Analyse III

1. Opérateur différentiels

Définitions

1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un champ scalaire tel que $f \in C^1(\Omega)$. Le gradient de f est défini par : $\operatorname{grad} f(x) = (\nabla f)(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$
2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ vectoriel tel que $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. La divergence de F est définie par $\operatorname{div} F(x) = (\nabla \cdot F)(x) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x) + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x)$
3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ vectoriel tel que $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Le rotationnel de F est défini par :
   1. Lorsque $n = 2$: $\operatorname{rot} F(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y)$
   2. Lorsque $n = 3$: $\operatorname{rot} F(x, y, z) = (\nabla \wedge F)(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) \end{pmatrix}$
4. Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un champ scalaire tel que $f \in C^2(\Omega)$. Le Laplacien de f est défini par $\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x)$

Formules de Différentiation

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un champ scalaire tel que $f \in C^2(\Omega)$ et $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ vectoriel tel que $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, alors :

1. $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f, \forall n > 1$
2. Pour $n = 2$, on a $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$
3. Pour $n = 3$, on a $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$

2. Intégrales curvilignes et champs conservatifs

Courbes dans $\mathbb{R}^n$

1. $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est une courbe **simple et régulière**, s'il existe $[a, b] \subset \mathbb{R}$ une fonction $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ (appelée paramétrisation) tel que :
   - $\Gamma = \gamma([a, b]) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in [a, b] \text{ avec } x = \gamma(t)\}$: Au plus une pré-image (simple)
   - γ est injective sur $[a, b[$
   - $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$
   - $\|\gamma'(t)\| \neq 0, \forall t \in [a, b]$ (régulière)
2. $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est une courbe simple régulière **fermée** si en plus $\gamma(a) = \gamma(b)$
3. $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est une courbe simple régulière **par morceaux** s'il existe $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$ des courbes simples régulières telles que $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i$

Intégrales curvilignes

1. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe simple régulière de paramétrisation $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ et $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ un champ scalaire continu, alors l'intégrale de f le long de Γ est définie par :
   $$\int_\Gamma f\, dl = \int_a^b f\left(\gamma(t)\right) \|\gamma'(t)\|\, dt$$

   On calcule la longueur de la courbe Γ en prenant $f = 1$: $\text{Longueur}(\Gamma) = \int_\Gamma dl = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$
2. Soit $F : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ un **champ vectoriel continu**, l'intégrale de F est définie par :
   $$\int_\Gamma F \cdot dl = \int_a^b F\left(\gamma(t)\right) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\left(\gamma(t)\right) \gamma_i'(t) \right) dt$$

   Cette intégrale donne le travail du champ F le long de la courbe Γ.
3. Si Γ est une courbe simple régulière par morceaux t.q. $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i$, alors
   $$\int_\Gamma f\, dl = \sum_{i=1}^{k} \int_{\Gamma_i} f\, dl \text{ et } \int_\Gamma F \cdot dl = \sum_{i=1}^{k} \int_{\Gamma_i} F \cdot dl$$

Champs qui dérivent d'un potentiel

1. Un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est **convexe** si pour tout $A, B \in \Omega$ le **segment de droite** joignant A à B est entièrement contenu dans Ω.
2. Un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est **connexe** si pour tout $A, B \in \Omega$ il existe une **courbe** continue joignant A et B qui est entièrement contenue dans Ω.
3. Un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est **simplement connexe** s'il est connexe et si deux courbes simples quelconques contenues dans Ω peuvent être déformées continûment l'une en l'autre en restant dans Ω.
   1. On a donc : convexe $\Longrightarrow$ simplement connexe $\Longrightarrow$ connexe (mais pas inversement)
   2. Intuitivement, un ensemble simplement connexe est un ensemble sans trous.

convexe	pas convexe	pas convexe	pas convexe
connexe	connexe	connexe	pas connexe
simplement connexe	simplement connexe	pas simplement connexe	pas simplement connexe

4. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ vectoriel. Alors, F **dérive d'un potentiel** s'il existe un champ scalaire $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tel que $f \in C^1(\Omega)$ et que $F(x) = \operatorname{grad} f(x), \forall x \in \Omega$. F est alors appelé un **champ conservatif** et f est un **potentiel** de F.

   Si un potentiel f de F existe, celui-ci est défini à une constante près, et donc $f + \alpha$ est aussi un potentiel de F, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. **(Théorème 1)** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ vectoriel, avec $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$,
   A. **(Condition nécessaire)** Si F dérive d'un potentiel, alors
   $$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \ \forall i, j = 1, \ldots, n \ \forall x \in \Omega \quad (*) \iff \operatorname{rot} F = 0$$
   B. **(Condition suffisante)** Si $(*)$ a lieu et si Ω est simplement connexe, alors F dérive d'un potentiel sur Ω.

6. **(Théorème 2)** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert simplement connexe et $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ vectoriel. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :
   1. F dérive d'un potentiel
   2. $\displaystyle\int_{\Gamma_i} F \cdot dl = \int_{\Gamma_2} F \cdot dl$ pour **toutes** les courbes simples régulières (par morceaux) $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Omega$ joignant deux points A et B quelconques de Ω.
   3. $\displaystyle\int_{\Gamma} F \cdot dl = 0$ pour **toute** courbe simple fermée régulière (par morceaux) $\Gamma \subset \Omega$.

