composante permanente est modifiée.

Circuit RLC

Pulsation propre : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ (en s^{-1})

Facteur de qualité : $Q = \dfrac{\omega_0 L}{R}$ (sans dimension)

Équation différentielle : $L\dfrac{d^2i}{dt^2} + R\dfrac{di}{dt} + \dfrac{i}{C} = 0 \implies \dfrac{d^2i}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$

L'équation caractéristique est $X^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}X + \omega_0^2 = 0$, avec $\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\dfrac{1}{Q^2} - 4\right)$

Régime pseudo-périodique ($\Delta < 0$ et $Q > 1/2$) :

$$i(t) = A\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\cos(\omega' t + \varphi), \text{ avec } \omega' = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Régime critique ($\Delta = 0$ et $Q = 1/2$) :

$$i(t) = \left(A_1 t + A_2\right)\exp(-\omega_0 t)$$

Régime critique ($\Delta > 0$ et $Q < 1/2$) :

$$i(t) = A_1\exp(X_1 t) + A_2\exp(X_2 t) \text{ avec } X_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

10. Quadripôles

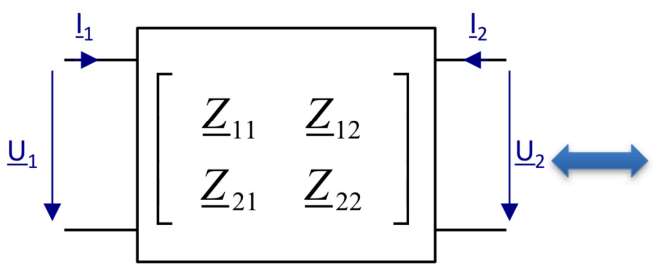
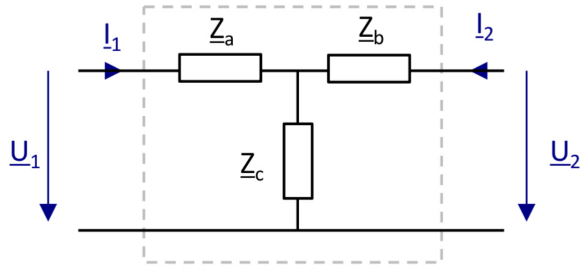
Un quadripôle, biportes, ou two-port network, est un élément de circuit à 4 bornes.

Matrice d'impédance

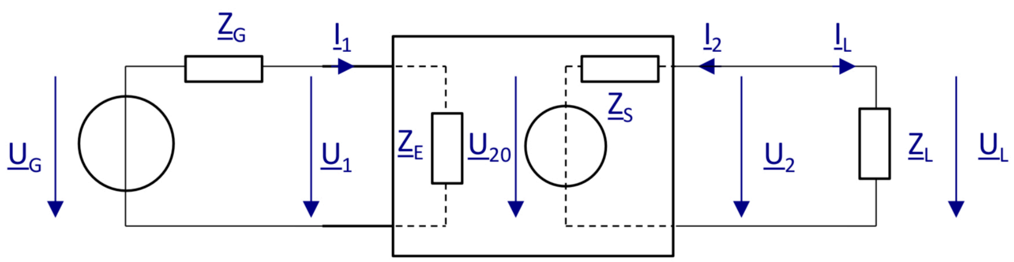
Exprime les tensions en fonction des courants. Les éléments de la matrice ont la dimension d'impédances (résistances).

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 \end{cases}$$

Avec $\underline{Z}_{11} = \left.\dfrac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0}$ $\quad \underline{Z}_{21} = \left.\dfrac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0}$ $\quad \underline{Z}_{12} = \left.\dfrac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0}$ $\quad \underline{Z}_{22} = \left.\dfrac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0}$

Matrice d'impédance	**Schéma équivalent en T**
	
$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_a + \underline{Z}_c & \underline{Z}_c \\ \underline{Z}_c & \underline{Z}_b + \underline{Z}_c \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \underline{Z}_{11} = \underline{Z}_a + \underline{Z}_c \\ \underline{Z}_{22} = \underline{Z}_b + \underline{Z}_c \\ \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_c \end{cases}$	$\underline{Z}_a = \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12}$ $\underline{Z}_b = \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}$ $\underline{Z}_c = \underline{Z}_{12}$

Lorsque le quadripôle est linéaire et n'a pas de sources dépendantes, les impédances de transfert $\underline{Z}_{12}$ et $\underline{Z}_{21}$ sont égales, et le quadripôle est dit réciproque.



$$\underline{Z}_E = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_L} \qquad \underline{Z}_S = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \underline{Z}_{22} - \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_G} \qquad \underline{U}_{2,0} = \frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_G}\underline{U}_G$$