7. **(Résumé de l'utilisation des théorèmes 1 et 2)** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe et un champ vectoriel $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ t.q. $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, alors :

1. Si $\text{rot}\, F \neq 0$ sur Ω, alors F ne dérive **pas** d'un potentiel.
2. Si $\text{rot}\, F = 0$ sur Ω simplement connexe, alors F dérive d'un potentiel.
3. Si $\text{rot}\, F = 0$ sur Ω qui n'est **pas** simplement connexe, alors on ne peut **pas** conclure avec le théorème 1.
4. Si on trouve une courbe fermée $\Gamma \subset \Omega$ tel que $\displaystyle\int_\Gamma F \cdot dl \neq 0$, alors F ne dérive **pas** d'un potentiel (⚠️ Attention, $\displaystyle\int_\Gamma F \cdot dl = 0$ pour une courbe fermée $\not\Rightarrow$ F dérive d'un potentiel)

Théorème de Green

Tous les résultats de cette section sont formulés dans $\mathbb{R}^2$.

1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné tel que son bord $\partial\Omega$ est une courbe simple fermée régulière (par morceaux). On dit que $\partial\Omega$ est orienté **positivement** (respectivement négativement) si lorsque l'on parcours $\partial\Omega$, on laisse Ω **à gauche** (respectivement à droite).
2. On dit qu'un ouvert borné $A \subset \mathbb{R}^2$ est un **domaine régulier** s'il existe des ouverts bornés $A_0, \ldots, A_1 \subset \mathbb{R}^2$ tels que :
   1. $\partial A_j = \Gamma_j$ pour $j = 0,1,\ldots,m$ sont des courbes simples fermées régulières (par morceaux).
   2. $\overline{A}_j \subset A_0$ pour $j = 1,\ldots,m$
   3. $\overline{A}_i \cap \overline{A}_j = \varnothing$ pour $i, j = 1,\ldots,m$ avec $i \neq j$
   4. $A = A_0 \backslash \displaystyle\bigcup_{j=1}^{m} \overline{A}_j$
3. **(Théorème de Green)** Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un domaine **régulier** dont le bord est orienté **positivement**, et $F : \overline{A} \to \mathbb{R}^2$ un champ vectoriel t.q. $F \in C^1(\overline{A}, \mathbb{R}^2)$. Alors
   $$\iint_A \text{rot}\, F(x,y)\, dxdy = \int_{\partial A} F \cdot dl$$
   - Ce théorème permet de remplacer le calcul d'une intégrale double de $\text{rot}\, F$ sur un domaine $A \subset \mathbb{R}^3$ par le calcul d'une intégrale curviligne de F le long du bord ∂A de A.
   - Si F dérive d'un potentiel sur A, $\text{rot}\, F = 0 \implies \displaystyle\int_{\partial A} F \cdot dl = 0$
4. **(Corollaire du Théorème de Green)** Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un domaine **régulier** dont le bord ∂A est orienté **positivement**, $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^2$ un champ de normales unités extérieures à A, $F : \overline{A} \to \mathbb{R}^2$ un champ vectoriel et $f : \overline{A} \to \mathbb{R}$ t.q. $F \in C^1(\overline{A}, \mathbb{R}^2)$ et $f \in C^2(\overline{A})$. Alors :
   $$\iint_A \text{div} F\,(x,y)\, dxdy = \int_{\partial A} (F \cdot \nu)\, dl \text{ et donc } \iint_A \Delta f(x,y)\, dxdy = \int_{\partial A} (\text{grad} f \cdot \nu)\, dl$$
5. Si $\gamma(t)$, avec $t \in [a,b]$, est une paramétrisation de ∂A, alors le **vecteur tangent unité** (qui suit l'orientation positive de ∂A) est $\vec{\tau} = \dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$.

   On a $\vec{\nu} = (\tau_2, -\tau_1)$ le vecteur **normal unité extérieur** à A en $\gamma(t)$.

3. Intégrales de surface

Surface dans $\mathbb{R}^3$

1. $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ est appelée une **surface régulière** si :
   1. Il existe $A \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et tel que le bord ∂A soit une courbe simple fermée régulière (par morceaux).
   2. Il existe une fonction $\sigma : \overline{A} \to \mathbb{R}^3$ (appelée paramétrisation régulière) avec les propriétés suivantes :
      1. $\sigma \in C^1(\overline{A}, \mathbb{R}^3)$, $\sigma(\overline{A}) = \Sigma$ et σ est injective sur A
      2. $\|\sigma_u \times \sigma_v\| = 0, \forall (u,v) \in A$

   Le vecteur $\nu(u,v) = \dfrac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$ est la **normale unité** à la surface Σ au point $\sigma(u,v)$.
2. $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ est une surface régulière **par morceaux** s'il existe $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_k$ des surfaces régulières telles que $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{k} \Sigma_k$.
3. Une surface régulière (par morceaux) est **orientable** s'il existe un champ de normales $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}^2$ **continu** (un tel champ est appelé une **orientation** de Σ).

Intégrale de surface

1. Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière de paramétrisation $\sigma : \overline{A} \to \Sigma$ et $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ un champ scalaire continu, alors l'intégrale de f sur la surface Σ est définie par :
   $$\iint_\Sigma f\,ds = \iint_A f\left(\sigma(u,v)\right) \|\sigma_u \times \sigma_v\|\,du\,dv$$
   1. On obtient l'air de la surface Σ avec $f = 1$: $\text{Aire}(\Sigma) = \iint_\Sigma ds = \iint_A \|\sigma_u \times \sigma_v\|\,du\,dv$
2. Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière orientable de paramétrisation $\sigma : \overline{A} \to \Sigma$ et soit $F : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel **continu**. Alors l'intégrale de F sur Σ dans la direction $\sigma_u \times \sigma_v$ est définie par : $\iint_\Sigma F \cdot ds = \iint_A \left[F\left(\sigma(u,v)\right) \cdot (\sigma_u \times \sigma_v)\right] du\,dv$
3. Avec la **normal unité** $\nu(u,v) = \dfrac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$, l'intégrale de F sur Σ en passant par la normale :
   $$\iint_\Sigma F \cdot ds = \iint_A \left[F\left(\sigma(u,v)\right) \cdot \nu(u,v)\|\sigma_u \times \sigma_v\|\right] du\,dv$$ (⚠️ Toujours préciser la direction)

   Cette intégrale s'appelle le **flux** de F à travers la surface Σ dans la direction de ν.
4. Si Σ est une surface régulière orientable par morceaux t.q. $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{k} \Sigma_i$, alors
   $$\iint_\Sigma f\,ds = \sum_{i=1}^{k} \iint_{\Sigma_i} f\,ds \text{ et } \iint_\Sigma F \cdot ds = \sum_{i=1}^{k} \iint_{\Sigma_i} F \cdot ds$$

Théorème de la divergence

1. On dit qu'un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un **domaine régulier** s'il existe des ouverts bornés $\Omega_0, \ldots, \Omega_m \subset \mathbb{R}^3$ tels que :
   1. $\partial\Omega_j = \Sigma_j$ pour $j = 0,1,\ldots,m$ sont des surfaces régulières (par morceaux) orientables avec un champ de normales unités.
   2. $\overline{\Omega}_j \subset \Omega_0$ pour $j = 1,\ldots,m$
   3. $\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j = \varnothing$ pour $i, j = 1,\ldots,m$ avec $i \neq j$
   4. $\Omega = \Omega_0 \subset \bigcup_{i=1}^{m} \overline{\Omega}_j$ possède un champ de normales **extérieures**.
2. **(Théorème de la Divergence)** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier, $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^3$ un champ de normales unités extérieures à Ω et $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel t.q. $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$.
   Alors : $\iiint_\Omega \operatorname{div} F(x,y,z)\, dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu)\, ds$

Théorème de Stokes

1. Détermination du bord d'une surface et de son sens de parcours :
   1. Si $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ est une surface régulière et $\sigma : \overline{A} \to \Sigma$ est une paramétrisation de Σ, alors le bord de Σ est donné par $\partial\Sigma = \sigma(\partial A)$ et il est indépendant du choix de σ.
   2. Le sens du parcours de $\partial\Sigma$ induit par la paramétrisation σ est celui obtenu en parcourant ∂A dans le sens positif
   3. Si ∂A est une courbe simple fermée régulière par morceaux alors, $\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_m$ et pour obtenir le bord de Σ on supprime de $\sigma(\partial A)$ les courbes Γ_i qui se réduisent à un point et celles qui sont parcourues deux fois (une fois dans un sens et une fois dans l'autre).
2. **(Théorème de Stokes)** Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ une surface régulière (par morceaux) orientable et $F : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel tel que $F \in C^1(\Sigma, \mathbb{R}^3)$. Alors $\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$

4. Séries de Fourier

Introduction

Les **séries de Fourier** cherchent à représenter une fonction périodique en l'écrivant comme une « somme infinie » de **sinus** et **cosinus**.

1. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est T-périodique s'il existe $T > 0$ t.q. $f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$
2. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **continue par morceaux** sur l'intervalle $[a,b]$ s'il existe des points $\left\{x_i \in [a,b]\right\}_{i=0}^{n+1}$ avec $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b$ tel que pour tout $i = 0,1,\ldots,n$ on ait :
   1. f est continue sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$
   2. La limite à droite en x_i de f (notée $f(x_i+0) \equiv \lim\limits_{t \to x_i^+} f(t)$) et la limite à gauche en x_{i+1} de f (notée $f(x_{i+1}-0) \equiv \lim\limits_{t \to x_{i+1}^-} f(t)$) **existent** et sont **finies**.

   On dit que f est **régulière par morceaux** sur $[a,b]$ si de plus :
   3. f' existe et est continue sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$
   4. La limite à droite $f'(x_i+0)$ et la limite à gauche $f'(x_{i+1}-0)$ existent et sont finies
3. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $T > 0$, alors :
   1. $\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\cos\left(\frac{2\pi m}{T}x\right)\,dx = \frac{2}{T}\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\sin\left(\frac{2\pi m}{T}x\right)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$
   2. $\displaystyle\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\cos\left(\frac{2\pi m}{T}x\right)\,dx = 0,\ \forall n, m \in \mathbb{N}$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $T > 0$, les fonctions u_n et v_n, définies par $u_n(x) = \cos\left(\dfrac{2\pi n}{T}x\right)$ et $v_n(x) = \sin\left(\dfrac{2\pi n}{T}x\right)$, sont $\dfrac{T}{n}$-périodiques.
5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique continue par morceaux, alors $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx,\ \forall a \in \mathbb{R}$

Séries de Fourier

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique continue par morceaux. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, la **série de Fourier partielle d'ordre** N de f est :
   $F_N f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\right]$, où les coefficients a_n et b_n (appelés coefficients de Fourier de f) sont donnés par :

A. $a_n \equiv \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)\,\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\,dx$, pour $n = 0,1,\ldots$

B. $b_n \equiv \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)\,\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\,dx$ pour $n = 1,2,\ldots$

2. On appelle **série de Fourier** de f la limite lorsque $N \to \infty$ (quand elle existe) de $F_N f(x)$. On écrit alors $Ff(x) \equiv \lim\limits_{N\to\infty} F_N f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\right]$

3. **(Théorème de Dirichlet)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique régulière par morceaux. Alors $Ff(x) = \lim\limits_{N\to\infty} F_N f(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a $Ff(x) = \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$

   En particulier, si f est continue en x, alors $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$ et $Ff(x) = f(x)$

4. La série de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-périodique régulière par morceaux peut s'écrire sous forme complexe : $Ff(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}x}$, où les coefficients $c_n \in \mathbb{C}$ sont **des nombres complexes** donnés par $c_n \equiv \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)e^{-i\frac{2\pi n}{T}x}\,dx$.