Gain en courant : $\underline{A}_i = \dfrac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = -\dfrac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_L}$

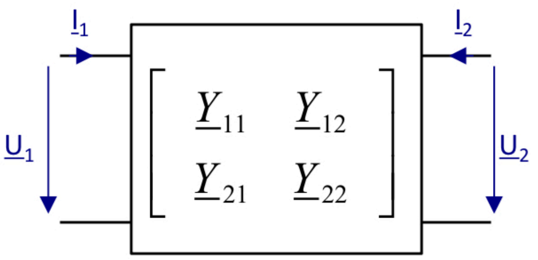
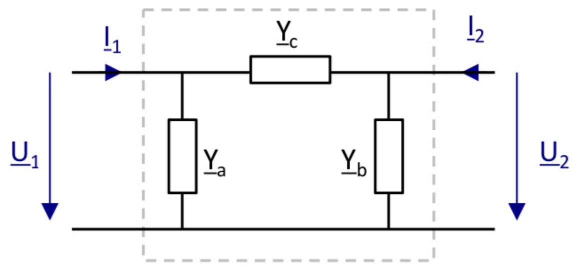
Matrice d'admittance

Exprime les courants en fonction des tensions. Les éléments de la matrice ont la dimension d'admittance.

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2 \end{cases}$$

Avec $\underline{Y}_{11} = \left.\dfrac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0}$ $\quad \underline{Y}_{21} = \left.\dfrac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0}$ $\quad \underline{Y}_{12} = \left.\dfrac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{U}_1=0}$ $\quad \underline{Y}_{22} = \left.\dfrac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{U}_1=0}$

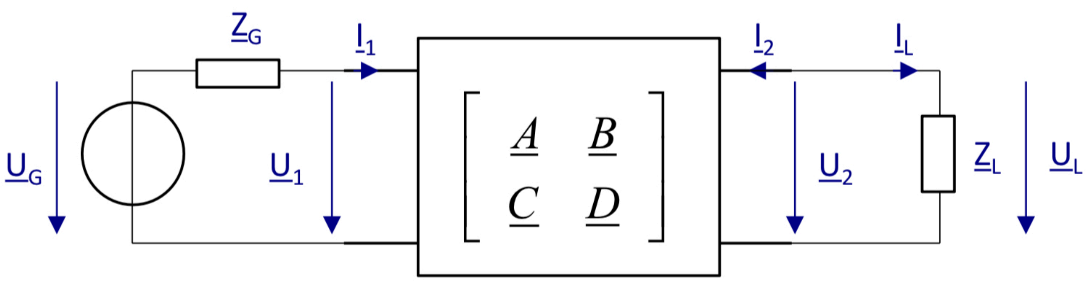
Pour un réseau <u>passif</u> et <u>linéaire</u>, $\underline{Y}_{21} = \underline{Y}_{12}$

Matrice d'admittance	**Schéma équivalent en π**
	
$[\underline{Y}] = \begin{bmatrix} \underline{Y}_a + \underline{Y}_c & -\underline{Y}_c \\ -\underline{Y}_c & \underline{Y}_b + \underline{Y}_c \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} \underline{Y}_{11} = \underline{Y}_a + \underline{Y}_c \\ \underline{Y}_{22} = \underline{Y}_b + \underline{Y}_c \\ \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -\underline{Y}_c \end{cases}$	$\underline{Y}_a = \underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{12}$ $\underline{Y}_b = \underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{12}$ $\underline{Y}_c = -\underline{Y}_{12}$

Matrice de chaîne (ou ABCD/transmission)

Établit des relations entre les grandeurs de l'entrée à celles de la sortie.

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}\,\underline{U}_2 - \underline{B}\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{C}\,\underline{U}_2 - \underline{D}\underline{I}_2 \end{cases}$$



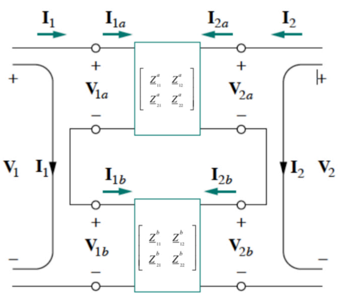
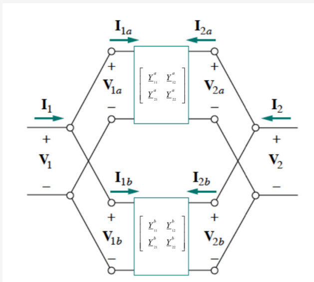
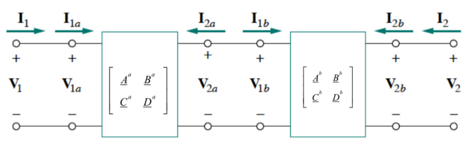
Avec $\underline{A} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{I}_2=0}$ $\quad \underline{B} = -\left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{U}_2=0}$ $\quad \underline{C} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{I}_2=0}$ $\quad \underline{D} = -\left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{U}_2=0}$