5. **(Théorème: périodicité, parité et imparité)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique régulière par morceaux. Alors:

   1. Sa série de Fourier Ff est aussi T-périodique
   2. Si f est une fonction **paire** (c.à.d $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$), on a $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ et Ff est aussi une fonction paire.
   3. Si f est une fonction **impaire** (c.à.d $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$), on a $a_n = 0$ pour tout $n \geq 0$ et Ff est une une fonction impaire.

6. **(Identité de Parseval)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique régulière par morceaux, alors : $\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T \big(f(x)\big)^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$, où $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ et $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sont les coefficients de Fourier de f.

7. **(Théorème 1)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique continue t.q. f' est régulière par morceaux et soit $Ff(x)$ sa série de Fourier. Alors la série obtenue en dérivant terme à terme $Ff(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a
   $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi n}{T}\left(-a_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\right) = \frac{1}{2}\big(f'(x+0) - f'(x-0)\big)$$

   Comme f est supposée continue, $Ff(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ et la série obtenue en dérivant Ff converge vers $f'(x)$ en tout point x où f' est continue

8. **(Théorème 2)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique régulière par morceaux et soit $Ff(x)$ sa série de Fourier. Alors pour x_0 et tout $x \in [0,T]$ on peut intégrer terme à terme et on a $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x}\frac{a_0}{2}\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\right)\,dt$

9. Soit $L > 0$ et $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ une fonction continue t.q. f' soit continue par morceaux, alors la série définie par $F_C f(x) \equiv \frac{a_0}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$ avec
$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right)\, dx$ pour $n \geq 0$ **s'appelle la série de Fourier en cosinus de** f et converge vers $f(x)$ dans $[0,L]$. On a $f(x) = F_c f(x), \forall x \in [0,L]$.

   L'importance de ce résultat est que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0,L]$ et n'est pas supposée périodique sur $\mathbb{R}$. Il donne la possibilité de représenter une fonction **non-périodique** en série de Fourier dans un **intervalle donné**.

10. Soit $L > 0$ et $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $f(0) = f(L) = 0$, t.q. f' soit continue par morceaux. Alors la série définie par $F_S f(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$ avec
$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)\, dx$ pour $n \geq 0$ **s'appelle la série de Fourier en sinus de f** et converge vers $f(x)$ dans $[0,L]$. On a $f(x) = F_c f(x), \forall x \in [0,L]$.

11. Méthode pour trouver une solution 2π-périodique $y(x)$ d'une équation du type $\alpha y(x) + \beta y(x-\pi) = f(x)$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et f est une fonction 2π-périodique continue dans $[0,2\pi[$:
    1. On calcul la série de Fourier $Ff(x)$ de f.
    2. On cherche une solution $y(x)$ écrite sous forme de série de Fourier $y(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)\right)$, avec $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ **inconnus**.
    3. On écrit $y(x-\pi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(nx - n\pi) + B_n \sin(nx - n\pi)\right)$
    $= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n A_n \cos(nx) + (-1)^n B_n \sin(nx)\right)$
    4. On insère les expressions de $Ff(x)$, $y(x)$ et $y(x-\pi)$ dans l'équation et on identifie les coefficients respectifs de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ pour déterminer A_n et B_n en fonction de a_n et b_n.

12. Méthode pour trouver une solution 2π-périodique $y(x)$ d'une équation différentielle du type $\alpha y''(x) + \beta y'(x) + \gamma y(x) = f(x)$ où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ et f est une fonction 2π-périodique continue dans $[0,2\pi[$: on utilise une démarche analogue au point précédent mais en écrivant dans l'étape 3 : $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-nA_N \sin(nx) + nB_n \cos(nx)\right)$ et
$y''x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-n^2 A_n \cos(nx) - n^2 B_n \sin(nx)\right)$. En insérant les expressions de $Ff(x)$, $y(x)$, $y'(x)$ et $y''(x)$ dans l'équation différentielle on déterminer par identification les coefficients de Fourier A_n et B_n inconnus de y en fonction des coefficients de Fourier a_n et b_n connus de f.

Formule d'Euler : $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \implies \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$ & $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}$

5. Transformées de Fourier

Transformée de Fourier d'une fonction

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux t.q. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty$, la **transformée de Fourier** de f est la fonction notée $\mathfrak{F}(f)$ ou $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\alpha \mapsto \mathfrak{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x}\, dx$
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux t.q. $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\, dt < \infty$, la **transformée de Fourier inverse** de g est la fonction notée $\mathfrak{F}^{-1}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $x \mapsto \mathfrak{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{itx}\, dt$
3. **(Théorème de réciprocité)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction t.q. f et f' soient continues par morceaux avec $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)|\, d\alpha < \infty$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\mathfrak{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x}\, d\alpha = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$. En particulier si f est continue en x, alors $\frac{1}{2}\big(f(x+0) + f(x-0)\big) = f(x)$ et on a la **formule d'inversion**. Autrement dit on a $\mathfrak{F}^{-1}\big(\mathfrak{F}(f)\big) = f$, la transformée de Fourier peut être vue comme une « transformation » inversible qui « agit » sur la fonction f t.q. $f \xrightarrow{\mathfrak{F}} \hat{f} \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} f$

Rappel : $|e^{\pm i\varphi}| = 1, \forall \varphi \in \mathbb{R}$

Table des transformées de Fourier

$f(x)$	$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha)$
$\begin{cases} 1 & \text{si } -b < x < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(b\alpha)}{\alpha}$
$\begin{cases} 1 & \text{si } b < x < c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{e^{-i\alpha b} - e^{-i\alpha c}}{i\alpha\sqrt{2\pi}}$
$\frac{1}{x^2 + \omega^2}$, $(\omega > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\omega\lvert\alpha\rvert}}{\omega}$
$\begin{cases} e^{-\omega x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, $(\omega > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(\omega + i\alpha)}$
$\begin{cases} e^{\omega x} & \text{si } b < x < c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{e^{(\omega - i\alpha)c} - e^{(\omega - i\alpha)b}}{\sqrt{2\pi}(\omega - i\alpha)}$
$\begin{cases} e^{i\omega x} & \text{si } -b < x < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\left(b(\alpha - \omega)\right)}{\alpha - \omega}$
$\begin{cases} e^{i\omega x} & \text{si } b < x < c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ib(\omega - \alpha)} - e^{ic(\omega - \alpha)}}{\omega - \alpha}$
$e^{-\omega x^2}$, $(\omega > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-\frac{\alpha^2}{4\omega}}$
$\frac{\sin(\omega x)}{x}$, $(\omega > 0)$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} & \text{si } \lvert\alpha\rvert < \omega \\ 0 & \text{si } \lvert\alpha\rvert > \omega \end{cases}$
$\frac{e^{-\lvert\omega x\rvert}}{\lvert\omega\rvert}$, $(\omega \neq 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega^2 + \alpha^2}$
$\frac{4x^2}{(\omega^2 + x^2)^2}$, $(\omega \neq 0)$	$\sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\lvert\omega\rvert} - \lvert\alpha\rvert \right) e^{-\lvert\omega\alpha\rvert}$
$x e^{-\omega^2 x^2}$, $(\omega \neq 0)$	$\frac{-i\alpha}{2\sqrt{2}\,\lvert\omega\rvert^3} e^{-\frac{\alpha^2}{4\omega^2}}$

Propriétés des transformées de Fourier

On considère deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux t.q. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\, dx < \infty$, avec $\mathfrak{F}(f) = \hat{f}$ et $\mathfrak{F}(g) = \hat{g}$ leurs transformées de Fourier. Alors :

1. **(Continuité)** $\mathfrak{F}(f)$ est continue pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lim_{\alpha \to \pm\infty} |\mathfrak{F}(f)(\alpha)| = 0$
2. **(Linéarité)** $\mathfrak{F}(af + bg) = a\mathfrak{F}(f) + b\mathfrak{F}(g), \forall a, b \in \mathbb{R}$, c-à-d $\mathfrak{F}$ est une transformation linéaire qui agit sur les fonctions f et g
3. **(Produit de convolution)** $\mathfrak{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\mathfrak{F}(f)\mathfrak{F}(g)$
   1. Le produit de convolution de deux fonctions f et g est la fonction notée $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')g(x-t')\, dt'$
4. **(Dérivée d'une fonction)** Si de plus $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\, dx < \infty$, alors $\mathfrak{F}(f')(\alpha) = i\alpha\mathfrak{F}(f)(\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}$
   1. Plus généralement, si $f \in C^n(\mathbb{R})$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\, dx < \infty$, pour $k = 1,2,\ldots,n$, alors $\mathfrak{F}(f^{(k)})(\alpha) = (i\alpha)^k\mathfrak{F}(f)(\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ et pour $k = 1,2,\ldots,n$
5. **(Décalage)** Si $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ et $h(x) = e^{-ibx}f(ax)$ alors $\mathfrak{F}(h)(\alpha) = \frac{1}{|a|}\mathfrak{F}(f)\left(\frac{\alpha + b}{a}\right)$
6. **(Parité)** Si f est paire, alors $\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\alpha x)\, dx$ est **la transformée de Fourier en cosinus** de f.
7. **(Imparité)** Si f est impaire, alors $\mathfrak{F}(f)(\alpha) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\sin(\alpha x)\, dx$ est la **transformée de Fourier en sinus** de f.
8. **(Identité de Plancherel)** Si de plus $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(x)\right)^2\, dx < \infty$, alors on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(x)\right)^2\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathfrak{F}(f)(\alpha)|^2\, d\alpha$

Exemples d'utilisation de la transformée de Fourier

1. Trouver une solution particulière $y(x)$ d'une équation différentielle du type $\lambda y''(x) + \omega y(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, où $\lambda, \omega \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée.

Méthode: On écrit la transformée de Fourier de l'équation différentielle :
$\mathfrak{F}(\lambda y'' + \omega y)(\alpha) = \mathfrak{F}(f)(\alpha) \iff \lambda \mathfrak{F}(y'')(\alpha) + \omega \mathfrak{F}(y)(\alpha) = \mathfrak{F}(f)(\alpha)$
$\iff \lambda (i\alpha)^2 \mathfrak{F}(y)(\alpha) + \omega \mathfrak{F}(y)(\alpha) = \mathfrak{F}(f)(\alpha) \iff (\omega - \lambda\alpha^2)\mathfrak{F}(y)(\alpha) = \mathfrak{F}(f)(\alpha)$
$\iff \mathfrak{F}(y)(\alpha) = \dfrac{\mathfrak{F}(f)(\alpha)}{\omega - \lambda\alpha^2}$. La solution particulière $y(x)$ cherchée s'obtient en calculant la transformée de Fourier inverse de la fonction de la variable α définie par $\dfrac{\mathfrak{F}(f)(\alpha)}{\omega - \lambda\alpha^2}$.