Grandeurs de charge : $\underline{I}_L = \frac{\underline{U}_G}{\underline{A}\,\underline{Z}_L + \underline{B} + \underline{Z}_G(\underline{C}\,\underline{Z}_L + \underline{D})}$ $\quad \underline{U}_L = \underline{Z}_L \underline{I}_L$

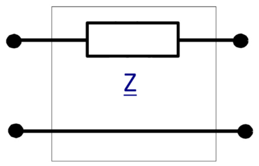
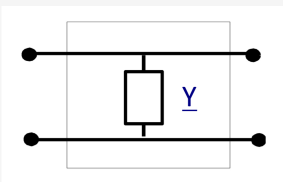
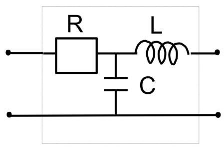
Conversion de paramètres des quadripôles

	Matrice d'impédance $\lvert\underline{Z}\rvert = \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}$	**Matrice d'admittance** $\lvert\underline{Y}\rvert = \underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}$	**Matrice de chaîne** $\Delta = \underline{A}\,\underline{D} - \underline{B}\,\underline{C}$
Matrice d'impédance	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Y}_{22}}{\lvert\underline{Y}\rvert} & -\frac{\underline{Y}_{12}}{\lvert\underline{Y}\rvert} \\ -\frac{\underline{Y}_{21}}{\lvert\underline{Y}\rvert} & \frac{\underline{Y}_{11}}{\lvert\underline{Y}\rvert} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{A}}{\underline{C}} & \frac{\Delta}{\underline{C}} \\ \frac{\Delta}{\underline{C}} & \frac{\underline{D}}{\underline{C}} \end{bmatrix}$
Matrice d'admittance	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_{22}}{\lvert\underline{Z}\rvert} & -\frac{\underline{Z}_{12}}{\lvert\underline{Z}\rvert} \\ -\frac{\underline{Z}_{21}}{\lvert\underline{Z}\rvert} & \frac{\underline{Z}_{11}}{\lvert\underline{Z}\rvert} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{D}}{\underline{B}} & -\frac{\Delta}{\underline{B}} \\ -\frac{\Delta}{\underline{B}} & \frac{\underline{A}}{\underline{B}} \end{bmatrix}$
Matrice de chaîne	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} & \frac{\lvert\underline{Z}\rvert}{\underline{Z}_{21}} \\ \frac{1}{\underline{Z}_{21}} & \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} & -\frac{1}{\underline{Y}_{21}} \\ -\frac{\lvert\underline{Y}\rvert}{\underline{Y}_{21}} & -\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix}$

Interconnexion de quadripôles

En série : matrice $[\underline{Z}]$		$\begin{bmatrix}\underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12}\\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underline{Z}^a_{11} & \underline{Z}^a_{12}\\ \underline{Z}^a_{21} & \underline{Z}^a_{22}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\underline{Z}^b_{11} & \underline{Z}^b_{12}\\ \underline{Z}^b_{21} & \underline{Z}^b_{22}\end{bmatrix}$
En parallèle : matrice $[\underline{Y}]$		$\begin{bmatrix}\underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12}\\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underline{Y}^a_{11} & \underline{Y}^a_{12}\\ \underline{Y}^a_{21} & \underline{Y}^a_{22}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\underline{Y}^b_{11} & \underline{Y}^b_{12}\\ \underline{Y}^b_{21} & \underline{Y}^b_{22}\end{bmatrix}$
En cascade : matrice ABCD		$\begin{bmatrix}\underline{A} & \underline{B}\\ \underline{C} & \underline{D}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underline{A}^a & \underline{B}^a\\ \underline{C}^a & \underline{D}^a\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\underline{A}^b & \underline{B}^b\\ \underline{C}^b & \underline{D}^b\end{bmatrix}$

Matrices de chaîne de circuits simples

	$\begin{bmatrix}1 & \underline{Z}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ \underline{Y} & 1\end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix}\underline{A} & \underline{B}\\ \underline{C} & \underline{D}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & R\\ 0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 0\\ j\omega C & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & j\omega L\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

11. Réponse fréquentielle et diagramme de Bode

La réponse fréquentielle d'un circuit s'obtient en gardant l'amplitude de la source sinusoïdale constante mais qu'on varie sa fréquence. La réponse fréquentielle peut être considérée comme la description complète du comportement sinusoïdal d'un circuit en fonction de la fréquence.

La réponse fréquentielle d'un circuit est décrite par la fonction de transfert $H(\omega)$.