2. Résoudre des problèmes avec des équations du type produit de convolution
3. Problème de statistique avec la loi normale : utilisation de la transformée de Fourier de la fonction gaussienne définie par $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \forall x \in \mathbb{R}$. On trouve $\hat{f}(\alpha) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$, la transformée de Fourier d'une fonction gaussienne est aussi une fonction gaussienne

6. Transformée de Laplace

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, étendue à $\mathbb{R}$ en posant $f(t) = 0$ pour $t < 0$ et soit $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-\gamma_0 t}\, dt < \infty$. La **transformée de Laplace** de f est la fonction notée $\mathfrak{L}(f)$ ou $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $\mathfrak{L}(f)(z) = F(z) \equiv \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}\, dt$, avec γ_0 **l'abscisse de convergence** de f.

   Si $\mathrm{Re}(z) \geq \gamma_0$, alors $\mathfrak{L}(f)(z)$ est bien définie. En effet comme $|e^{-zt}| = e^{-t\mathrm{Re}(z)} \leq e^{-t\gamma_0}$ pour tout $t \geq 0$ si $\mathrm{Re}(z) \geq \gamma_0$, alors
   $|\mathfrak{L}(f)(z)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)||e^{-zt}|\, dt \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-\gamma_0 t}\, dt < \infty$

Table des transformées de Laplace

$f(t)$	$\mathfrak{L}(f)(z) = F(z)$
$f_\alpha(t) = \begin{cases} 1/\alpha & \text{si } t \in [0,\alpha] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, $\alpha > 0$	$\dfrac{1 - e^{-\alpha z}}{\alpha z}$
$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$	$\dfrac{1}{z}$ $\quad \mathrm{Re}(z) > 0$
$e^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{z+\alpha}$ $\quad \mathrm{Re}(z) > -\alpha$
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{z^2+\omega^2}$ $\quad \mathrm{Re}(z) > 0$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{z}{z^2+\omega^2}$ $\quad \mathrm{Re}(z) > 0$
$e^{\alpha t}\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(z-\alpha)^2+\omega^2}$ $\quad \mathrm{Re}(z) > \alpha$
$e^{\alpha t}\cos(\omega t)$	$\dfrac{z-\alpha}{(z-\alpha)^2+\omega^2}$ $\quad \mathrm{Re}(z) > \alpha$
$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{z^{n+1}}$ $\quad \mathrm{Re}(z) > 0$
$te^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{(z+\alpha)^2}$ $\quad \mathrm{Re}(z) > -\alpha$
$\cosh(\omega t)$	$\dfrac{z}{z^2-\omega^2}$ $\quad \mathrm{Re}(z) > \lvert\omega\rvert$
$\sinh(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{z^2-\omega^2}$ $\quad \mathrm{Re}(z) > \lvert\omega\rvert$
$e^{\alpha t}\cosh(\omega t)$	$\dfrac{z-\alpha}{(z-\alpha)^2-\omega^2}$ $\quad \mathrm{Re}(z) > \alpha + \lvert\omega\rvert$

$f(t)$	$\mathfrak{L}(f)(z) = F(z)$
$e^{\alpha t}\sinh(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(z-\alpha)^2-\omega^2} \quad \mathrm{Re}(z) > \alpha + \lvert\omega\rvert$
$t\cos(\omega t)$	$\dfrac{z^2-\omega^2}{(z^2+\omega^2)^2} \quad \mathrm{Re}(z) > 0$

Propriétés de la transformée de Laplace

On considère deux fonction $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continues par morceaux, étendues à $\mathbb{R}$ en posant $f(t) = 0$ et $g(t) = 0$ pour $t < 0$, et $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $\int_0^\infty |f(t)|e^{-\gamma_0 t}\,dt < \infty$ et $\int_0^\infty |g(t)|e^{-\gamma_0 t}\,dt < \infty$, avec $\mathfrak{L}(f)$ et $\mathfrak{L}(g)$ les transformées de Laplace de f et g. Alors :

1. **(Linéarité)** $\mathfrak{L}(af + bg) = a\mathfrak{L}(f) + b\mathfrak{L}(g), \forall a, b \in \mathbb{R}$
2. **(Décalage)** Si $h(t) = e^{-bt}f(at)$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$, alors $\mathfrak{L}(h)(z) = \dfrac{1}{a}\mathfrak{L}(f)\left(\dfrac{z+b}{a}\right)$
3. **(Convolution)** $\mathfrak{L}(f * g)(z) = \mathfrak{L}(f)(z)\mathfrak{L}(g)(z)$, avec le produit de convolution donné par $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s)\,ds = \int_0^t f(t-s)g(s)\,ds$ (car $g(s) = 0$ pour $s < 0$)
4. **(Dérivation)** La transformée de Laplace $\mathfrak{L}(f)$ est dérivable (holomorphe) dans $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > \gamma_0\}$ et $\forall z \in D$ on a $\mathfrak{L}(f)'(z) = -\int_0^\infty tf(t)e^{-zt}\,dt = -\mathfrak{L}(h)(z)$, où $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est définie par $h(t) = tf(t)$
5. **(Dérivée d'une fonction)** Si de plus $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ et $\int_0^\infty |f'(t)|e^{-\gamma_0 t}\,dt < \infty$, alors on a $\mathfrak{L}(f')(z) = z\mathfrak{L}(f)(z) - f(0)$
   1. Si $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ et $\int_0^\infty |f''(t)|e^{-\gamma_0 t}\,dt < \infty$, alors $\mathfrak{L}(f'')(z) = z^2\mathfrak{L}(f)(z) - zf(0) - f'(0)$
6. **(Primitive d'une fonction)** Si $\varphi(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ primitive de f, alors $\mathfrak{L}(\varphi)(z) = \dfrac{1}{z}\mathfrak{L}(f)(z)$