Puisque l'entrée et la sortie peuvent être représentées soit par une tension soit par un courant de n'importe quel point appartenant au circuit, il existe quatre fonctions possibles de fonction de transfert :

Gain en tension : $\underline{H}(\omega) = \dfrac{\underline{U}_{out}(\omega)}{\underline{U}_{in}(\omega)}$

Gain en courant : $\underline{H}(\omega) = \dfrac{\underline{I}_{out}(\omega)}{\underline{I}_{in}(\omega)}$

Impédance de transfert : $\underline{H}(\omega) = \dfrac{\underline{U}_{out}(\omega)}{\underline{I}_{in}(\omega)}$

Admittance de transfert : $\underline{H}(\omega) = \dfrac{\underline{I}_{out}(\omega)}{\underline{U}_{in}(\omega)}$

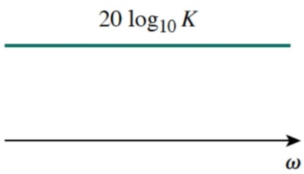
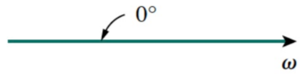
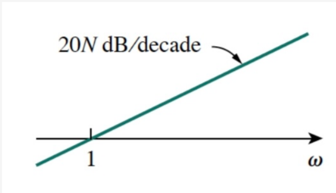
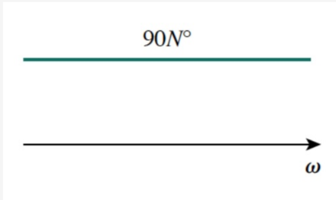
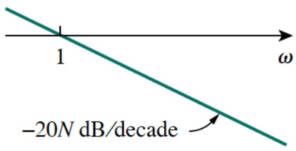
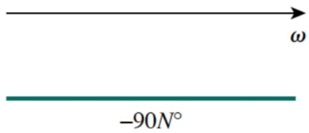
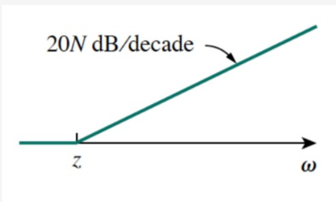
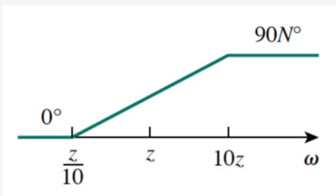
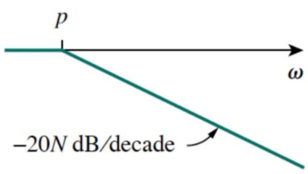
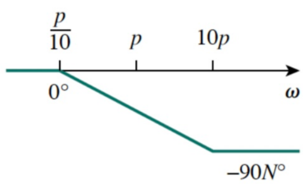
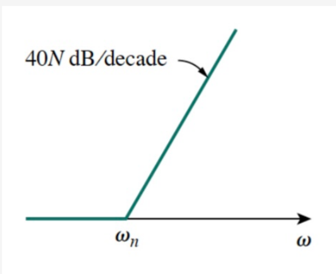
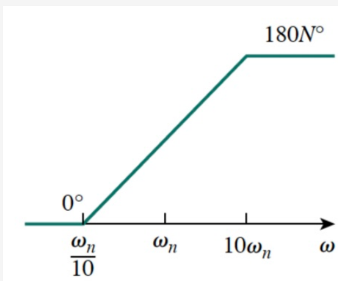
Fonction de transfert

La fonction de transfert peut être représentée sous la forme d'une fonction polynomiale. Les racines des polynômes au numérateurs sont appelées les zéros de $\underline{H}(\omega)$ et celles des polynômes au dénominateurs sont appelées les pôles de $\underline{H}(\omega)$

Lorsque $R_1 = R_2$, le gain peut s'exprimer comme : $G_{dB} = 20\log_{10}\dfrac{U_2}{U_1} = 20\log_{10}\dfrac{I_2}{I_1}$

La fonction de transfert peut être écrite comme $\underline{H}(\omega) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ ou dans un diagramme de Bode comme $H_{dB}(\omega) = 20\log_{10} H(\omega)$.

Diagramme de Bode : Résumés des caractéristiques

Facteur	Amplitude	Phase
K		
$(j\omega)^N$		
$\dfrac{1}{(j\omega)^N}$		
$\left(1+\dfrac{j\omega}{z}\right)^N$		
$\dfrac{1}{(1+j\omega/p)^N}$		
$\left[1+\dfrac{2j\omega\zeta}{\omega_n}+\left(\dfrac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^N$		
$\dfrac{1}{[1+2j\omega\zeta/\omega_k+(j\omega/\omega_k)^2]^N}$