7. Applications de l'analyse de Fourier et de Laplace

Applications aux équations différentielles

1. Le problème de Cauchy consiste à trouver une solution $y(t)$ d'un équation différentielle linéaire du 2e ordre du type $a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = f(t)$ pour tout $t \in]0, +\infty[$ avec les conditions initiales $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y_1$ où $a_0, a_1, a_2, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ sont des constantes données avec $a_2 \neq 0$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction connue.
2. Résolution du problème de Cauchy, en notant $\mathfrak{L}(f)(z) \equiv F(z)$ et $\mathfrak{L}(y)(z) \equiv Y(z)$ les transformées de Laplace de f (calculable) et de la solution y (inconnue) :
   1. On écrit la transformée de Laplace de l'équation différentielle : $\mathfrak{L}(a_2y'' + a_1y' + a_0y)(z) = \mathfrak{L}(f)(z)$ puis on utilise les propriétés de telle sorte à avoir $Y(z) = \dfrac{F(z) + a_2y_0z + a_1y_0 + a_2y_1}{a_2z^2 + a_1z + a_0}$ une fonction de la variable $z \in \mathbb{C}$
   2. On utilise la formule d'inversion de la transformée de Laplace pour trouver la solution $y(t)$ du problème $y(t) = \mathfrak{L}^{-1}(Y)(t)$
3. **(Cas particulier du problème de Cauchy)** Pour résoudre une forme simplifiée du problème de Cauchy avec $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, $a_0 = \lambda \in \mathbb{R}$ et $f(t) = 0, \forall t \in]0, +\infty[$, c'est à dire pour trouver les solutions $y(t)$ de l'équation différentielle $y''(t) + \lambda y(t) = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y_1$, avec $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, on a $Y(z) = \dfrac{y_0z + y_1}{z^2 + \lambda}$ et on distingue plusieurs cas:
   1. Pour $\lambda = 0 : y(t) = y_0 + y_1t$
   2. Pour $\lambda < 0 : y(t) = y_0 \cosh\left(\sqrt{-\lambda}t\right) + \dfrac{y_1}{\sqrt{\lambda}} \sinh\left(\sqrt{-\lambda}t\right)$
   3. Pour $\lambda > 0 : y(t) = y_0 \cos\left(\sqrt{\lambda}t\right) + \dfrac{y_1}{\sqrt{\lambda}} \sin\left(\sqrt{\lambda}t\right)$
4. **(Problème de Sturm–Liouville)** Soit $L > 0$, le problème de Sturm-Liouville consiste à
   1. Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que l'équation $y''(t) + \lambda y(t) = 0$ possède une solution $y(t)$ **non-triviale** pour tout $t \in]0,L[$ avec $y(0) = y(L)$
   2. Donner l'expression explicite de cette solution.

   Contrairement au problème de Cauchy, on cherche une solution dans $]0,L[$ qui s'annule aux extrémités et sans condition initiale pour y'.

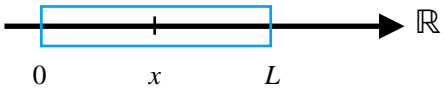
   La solution **triviale** de l'équation est la fonction y définie par $y(t) = 0$.
5. **(Résolution du problème de Sturm-Liouville)** Le problème de Sturm-Liouville admet des solutions non-triviales lorsque $\lambda = \left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}^*$. Elles sont données par $y_n(t) = \alpha_n \sin\left(\dfrac{n\pi}{L}t\right)$, avec α_n une constante arbitraire et $n \in \mathbb{N}^*$.
6. **(Version modifiée du problème de Sturm-Liouville)** Avec la même méthode on étudie aussi une version modifiée de ce problème en remplaçant la condition $y(0) = y(L) = 0$ par $y'(0) = y'(L) = 0$ concernant la dérivée de la solution $y(t)$. On trouve qu'il y a des solutions

non-triviales lorsque $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ avec $n \in \mathbb{N}$, données par $y_n(t) = \beta_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)$ où β_n est une constante arbitraire.

Applications aux équations aux dérivées partielles

Équation de la chaleur (barre de longueur finie)

Soit une barre conductrice de longueur $L > 0$ **finie**, on note $u(x,t)$ la fonction de **deux variables** qui représente la température de la barre au point x et à l'instant t.



L'évolution de la température $u(x,t)$ le long de la barre est décrite par **l'équation de la chaleur** : $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$, pour $x \in]0,L[$ et $t > 0$ où $a \neq 0$ est un coefficient thermique.

On impose :

- Deux conditions aux limites : $u(0,t) = u(L,t) = 0, \forall t > 0$ (la température est tout le temps nulle aux extrémités)
- Une condition initiale : $u(x,0) = f(x), \forall x \in]0,L[$ (à $t = 0$, la température est connue en tout point et est donnée par une fonction $f :]0,L[\to \mathbb{R}$, t.q. $f \in C^1(]0,L[)$

Méthode pour trouver la solution $u(x,t)$ du problème satisfaisant ces conditions :

1. On **ignore** la condition initiale et par la méthode de **séparation de variables**, c'est à dire qu'on cherche des solutions en écrivant $u(x,t) = v(x)w(t)$ (v et w dépendent respectivement **seulement** x et t). On obtient alors $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \iff v(x)w'(t) = a^2 v''(x)w(t)$ $\iff \frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{w'(t)}{w(t)} = -\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$. On cherche alors à résoudre les deux équations suivantes :
   1. $v''(x) + \lambda v(x) = 0$ pour $x \in]0,L[$ avec $v(0) = v(L) = 0$, qui est le problème de Sturm-Liouville et admet des solutions lorsque $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, qui sont données par $v_n(x) = \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ où α_n est une constante arbitraire.
   2. $w'(t) + a^2\lambda w(t) = 0$ pour $t > 0$, ce qui donne $w'(t) = -\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 w(t)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la solution est $w_n(t) = c_n e^{-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t}$, où c_n est une constante arbitraire.

La solution générale est donc donnée par $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, où A_n sont des constantes arbitraires.

2. On impose la condition initiale $u(x,0) = f(x)$ pour tout $x \in]0,L[$ à la solution générale et on obtient que $A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx$ sont les coefficients de Fourier **en sinus** de f.

Enfin, on obtient que pour une barre de longueur L finie, la solution de l'équation de la chaleur est donnée par $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{a_n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ où $A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx$.

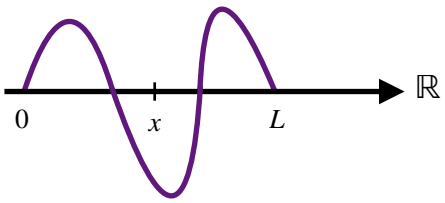
Équation de la chaleur pour une barre de longueur infinie

Il n'y a pas de conditions aux limites concernant les extrémités de la barre et le problème de l'équation de la chaleur est $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$ avec une condition initiale $u(x,0) = f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q. $f \in C^1(\mathbb{R})$ avec $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < \infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathfrak{F}(f)(\alpha)|\,d\alpha < \infty$.

Méthode pour trouver une solution $u(x,t)$ du problème :

1. On écrit la transformée de Fourier de l'équation de la chaleur en considérant $u(x,t)$ comme une fonction de la variable x où t joue le rôle d'un paramètre **fixé**. La solution est donc $\mathfrak{F}(u)(\alpha,t) = \mathfrak{F}(f)(\alpha)e^{-a^2\alpha^2 t}$.
2. Pour obtenir la solution $u(x,t)$ on calcule la transformée de Fourier inverse de $\mathfrak{F}(u)(\alpha,t)$ en considérant t comme un paramètre **fixé**.

Enfin, on obtient que $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}(f)(\alpha)e^{-a^2\alpha^2 t}e^{i\alpha x}\,d\alpha$.



Équation des ondes

On considère une corde élastique de longueur $L > 0$ **finie** et **fixée** en ses extrémités. On note $u(x,t)$ la fonction qui représente la position de la corde au point x et à l'instant t.

L'évolution de la position $u(x,t)$ est décrite par l'équation des ondes (aux dérivées partielles) donnée par $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ pour $x \in]0,L[$ et $t > 0$ où $c > 0$ est un coefficient élastique.

On **impose** :

- Deux conditions aux limites : $u(0,t) = u(L,t) = 0, \forall t > 0$ (la corde est toujours fixée en ses extrémités)
- Deux conditions initiales : $u(x,0) = f(x)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \forall x \in]0,L[$ (la forme de la corde et les vitesses le long de la corde sont connues à l'instant $t = 0$ et sont respectivement données par les fonctions $f :]0,L[\to \mathbb{R}$ et $g :]0,L[\to \mathbb{R}$). On suppose que $f, g \in C^3(]0,L[)$.

Méthode pour trouver une solution $u(x,t)$ du problème satisfaisant ces conditions :

1. On **ignore** les conditions initiales et on procède par la méthode de **séparation de variables** : on écrit $u(x,t) = v(x)w(t)$ et on obtient alors
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \iff v(x)w''(t) = c^2 v''(x)w(t) \iff \frac{w''(t)}{w(t)} = c^2 \frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$$
On cherche alors à résoudre les deux équations suivantes :
   1. $v''(x) + \lambda v(x) = 0$ pour $x \in]0,L[$ avec $v(0) = v(L) = 0$, qui est le problème de Sturm-Liouville et admet des solutions lorsque $\lambda = \left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, qui sont données par $v_n(x) = \alpha_n \sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)$ où α_n est une constante arbitraire.
   2. $w''(t) + \lambda w(t) = 0$ pour $t > 0$, qui est le cas particulier du problème de Cauchy et dont les solutions sont données par $w_n(t) = a_n \cos\left(\dfrac{n\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\dfrac{n\pi}{L}t\right)$, pour $\lambda = \left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2$ et $n \geq 1$.

La solution générale est donc de la forme
$u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, où A_n et B_n sont des constantes arbitraires.

2. On impose les deux conditions initiales la solution générale et on obtient que
$A_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx$ sont les coefficients de Fourier en sinus de f et que
$\dfrac{cn\pi}{L}B_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx$ sont les coefficients de Fourier en sinus de g.

Enfin, la solution de l'équation d'onde est
$u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ où
$A_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx$ et $B_n = \dfrac{2}{n\pi c}\displaystyle\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx$