



ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

ANALYSE III

MICROTECHNIQUE

SEMESTRE 3

PAR
MUNIER LOUIS

COURS DE M. CIBILS

Table des matières

I	Analyse Vectorielle	7
1	Opérateurs différentiels :	9
1.1	Préliminaires :	9
1.1.1	Motivations et Méthodes :	9
1.1.2	Rappels, Notations et Terminologie :	9
1.2	Définition :	10
1.2.1	Le Gradient :	10
1.2.2	La Divergence :	10
1.2.3	Le Rotationnel :	11
1.2.4	Le Laplacien :	11
1.3	Exemples :	12
1.4	Formules de Différentiation :	13
1.4.1	Résultats importants :	13
1.4.2	Autres Formules :	13
2	Intégrales curvilignes et champs conservatifs :	15
2.1	Courbes dans \mathbb{R}^n :	15
2.1.1	Définitions :	15
2.1.2	Exemples :	16
2.2	Intégrales curvilignes :	17
2.2.1	Définitions :	17
2.2.2	Exemples :	18
2.3	Champs qui dérivent d'un potentiel :	20
2.3.1	Notions de Topologie :	20
2.3.2	Caractérisation des champs conservatifs :	21
2.3.3	Résultats Importants :	22
2.3.4	Exemples :	23
2.3.5	Démonstration du Théorème 1 :	25
2.4	Théorème de Green :	26
2.4.1	Rappels, notations et définitions :	26
2.4.2	Énoncé du Théorème de Green :	27
2.4.3	Exemple :	28
2.4.4	Corollaire du Théorème de Green :	30
3	Intégrales de surface :	31
3.1	Surface dans \mathbb{R}^3 :	31
3.2	Exemples :	32
3.3	Intégrale de Surface :	34
3.3.1	Intégrale de champs scalaires :	34
3.3.2	Exemples :	35
3.3.3	Intégrales de champs vectorielles :	36
3.3.4	Exemples :	37
3.4	Théorème de la Divergence :	38
3.4.1	Motivation :	38

3.4.2	Définitions :	39
3.4.3	Énoncé du théorème de la divergence :	39
3.4.4	Exemples :	40
3.5	Théorème de Stokes :	44
3.5.1	Motivations :	44
3.5.2	Détermination du bord d'une surface et de son sens de parcours	44
3.5.3	Énoncé du Théorème de Stokes :	47
II Analyse Complexe		51
4	Fonctions holomorphe et équations de Cauchy-Riemann :	53
4.1	Introduction :	53
4.1.1	Motivation :	53
4.1.2	Rappels sur les nombres complexes :	53
4.2	Fonctions complexes :	54
4.2.1	Définition :	54
4.2.2	Exemples :	54
4.3	Limites, continuité et dérivabilité :	55
4.3.1	Définitions :	55
4.3.2	Équations de Cauchy-Riemann :	55
4.3.3	Exemples :	56
5	Théorème et formule intégrale de Cauchy	59
5.1	Intégration complexe :	59
5.1.1	Notations et définitions :	59
5.1.2	Exemples	60
5.2	Théorème de Cauchy	61
5.2.1	Énoncé du théorème de Cauchy :	61
5.2.2	Exemples :	61
5.3	Formule intégrale de Cauchy	62
5.3.1	Énoncé	62
5.3.2	Exemples d'utilisations :	63
5.3.3	Corollaire de la formule intégrale de Cauchy :	64
5.3.4	Exemple d'utilisation :	65
6	Série de Laurent, pôles et résidus	67
6.1	Polynôme et série de Taylor d'une fonction holomorphe :	67
6.1.1	Définitions et résultats :	67
6.1.2	Exemples :	68
6.2	Développement et série de Laurent d'une fonction holomorphe	69
6.2.1	Motivations, définitions et résultats :	69
6.2.2	Définition issues de la série de Laurent :	70
6.2.3	Exemples :	71
6.2.4	Détection des pôles, détermination de l'ordre et formules de calcul du résidu	73
7	Théorème des résidus et applications au calcul d'intégrales réelles	75
7.1	Théorème des résidus :	75
7.1.1	Énoncé du Théorème des résidus :	75
7.1.2	Exemples :	76
7.2	Applications du Théorème des résidus :	77
7.2.1	Calcul d'intégrales de fonctions périodiques :	77
7.2.2	Calcul d'intégrales généralisées	80
7.2.3	Exemples	82

A Formules utiles :	85
A.1 Séries de Taylor :	85
A.2 Identités Trigonométriques :	86

Première partie

Analyse Vectorielle

Chapitre 1

Opérateurs différentiels :

1.1 Préliminaires :

1.1.1 Motivations et Méthodes :

But :

Appliquer les règles de l'analyse au calcul vectoriel pour dériver des vecteurs.

Méthodes :

Mises en place au 19^e siècle.

1.1.2 Rappels, Notations et Terminologie :

- Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$ on note $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet de nombres réels.

Pour $n = 2$ on écrit $(x_1, x_2) = (x, y)$.

Pour $n = 3$ on écrit $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$.

Remarque : x ne désigne plus le couple de \mathbb{R}^2 ou le triplet de \mathbb{R}^3 mais sa première composante.

- Une fonction à valeurs réelles définie sur un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

qui dépend de plusieurs variables x_1, x_2, \dots, x_n est appelée un champ scalaire.

Pour $k \in \mathbb{N}$ on écrit $f \in C^k(\Omega)$ si toutes les dérivées partielles d'ordre $\leq k$ existent et sont continues sur le domaine où est décrit la fonction : Ω .

- Une fonction à valeur dans \mathbb{R}^n définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{avec} \quad F_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)) \quad x \mapsto F_i(x) \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n$$

est appelé un champ vectoriel.

Pour $k \in \mathbb{N}$ on écrit $F \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ si $F_i \in C^k(\Omega)$ pour $i = 1, \dots, n$

Remarque : un champ vectoriel F est défini par la donnée de n champs scalaires.

$$\{F_i\}_{i=1}^n$$

- L'opérateur différentiel vectoriel "nabla", noté ∇ , est défini par

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

Il a vocation à agir sur des champs scalaires ou vectoriels.

1.2 Définition :

1.2.1 Le Gradient :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert, et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Un champ scalaire tel que $f \in C^1(\Omega)$. Le gradient de f , noté $\text{grad} f$, est défini par :

$$\text{grad} f(x) = (\nabla f)(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \frac{\partial}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x) \right)$$

On dit que c'est le produit de l'opérateur ∇ et du champ scalaire f .

Remarque 1 : comme $\text{grad} f(x) \in \mathbb{R}^n$ alors $\text{grad} f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ définit un champ vectoriel.

Remarque 2 :

Pour $n = 2$ on a $f = f(x, y)$ et $\text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$

Pour $n = 3$ on a $f = f(x, y, z)$ et $\text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$

1.2.2 La Divergence :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert, et $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$x \mapsto F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$$

un champ vectoriel tel que $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. La divergence de F , notée $\text{div} F$, est définie par :

$$\text{div} F(x) = (\nabla \cdot F)(x) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x) + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x)$$

On dit que c'est le produit scalaire de l'opérateur ∇ et du champ vectoriel F .

Remarque : comme $\text{div} F(x) \in \mathbb{R}$ alors $\text{div} F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définit un champ scalaire.

Pour $n = 2$ on a $F = F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ et $\text{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$

Pour $n = 3$ on a $F = F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ et $\text{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$

1.2.3 Le Rotationnel :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert, et $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$x \mapsto F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$$

un champ vectoriel tel que $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Le rotationnel de F , noté $\text{rot}F$, est défini par

Lorsque $n = 2$

$$\text{rot}F(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y)$$

où $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$

Lorsque $n = 3$

$$\text{rot}F(x, y, z) = (\nabla \wedge F)(x, y, z)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) \end{pmatrix}$$

où $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$

On dit que c'est le produit vectoriel de l'opérateur ∇ et du champ vectoriel F .

Remarque 1 :

Procédé mnémotechnique de calcul (notion de déterminant) :

$$\text{rot}F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Remarque 2 :

pour $n = 2$ $\text{rot}F(x, y) \in \mathbb{R}$ et $\text{rot}F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définit un champ scalaire.

pour $n = 3$ $\text{rot}F(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\text{rot}F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ définit un champ vectoriel.

1.2.4 Le Laplacien :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert, et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

un champ scalaire tel que $f \in C^2(\Omega)$. Le Laplacien de f , noté Δf , est défini par :

$$(\Delta f)(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x)$$

Remarque : comme $(\Delta f)(x) \in \mathbb{R}$ alors $\Delta f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définit un champ scalaire.

Pour $n = 2$ on a $f = f(x, y)$ et $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Pour $n = 3$ on a $f = f(x, y, z)$ et $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

1.3 Exemples :

Exemple 1: Calcul de gradient

Soit

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^2 y^3 \sin(z^2)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(x, y, z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) \\ &= (2xy^3 \sin(z^2), 3x^2 y^2 \sin(z^2), 2zx^2 y^3 \cos(z^2)) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exemple 2: Calcul de divergence

Soit

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto F(x, y, z) = (x^2 - e^y, \sin(xz), y^2 e^{2xz})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F(x, y, z) &= \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z) \\ &= 2x + 0 + 2xy^2 e^{2xz} \\ &= 2x(1 + 2y^2 e^{2xz}) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exemple 3: calcul de rotationnel

Soit

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto F(x, y, z) = (\sin y, e^{xyz}, z^2)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(x, y, z) &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin y & e^{xyz} & z^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(e^{xyz}) \\ \frac{\partial}{\partial z}(\sin y) - \frac{\partial}{\partial x}(z^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(e^{xyz}) - \frac{\partial}{\partial y}(\sin y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 - xye^{xyz} \\ 0 - 0 \\ yze^{xyz} - \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xye^{xyz} \\ 0 \\ yze^{xyz} - \cos y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Exemple 4: Calcul de Laplacien

Soit

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^2 y z^2 - z^3 + \sin(3x)$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^2yz^3 + \sin(3x)) = \frac{\partial}{\partial x}(2xyz^2 + 3\cos(3x)) \\ &= 2yz^2 - 9\sin(3x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^2yz^3 + \sin(3x)) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2z^3) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x^2yz^3 + \sin(3x)) = \frac{\partial}{\partial z}(3x^2yz^2) \\ &= 6x^2yz\end{aligned}$$

$$\Delta f(x, y, z) = 2yz^2 - 9\sin(3x) + 6x^2yz \in \mathbb{R}$$

1.4 Formules de Différentiation :

1.4.1 Résultats importants :

Théorème :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soient un champ scalaire $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f \in C^2(\Omega)$ et un champ vectoriel $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ alors

1. $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f$ pour tout entier $n > 1$.

2. pour $n = 2$ on a $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0 (\in \mathbb{R})$.

3. pour $n = 3$ on a $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (\in \mathbb{R}^3)$ et $\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0 (\in \mathbb{R}^n)$.

Démonstration: *exercice 4 série 1*

1.4.2 Autres Formules :

exercice 5 série 1

Chapitre 2

Intégrales curvilignes et champs conservatifs :

2.1 Courbes dans \mathbb{R}^n :

2.1.1 Définitions :

Soit $n \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$

Définition 1:

$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est une courbe simple et régulière, s'il existe un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et une fonction

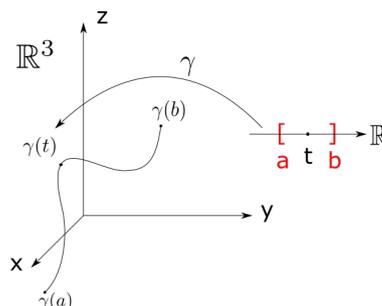
$$\begin{aligned} \gamma : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)) \end{aligned}$$

telle que :

- $\Gamma = \gamma([a, b]) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in [a, b] \text{ avec } x = \gamma(t)\}$ **Au plus une pré-image**
→ implique simple
- γ est injective sur $[a, b[$: $\forall t_1, t_2 \in [a, b[$ avec $t_1 \neq t_2 \implies \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$
- $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$
- $\|\gamma'(t)\| \stackrel{\text{déf}}{=} [\gamma'(t_1)^2 + \gamma'(t_2)^2 + \dots + \gamma'(t_n)^2]^{\frac{1}{2}} \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$
→ implique régulière.

Remarques :

1. γ s'appelle une paramétrisation de Γ par $t \in \mathbb{R}$
2. $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$ est le vecteur "position" sur Γ à "l'instant" t .
3. $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots, \gamma'_n(t))$ est le vecteur tangent (vecteur "vitesse") à Γ au point $\gamma(t)$
4. Illustration dans \mathbb{R}^3



Définition 2:

$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est une courbe simple régulière fermée si en plus $\gamma(a) = \gamma(b)$ (possible car injective sur $[a, b]$)

Définition 3:

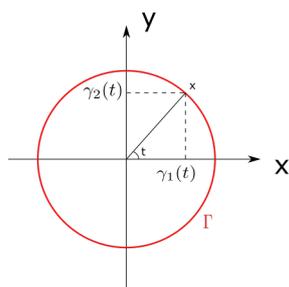
$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est une courbe simple régulière par morceau s'il existe $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ des courbes simples régulières telles que :

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i$$

2.1.2 Exemples :**Exemple 1:**

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

Illustration dans \mathbb{R}^3



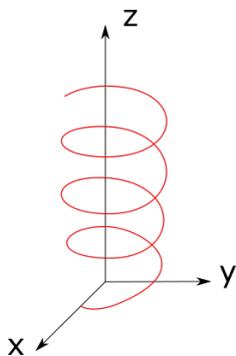
Γ : cercle de rayon $R = 1$
 $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$$\|\gamma'(t)\| = [(-\sin t)^2 + (\cos t)^2]^{\frac{1}{2}} = 1 \neq 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

→ régulière et simple

Exemple 2:

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 6\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 4t) \end{aligned}$$

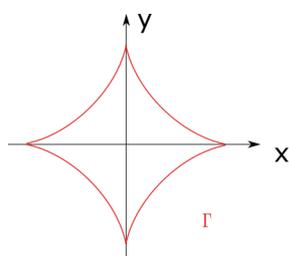


Γ : hélice circulaire dans \mathbb{R}^3
 $\gamma'(t) = (-3 \sin t, 3 \cos t, 4)$

$$\|\gamma'(t)\| = (9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t + 16)^{\frac{1}{2}} = 5 \neq 0 \quad \forall t \in [0, 6\pi]$$

Exemple 3:

$$\begin{aligned}\gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\Gamma : \text{astroïde dans } \mathbb{R}^2 \\ \gamma'(t) &= (-3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\gamma'(t)\| &= [9 \cos^4 t \sin^2 t + 9 \sin^4 t \cos^2 t]^{\frac{1}{2}} = [9 \cos^2 t \sin^2 t \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1}]^{\frac{1}{2}} \\ &= 3\|\cos t, \sin t\|\end{aligned}$$

Courbe non régulière car $\|\gamma'(t)\|^2 = 0$ si $t = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$

2.2 Intégrales curvilignes :

But : Définir la notion d'intégrale le long d'une courbe Γ .

2.2.1 Définitions :

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe simple régulière de paramétrisation :

$$\begin{aligned}\gamma : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \gamma(t)\end{aligned}$$

Définition 1: Soit f un champ scalaire continu défini sur la courbe.

$$\begin{aligned}f : \Gamma &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)\end{aligned}$$

L'intégrale de f le long de Γ est définie par

$$\int_{\Gamma} f \, dl \stackrel{\text{déf}}{=} \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt$$

Remarque : On calcule la longueur de la courbe Γ en choisissant $f = 1$ (champ scalaire constant égal à 1 $\forall x \in \mathbb{R}^n$). On a

$$\text{longueur}(\Gamma) = \int_{\Gamma} dl = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt \quad \text{exercice 1 série 2}$$

Définition 2: Soit

$$F : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \mapsto F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$$

Un champ vectoriel continu.

L'intégrale de F le long de Γ est définie par :

$$\int_{\Gamma} F \cdot dl \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n F_i(\gamma(t)) \gamma'_i(t) \right] dt$$

Remarque : Cette int\u00e9grale donne le travail du champ F le long de la courbe Γ *exercice 5 s\u00e9rie 2.*

D\u00e9finition 3: Si Γ est une courbe simple r\u00e9guli\u00e8re par morceaux alors

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma} f dl = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} f dl \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma} F \cdot dl = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} F \cdot dl$$

2.2.2 Exemples :

Exemple 1:

Calculer $\int_{\Gamma} f dl$ pour

a) La fonction suivante :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2}$$

et la courbe $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ param\u00e9tr\u00e9e par

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \gamma(t) = \left(t, \frac{t^2}{2} \right)$$

On a $\gamma'(t) = (1, t)$ et $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + t^2}$. Donc

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f dl &= \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{t^2 + 4 \left(\frac{t^2}{2} \right)^2} \sqrt{1 + t^2} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{t^2(1 + t^2)} \sqrt{1 + t^2} dt = \int_0^1 t(1 + t^2) dt \\ &= \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{t^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

b) La fonction suivante :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = x$$

et la courbe $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \cosh x \text{ pour } x \in [0, 1]\}$

Paramétrisation :

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \gamma(t) = (t, \cosh t)$$

On a $\gamma'(t) = (1, \sinh t)$ et $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \cosh t$. Donc

$$\int_{\Gamma} f \, dl = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^1 t \cdot \cosh t \, dt$$

On pose :

$$u(t) = t \quad v'(t) = \cosh t$$

$$u'(t) = 1 \quad v(t) = \sinh t$$

$$\stackrel{\text{pp}}{=} t \sinh t \Big|_0^1 - \int_0^1 \sinh t \, dt = \sinh 1 - \cosh t \Big|_0^1$$

$$= \sinh 1 - \cosh 1 + 1 = \frac{e - e^{-1}}{2} - \frac{e + e^{-1}}{2} + 1$$

$$= -\frac{1}{e} + 1$$

Exemple 2: Calculer $\int_{\Gamma} F \cdot dl$ pour

a) La fonction suivante :

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto F(x, y, z) = (x, z, y)$$

et la courbe Γ paramétrée par

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$$

On a $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ et

$$\int_{\Gamma} F \cdot dl = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = \int_0^{2\pi} (\cos t, 0, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) \, dt$$

$$= - \int_0^{2\pi} \cos t \sin t \, dt = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2t) \, dt = \frac{1}{4} \cos(2t) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

b) La fonction suivante :

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto F(x, y, z) = (x^2, y^3, z^2)$$

et la courbe $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = e^x \text{ et } z = x \text{ pour } x \in [0, 1]\}$

Paramétrisation de Γ :

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto \gamma(t) = (t, e^t, t)$$

On a $\gamma'(t) = (1, e^t, 1)$ et donc

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot dl &= \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^1 (t^2, e^{3t}, t^2) \cdot (1, e^t, 1) dt \\ &= \int_0^1 (t^2 + e^{4t} + t^2) dt = \int_0^1 (2t^2 + e^{4t}) dt \\ &= \left. \frac{2t^3}{3} + \frac{e^{4t}}{4} \right|_0^1 \\ &= \frac{2}{3} + \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5 + 3e^4}{12} \end{aligned}$$

Exemple 3: Calculer la longueur du cercle Γ de rayon R centré à l'origine

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$$

Paramétrisation de Γ :

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \Gamma \\ t \mapsto (R \cos t, R \sin t)$$

On a $\gamma'(t) = (-R \sin t, R \cos t)$ et $\|\gamma'(t)\| = R$

Donc la longueur vaut

$$\Gamma = \int_{\Gamma} dl = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = R \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R$$

Autres exercices : *exercices 2, 3 et 4 série 2*

2.3 Champs qui dérivent d'un potentiel :

2.3.1 Notions de Topologie :

Définition 1:

Un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est **convexe** si pour tout $A \in \Omega$ et tout $B \in \Omega$ le **segment de droite** joignant A à B est entièrement contenu dans Ω .

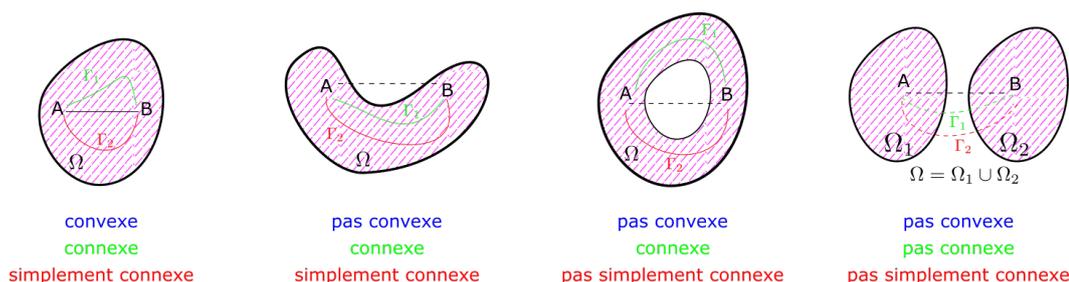
Définition 2:

Un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est **connexe** si pour tout $A \in \Omega$ et tout $B \in \Omega$ il existe une **courbe** Γ continue joignant A et B qui est entièrement contenue dans Ω .

Définition 3:

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est **simplement connexe** s'il est connexe et si deux courbes simples Γ_1 et Γ_2 quelconques contenues dans Ω joignant A et B peuvent être déformée continûment l'une en l'autre sans quitter Ω .

Illustrations dans \mathbb{R}^2 :



Interprétation intuitive :

Un ensemble simplement connexe de \mathbb{R}^2 est un ensemble sans trous.

Remarque : On a toujours :

$$\begin{array}{ccccc} \Omega \text{ convexe} & \implies & \Omega \text{ simplement connexe} & \implies & \Omega \text{ connexe} \\ & & \not\Leftarrow & & \not\Leftarrow \end{array}$$

2.3.2 Caractérisation des champs conservatifs :

Définition : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et

$$\begin{aligned} F : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto F(x) \end{aligned}$$

un **champ vectoriel**. On dit que F **dérive d'un potentiel sur Ω** s'il existe un champ **scalaire**

$$\begin{aligned} f : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

appartenant à $C^1(\Omega)$ tel que

$$F(x) = \text{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \quad \forall x \in \Omega$$

Dans ce cas F est appelé un **champ conservatif** et f est appelé un **potentiel de F** .

Remarque : Si un potentiel de F existe alors il est défini à une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ près car $\text{grad}(f + \alpha) = \text{grad} f = F$ et donc $f + \alpha$ est aussi un potentiel de F .

2.3.3 Résultats Importants :

Théorème 1 : **fondamental**

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et un champ vectoriel

$$F : \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \mapsto F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$$

tel que $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$

a) Condition nécessaire : **si** F dérive d'un potentiel sur Ω **alors** :

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ et } \forall x \in \Omega \quad (2.1)$$

b) Condition suffisante : **si** 2.1 a lieu et **si** Ω est **simplement connexe** alors F dérive d'un potentiel sur Ω

Remarque 1 :

La condition 2.1 du théorème 1 est une condition **nécessaire**, mais elle **n'est pas suffisante** pour garantir l'existence d'un potentiel.

Pour la rendre **suffisante** il faut imposer que Ω soit **simplement connexe** (en particulier si Ω est convexe, la condition 2.1 est suffisante).

Remarque 2 :

La condition 2.1 est équivalente à dire que $\text{rot}F$ est nul.

En effet :

- pour $n = 2$ $F = (F_1, F_2)$ $x = (x_1, x_2)$ et 2.1 signifie :

$$i = 1, j = 2 \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \iff \text{rot}F \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0$$

- pour $n = 3$ $F = (F_1, F_2, F_3)$ $x = (x_1, x_2, x_3)$ et 2.1 signifie :

$$\begin{array}{l} i = 1, j = 2 \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \\ i = 1, j = 3 \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ i = 2, j = 3 \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \end{array} \iff \text{rot}F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 2 :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert simplement connexe et soit $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un champ vectoriel. Alors les affirmations suivantes sont **équivalentes**

1. F dérive d'un potentiel.
2. $\int_{\Gamma_1} F \cdot dl = \int_{\Gamma_2} F \cdot dl$ pour **toutes** les courbes simples régulières (par morceaux) Γ_1 et $\Gamma_2 \subset \Omega$ joignant deux points A et B **quelconques** de Ω .
3. $\int_{\Gamma} F \cdot dl = 0$ pour **toute** courbe simple **fermée** régulière (par morceaux) $\Gamma \subset \Omega$.

Autrement dit : Le champ vectoriel F dérive d'un potentiel \iff Le travail de F est indépendant de la courbe choisie pour aller de A à B \iff Le travail de F le long de n'importe quelle courbe **fermée** est nul.

Résumé de l'utilisation des théorèmes 1 et 2 :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe et un champ vectoriel $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tel que $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ avec $n = 2$ ou $n = 3$.

- Si $\operatorname{rot} F \neq 0$ sur Ω , alors F ne dérive pas d'un potentiel.
- Si $\operatorname{rot} F = 0$ sur Ω simplement connexe alors F dérive d'un potentiel.
- Si $\operatorname{rot} F = 0$ sur Ω qui **n'est pas** simplement connexe alors le théorème 1 ne donne **aucune** informations. (voir exercice 3 série 3)
- Si on trouve une courbe fermée $\Gamma \subset \Omega$ telle que $\int_{\Gamma} F \cdot dl \neq 0$ alors F ne dérive pas d'un potentiel.

Remarque : Attention, $\int_{\Gamma} F \cdot dl = 0$ pour une courbe fermée $\nRightarrow F$ dérive d'un potentiel.

2.3.4 Exemples :

Étudier si le champ F dérive d'un potentiel sur son domaine de définition, si c'est le cas, trouver ce potentiel.

Exemple 1:

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = (4x^3y^2, 2x^4y + y)$$

Domaine de définition : $\Omega = \mathbb{R}^2$ simplement connexe.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F &= \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^4y + y) - \frac{\partial}{\partial y}(4x^3y^2) \\ &= 8x^3y - 8x^3y = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \end{aligned}$$

\implies un potentiel $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ existe tel que $F = \operatorname{grad} f$

Pour trouver x, y on pose :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = F_1(x, y) = 4x^3y^2 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = F_2(x, y) = 2x^4y + y \quad (2.3)$$

Équation 2.2 $\implies f(x, y) = x^4y^2 + \alpha(y)$ où $\alpha(y)$ ne dépend que de y , constante pour x .

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^4y + \alpha'(y)$$

Équation 2.3 $\implies 2x^4y + \alpha'(y) = 2x^4y + y \implies \alpha'(y) = y$

$$\alpha(y) = \frac{1}{2}y^2 + \beta \quad \text{où la constante } \beta \in \mathbb{R}$$

Le potentiel est donc :

$$f(x, y) = x^4 y^2 + \frac{1}{2} y^2 + \beta \quad \text{où } \beta \text{ est une constante arbitraire.}$$

Exemple 2:

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

Domaine de définition : $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ pas simplement connexe.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F &= \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2+y^2} \right) \\ &= \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \end{aligned}$$

Attention : Ω n'est pas simplement connexe alors le théorème 1 ne donne aucune information.

Avec le théorème 2 on peut montrer que $F \neq \operatorname{grad} f$ sur Ω en trouvant **une** courbe fermée $\Gamma \subset \Omega$ telle que $\int_{\Gamma} F \cdot dl \neq 0$.

Par exemple, on peut choisir :

Le cercle unité, centré à l'origine.

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subset \Omega$$



Paramétrisation :

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

On a donc

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (-\sin t, \cos t) \\ F(\gamma(t)) &= (-\sin t, \cos t) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2(t)) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0 \end{aligned}$$

Conclusion : F ne dérive pas d'un potentiel.

Exemple 3:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto F(x, y, z) = (ye^x \sin z, 1 + e^x \sin z, ye^x \cos z + z)$$

Domaine de définition : $\Omega = \mathbb{R}^3$ simplement connexe.

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ye^x \sin z & 1 + e^x \sin z & ye^x \cos z + z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall (x, y, z) \in \Omega$$

$\implies F$ dérive d'un potentiel f sur Ω tel que $F = \operatorname{grad} f$.

On pose

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = F_1(x, y, z) = ye^x \sin z \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = F_2(x, y, z) = 1 + e^x \sin z \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = F_3(x, y, z) = ye^x \cos z + z \quad (2.6)$$

Équation 2.4 : $f(x, y, z) = ye^x \sin z + \alpha(y, z)$

Alors

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = e^x \sin z + \frac{\partial \alpha}{\partial y}(y, z) = 1 + e^x \sin z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = ye^x \cos z + \frac{\partial \alpha}{\partial z}(y, z) = ye^x \cos z + z$$

$$\implies \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 1 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} = z \quad (2.8)$$

Équation 2.7 :

$$\alpha(y, z) = y + \beta(z) \implies \frac{\partial \alpha}{\partial z}(y, z) = 0 + \beta'(z)$$

$$\beta'(z) = z \implies \beta(z) = \frac{1}{2}z^2 + C$$

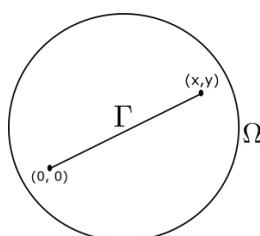
On trouve donc, au final :

$$f(x, y, z) = ye^x \sin z + y + \frac{1}{2}z^2 + C$$

2.3.5 Démonstration du Théorème 1 :

a) Si $F = \operatorname{grad} f \implies \operatorname{rot} F = \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$ voir série 1 exercice 4.1

b) Esquisse de la preuve dans \mathbb{R}^2 lorsque $(0, 0) \in \Omega$ et Ω connexe.



Le segment de droite Γ reliant $(0, 0)$ à (x, y) paramétré par $\gamma(t) = (tx, ty)$ avec $t \in [0, 1]$ et entièrement contenu dans Ω .

On a

$$\gamma'(t) = (x, y) \quad \text{et on définit}$$

$$\begin{aligned}
\phi(x, y) &= \int_{\Gamma} F \cdot dl = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
&= \int_0^1 (F_1(tx, ty), F_2(tx, ty)) \cdot (x, y) dt \\
&= \int_0^1 [xF_1(tx, ty) + yF_2(tx, ty)] dt
\end{aligned}$$

Avec l'hypothèse $\text{rot} F = 0$ exercice 4 série 3 on montre que $\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_1$ et $\frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2$ c'est-à-dire que $F = \text{grad} \phi$ et donc F dérive du potentiel ϕ .

2.4 Théorème de Green :

Remarque : Tous les résultats de cette section sont formulés dans \mathbb{R}^2 .

2.4.1 Rappels, notations et définitions :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné de \mathbb{R}^2 .

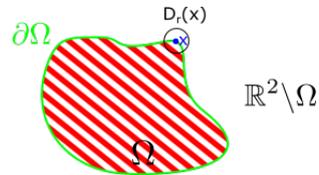
- On note $\partial\Omega$ le bord de Ω

$$\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \Omega \cap D_r(x) \neq \emptyset \text{ et } (\mathbb{R}^2 \setminus \Omega) \cap D_r(x) \neq \emptyset \quad \forall r > 0\}$$

où

$$D_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y - x\| < r\}$$

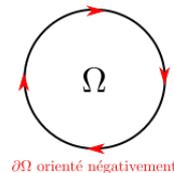
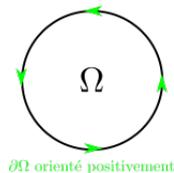
et le disque ouvert de \mathbb{R}^2 centré en x et de rayon r .



- On note $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ l'adhérence de Ω .

Définition 1:

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^2$ un ouvert borné tel que $\partial\Omega$ est une courbe simple fermée régulière (par morceaux). On dit que $\partial\Omega$ est orienté **positivement** respectivement **négativement** si lorsqu'on parcourt $\partial\Omega$ on laisse Ω à gauche respectivement à droite.

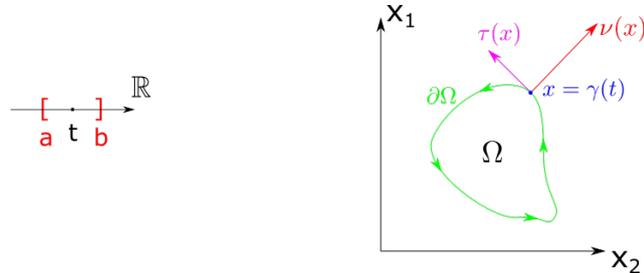


Signification de l'orientation positive :

Pour une paramétrisation

$$\begin{aligned}
\gamma : [a, b] &\longrightarrow \partial\Omega \\
t &\mapsto x = \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))
\end{aligned}$$

de $\partial\Omega$ le vecteur tangent à $\partial\Omega$ en x est $\tau(x) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t))$ et le vecteur normal à $\partial\Omega$ en x donné par $\nu(x) = (\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t))$ est une normale **extérieure** à Ω

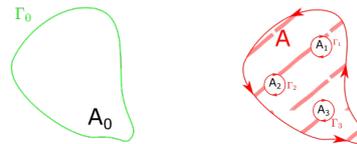


Définition 2:

On dit qu'un ouvert borné $A \subset \mathbb{R}^2$ est un **domaine régulier** s'il existe des ouverts bornés $A_0, A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{R}^2$ tels que

- $\partial A_j = \Gamma_j$ pour $j = 0, 1, \dots, m$ sont des courbes simples fermées régulières (par morceaux).
- $\bar{A}_j \subset A_0$ pour $j = 1, \dots, m$.
- $\bar{A}_i \cap \bar{A}_j = \emptyset \quad \forall i, j = 1, \dots, m$.
- $A = A_0 \setminus \bigcup_{j=1}^m \bar{A}_j$

Illustration typique :



On dit que $\partial A = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_m$ est orienté positivement si le sens de parcours sur chaque Γ_j pour $j = 0, \dots, m$ laisse le domaine A à gauche. C'est-à-dire que le bord Γ_0 est orienté **positivement** (le parcours laisse A_0 à gauche) tandis que les bords $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ sont orientés **négativement** (le parcours laisse A_1, A_2, \dots, A_m à droite).

2.4.2 Énoncé du Théorème de Green :

Théorème de Green :

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un domaine **régulier** dont le bord est **orienté positivement**.
Soit

$$F : \bar{A} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto F(x, y)$$

un champ vectoriel tel que $F \in C^1(\bar{A}, \mathbb{R}^2)$. Alors

$$\underbrace{\iint_A \text{rot} F(x, y) \, dx dy}_{\text{intégrale double d'un champ scalaire}} = \underbrace{\int_{\partial A} F \cdot dl}_{\text{intégrale curviligne d'un champ vectoriel}}$$

Remarque 1 :

Le théorème de Green permet de remplacer le calcul d'une intégrale double du $\text{rot} F$ sur un domaine $A \subset \mathbb{R}^2$ par le calcul d'une intégrale curviligne de F le long du bord ∂A de A .

Remarque 2 : Si F dérive d'un potentiel sur $A \xrightarrow[\text{Th1 §2.3.3}]{=} \text{rot}F = 0$ sur $A \xrightarrow[\text{Th. Green}]{=} \int \partial A F \cdot dl$

Remarque 3 :

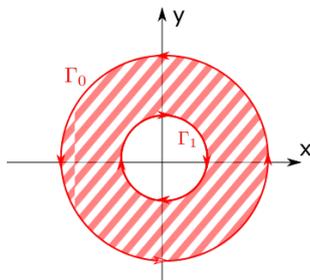
$$\iint_A \underbrace{\left[\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) \right]}_{\text{définition de } \text{rot}F} dx dy = \int_{\partial A} F \cdot dl$$

2.4.3 Exemple :

Exemple : Vérification du théorème de Green.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\} \quad \text{et} \quad F(x, y) = (x^2y, 2xy)$$

Illustration du domaine :



Le domaine est bien régulier.

1. Calcul de $\iint_A \text{rot}F(x, y) dx dy$

On a $\text{rot}F(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) = 2y - x^2$. Alors

$$\iint_A \text{rot}F(x, y) dx dy = \iint_A (2y - x^2) dx dy$$

On passe en coordonnées polaires, on pose donc, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ et $dx dy = r dr d\theta$

$$\begin{aligned} &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} (2r \sin \theta - r^2 \cos^2 \theta) r dr d\theta \\ &= 2 \int_1^2 \underbrace{\left[\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \right]}_{=0} r^2 dr - \int_1^2 \underbrace{\left[\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right]}_{=\pi} r^3 dr \\ &= -\pi \int_1^2 r^3 dr = -\frac{\pi}{4} r^4 \Big|_1^2 = -\frac{\pi}{4} (16 - 1) = -\frac{15\pi}{4} \end{aligned}$$

2. Calcul de $\int_{\partial A} F \cdot dl$ avec ∂A orienté **positivement**.

Détermination de ∂A :

$$A = A_0 \setminus \overline{A_1} \quad \text{avec} \quad A_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\} \quad \text{et} \\ A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

On a donc comme bord de A .

$$\partial A = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \quad \text{avec} \quad \Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\} \quad \text{et} \quad \Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Paramétrisation de ∂A :

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \{\gamma_0(t) = (2 \cos t, 2 \sin t) \text{ avec } t \in [0, 2\pi]\} \\ \Gamma_1 &= \{\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t) \text{ avec } t \in [0, 2\pi]\}\end{aligned}$$

On a

$$\int_{\partial A} F \cdot dl = \int_{\Gamma_0} F \cdot dl - \int_{\Gamma_1} F \cdot dl$$

γ_1 orienté à l'envers

Remarque :

Car ∂A doit être orienté positivement, Γ_0 doit être parcouru dans le sens positif (laisser A_0 à gauche) et Γ_1 doit être parcouru dans le sens négatif (laisser A_1 à droite).

D'une part $\gamma_0'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$ on a :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_0} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} F(\gamma_0(t)) \cdot \gamma_0'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (8 \cos^2 t \sin t, 8 \cos t \sin t) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t) dt \\ &= -16 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt + 16 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt \\ &= \frac{1}{8} 2\pi - \underbrace{\frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \cos 4t dt}_{=0} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t dt &= -\frac{1}{3} \cos^3 t \Big|_0^{2\pi} = 0 \\ \implies \int_{\Gamma_0} F \cdot dl &= -16 \frac{\pi}{4} = -4\pi\end{aligned}$$

D'autre part $\gamma_1'(t) = (-\sin t, \cos t)$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t \sin t, 2 \cos t \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= -\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt}_{=\pi/4} + 2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t dt}_{=0} = -\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\int_{\partial A} F \cdot dl = -4\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -4\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{15\pi}{4}$$

Remarque : Théorème de Green vérifié autres exemples exercices 1 et 2 série 4.

2.4.4 Corollaire du Théorème de Green :

Corollaire du Théorème de Green :

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier dont le bord ∂A est orienté positivement.

Soit $\nu : \partial A \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de normales unités extérieures à A .

Soient $F : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ vectoriel tel que $F \in C^1(\bar{A}, \mathbb{R}^2)$ et $f : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ un champ scalaire tel que $f \in C^2(\bar{A})$.

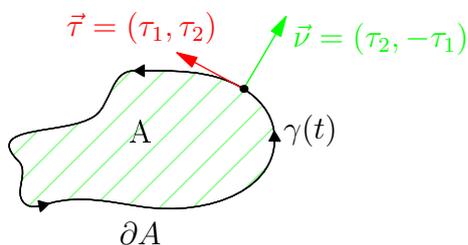
Alors :

1.

$$\iint_A \operatorname{div} F(x, y) \, dx dy = \int_{\partial A} (F \cdot \nu) \, dl$$

2.

$$\iint_A \Delta f(x, y) \, dx dy = \int_{\partial A} (\operatorname{grad} f \cdot \nu) \, dl$$



Si $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ pour $t \in [a, b]$ est une paramétrisation de ∂A alors

$$\vec{\tau} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{(\gamma'_1(t), \gamma'_2(t))}{\|\gamma'(t)\|} = (\tau_1, \tau_2)$$

est le **vecteur tangent unité** (qui suit l'orientation positive de ∂A)

$$\vec{\nu} = (\tau_2, -\tau_1)$$

est le **vecteur normal unité extérieur** à A en $\gamma(t)$

$\vec{\nu}$: champ de normal unité extérieures à A

Remarque 1 : Avec $F = (F_1, F_2)$ et $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ l'égalité 1 s'écrit :

$$\underbrace{\iint_A \left[\frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y) \right] dx dy}_{\text{intégrale double d'un champ scalaire}} = \underbrace{\int_{\partial A} (F_1 \nu_1 + F_2 \nu_2) dl}_{\text{intégrale curviligne d'un champ scalaire}}$$

Théorème de la divergence dans \mathbb{R}^2 .

Preuve du corollaire : *exercice 1 série 5.*

Exemple : *exercice 3 série 4.*

Chapitre 3

Intégrales de surface :

3.1 Surface dans \mathbb{R}^3

- **Nouvelles notations :**

- Pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ on note $f(x, y) = (f^1(x, y), f^2(x, y), f^3(x, y))$ où $f^i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pour $i = 1, 2, 3$ (indices en haut, repèrent les composantes).
- pour une fonction $g(x, y)$ de deux variables on note $\frac{\partial g}{\partial x} = g_x$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = g_y$ (indices en bas repèrent la variable de dérivation).

- **Définition 1:**

$\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ est appelée une surface **régulière** si

- il existe $A \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et tel que le bord ∂A soit une courbe simple fermée régulière (par morceaux)
- il existe une fonction : $\sigma : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u, v) \mapsto \sigma(u, v) = (\sigma^1(u, v), \sigma^2(u, v), \sigma^3(u, v))$$

avec les propriétés suivantes :

- $\sigma \in C^1(\bar{A}, \mathbb{R}^3)$, $\sigma(\bar{A}) = \Sigma$ et σ est injective sur A .
- le vecteur

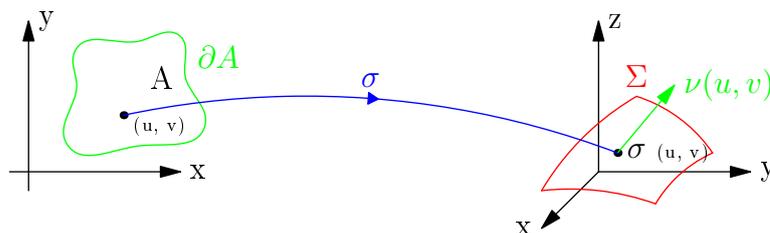
$$\sigma_u \times \sigma_v \stackrel{\text{d'éf}}{=} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sigma_u^1 & \sigma_u^2 & \sigma_u^3 \\ \sigma_v^1 & \sigma_v^2 & \sigma_v^3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 \sigma_v^3 - \sigma_u^3 \sigma_v^2 \\ \sigma_u^3 \sigma_v^1 - \sigma_u^1 \sigma_v^3 \\ \sigma_u^1 \sigma_v^2 - \sigma_u^2 \sigma_v^1 \end{pmatrix}$$

est tel que $\|\sigma_u \times \sigma_v\| \neq 0$ pour tout $(u, v) \in A$

Remarque 1 : σ s'appelle une **paramétrisation régulière** sur A de la surface Σ .

Remarque 2 : le vecteur $\nu(u, v) = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$ s'appelle la **normale unité** à la surface Σ au point $\sigma(u, v)$.

Remarque 3 : Illustration :



Remarque 4 : Analogie avec les courbes dans \mathbb{R}^3 :

courbe Γ (§2.1.1)	courbe Σ (§3.1.1)
$\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^3$	$\sigma : \bar{A} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^3$
$t \mapsto \gamma(t)$	$(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$
$\gamma([a, b]) = \Gamma$ et γ injective sur $[a, b[$	$\sigma(\bar{A}) = \Sigma$ et σ injective sur A
$\ \gamma'(t)\ \neq 0$	$\ \sigma_u \times \sigma_v\ \neq 0$

Définition 2:

On dit que $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ est une surface régulière **par morceaux** s'il existe $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$ des surfaces régulières telles que $\Sigma = \bigcup_{i=1}^k \Sigma_k$.

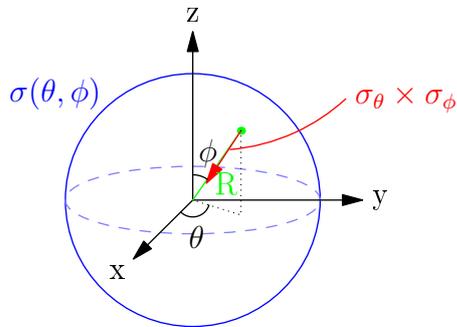
Définition 3:

Une surface régulière (par morceaux) est dite **orientable** s'il existe un champ de normales $\nu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^2$ **continu**.

Un tel champ de normales s'appelle une **orientation** de Σ . Une surface orientée par un champ de normales ν est notée (Σ, ν) .

3.2 Exemples :

Exemple 1:



Sphère (rayon R)

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

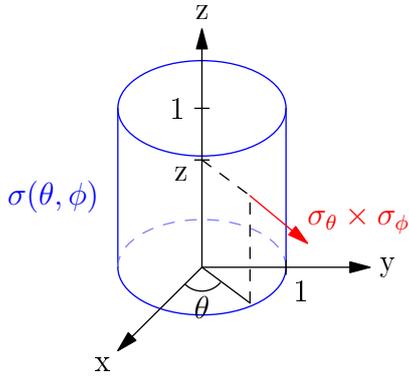
Paramétrisation : On définit : $A =]0, 2\pi[\times]0, \pi[$

$$\begin{aligned} \sigma : \bar{A} &\longrightarrow \Sigma \\ (\theta, \phi) &\mapsto (\sigma^1(\theta, \phi), \sigma^2(\theta, \phi), \sigma^3(\theta, \phi)) = (R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \phi) \end{aligned}$$

Vecteur normal :

$$\sigma_\theta \times \sigma_\phi \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sigma_\theta^1 & \sigma_\theta^2 & \sigma_\theta^3 \\ \sigma_\phi^1 & \sigma_\phi^2 & \sigma_\phi^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -R \sin \phi \sin \theta & R \sin \phi \cos \theta & 0 \\ R \cos \phi \cos \theta & R \cos \phi \sin \theta & -R \sin \phi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -R^2 \sin^2 \phi \cos \theta \\ -R^2 \sin^2 \phi \sin \theta \\ -R^2 \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix}$$

$\sigma_\theta \times \sigma_\phi$ est une normale **intérieure** à la sphère.

Exemple 2:Cylindre (rayon base $R = 1$ et une hauteur $h = 1$)

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$$

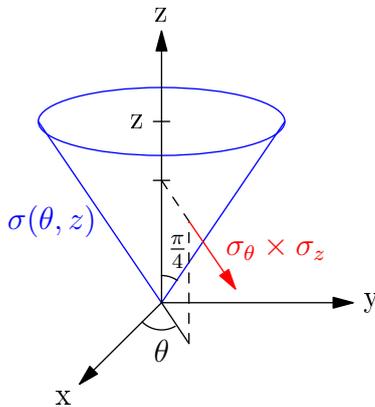
Paramétrisation : On définit : $A =]0, 2\pi[\times]0, 1[$

$$\sigma : \bar{A} \longrightarrow \Sigma$$

$$(\theta, z) \mapsto \sigma(\theta, z) = (\sigma^1(\theta, z), \sigma^2(\theta, z), \sigma^3(\theta, z)) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$$

Vecteur normal :

$$\sigma_\theta \times \sigma_z \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sigma_\theta^1 & \sigma_\theta^2 & \sigma_\theta^3 \\ \sigma_z^1 & \sigma_z^2 & \sigma_z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

 $\sigma_\theta \times \sigma_z$ est une normale **extérieure** au cylindre.**Exemple 3:**Cône (angle $\frac{\pi}{2}$ et la hauteur $h = 1$)

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$$

Paramétrisation : On définit : $A =]0, 2\pi[\times]0, 1[$

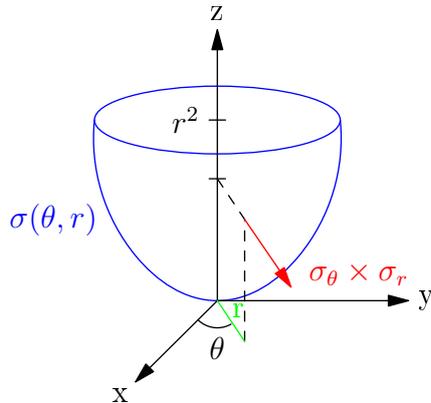
$$\sigma : \bar{A} \longrightarrow \Sigma$$

$$(\theta, z) \mapsto \sigma(\theta, z) = (\sigma^1(\theta, z), \sigma^2(\theta, z), \sigma^3(\theta, z)) = (z \cos \theta, z \sin \theta, z)$$

Vecteur normal :

$$\sigma_\theta \times \sigma_z \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sigma_\theta^1 & \sigma_\theta^2 & \sigma_\theta^3 \\ \sigma_z^1 & \sigma_z^2 & \sigma_z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -z \sin \theta & z \cos \theta & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} z \cos \theta \\ z \sin \theta \\ -z \end{pmatrix}$$

 $\sigma_\theta \times \sigma_z$ est une normale **extérieure** au cône.

Exemple 4:Paraboloïde symétrique (hauteur $h = 1$)

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$$

Paramétrisation : On définit : $A =]0, 2\pi[\times]0, 1[$

$$\sigma : \bar{A} \longrightarrow \Sigma$$

$$(\theta, r) \mapsto (\sigma^1(\theta, r), \sigma^2(\theta, r), \sigma^3(\theta, r)) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r^2)$$

Vecteur normal :

$$\sigma_\theta \times \sigma_r \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sigma_\theta^1 & \sigma_\theta^2 & \sigma_\theta^3 \\ \sigma_r^1 & \sigma_r^2 & \sigma_r^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & 2r \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2r^2 \cos \theta \\ 2r^2 \sin \theta \\ -r \end{pmatrix}$$

 $\sigma_\theta \times \sigma_r$ est une normale **extérieure** au paraboloïde.

Autre exemple : Tore exercice 2 série 5.

3.3 Intégrale de Surface :**But :**Définir une intégrale sur une surface Σ .**3.3.1 Intégrale de champs scalaires :**Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière paramétrée par

$$\sigma : \bar{A} \longrightarrow \Sigma$$

$$(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$$

$$\text{et soit } f : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)$$

un champ scalaire **continu**.**L'intégrale de Surface :**

$$\iint_{\Sigma} f \, ds \stackrel{\text{déf}}{=} \iint_A f(\sigma(u, v)) \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, dudv$$

Remarque 1 : On calcule l'aire de la surface Σ en posant $f = 1$ (champ scalaire constant égal à 1) :

$$\text{Aire}(\Sigma) = \iint_{\Sigma} ds = \iint_A \underbrace{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}_{\text{"élément d'aire"}} \, dudv$$

Remarque 2 : Par exemple si $f(x)$ est la densité de masse au point x alors :

$$\text{masse}(\Sigma) = \iint_{\Sigma} f \, ds$$

Remarque 3 : Pour une surface régulière par morceaux $\Sigma = \bigcup_{i=1}^k \Sigma_i$ on définit :

$$\iint_{\Sigma} f \, ds = \sum_{i=1}^k \iint_{\Sigma_i} f \, ds$$

Remarque 4 : Analogie avec l'intégrale curviligne d'un champ scalaire g le long de Γ (§2.2.1 chapitre 2)

$$\begin{array}{ll} \gamma : [a, b] \longrightarrow \Gamma & \text{et soit} & g : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \gamma(t) & & x \mapsto g(x) \end{array}$$

$$\int_{\Gamma} g \, dl \stackrel{\text{déf}}{=} \int_a^b g(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt$$

3.3.2 Exemples :

Exemple 1:

Soit

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

Calculer l'aire de Σ

Paramétrisation sphère de rayon R voir exemple 1 §3.2.1

$$A =]0, 2\pi[\times]0, \pi[\quad \sigma(\theta, \phi) = (R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \phi)$$

$$\sigma_{\theta} \times \sigma_{\phi} = \begin{pmatrix} -R^2 \sin^2 \phi \cos \theta \\ -R^2 \sin^2 \phi \sin \theta \\ -R^2 \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|\sigma_{\theta} \times \sigma_{\phi}\| &= \sqrt{R^2 \sin^2 \phi \sqrt{R^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + R^2 \cos^2 \phi}} \\ &= R^2 |\sin \phi| = R^2 \sin \phi \quad \text{car } \phi \in [0, \pi] \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(\Sigma) &= \iint_{\Sigma} ds = \iint_A \|\sigma_{\theta} \times \sigma_{\phi}\| \, d\theta d\phi = R^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \phi \, d\phi \\ &= 2\pi R^2 [-\cos \phi]_0^{\pi} = 4\pi R^2 \end{aligned}$$

Exemple 2:

Soit

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$$

et le champ scalaire $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z$

Calculer l'aire de Σ

Paramétrisation cylindre voir exemple 2 §3.2.1

$$A =]0, 2\pi[\times]0, 1[\quad \sigma(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$$

$$\sigma_\theta \times \sigma_z = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\sigma_\theta \times \sigma_z\| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(\Sigma) &= \iint_{\Sigma} f \, ds = \iint_A f(\sigma(\theta, z)) \|\sigma_\theta \times \sigma_z\| \, d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2z) \, dz \\ &= 2\pi \int_0^1 (1 + 2z) \, dz = 2\pi [z + z^2]_0^1 = 4\pi \end{aligned}$$

Autres exemples : exercices 1, 2 et 3 série 6.

3.3.3 Intégrales de champs vectorielles :

Définition : Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière orientable paramétrée par :

$$\begin{aligned} \sigma : \bar{A} &\longrightarrow \Sigma & F : \Sigma &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \sigma(u, v) & x &\mapsto F(x) \end{aligned}$$

un champ vectoriel **continu**.

L'intégrale de F sur Σ dans la direction de $\sigma_u \times \sigma_v$ est définie par :

L'intégrale de F sur Σ :

$$\iint_{\Sigma} F \cdot ds \stackrel{\text{d'éf}}{=} \iint_A [F(\sigma(u, v)) \cdot (\sigma_u \times \sigma_v)] \, dudv$$

Avec la **normale unité** $\nu(u, v) = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$ on peut aussi écrire :

L'intégrale de F sur Σ : en passant par la normale

$$\iint_{\Sigma} F \cdot ds \stackrel{\text{d'éf}}{=} \iint_A [F(\sigma(u, v)) \cdot \nu(u, v)] \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, dudv$$

Attention : Il faut toujours préciser la direction !

Remarque 1 : L'intégrale $\iint_{\Sigma} F \cdot ds$ s'appelle le **flux** de F à travers la surface Σ dans la direction de ν

Remarque 2 : Pour une surface régulière orientable par morceaux $\Sigma = \bigcup_{i=1}^k \Sigma_i$ on définit :

Surface régulière orientable

$$\iint_{\Sigma} F \cdot ds \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^k \iint_{\Sigma_i} F \cdot ds$$

Remarque 3 : Analogie avec l'intégrale curviligne d'un champ vectoriel G le long de Γ (§2.2.1)

$$\begin{array}{ll} \gamma : [a, b] \longrightarrow \Gamma & \text{et soit} \\ t \mapsto \gamma(t) & G : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & x \mapsto G(x) \end{array}$$

Analogie avec l'Intégrale Curviligne :

$$\int_{\Gamma} G \cdot dl = \int_a^b [G(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)] dt$$

3.3.4 Exemples :

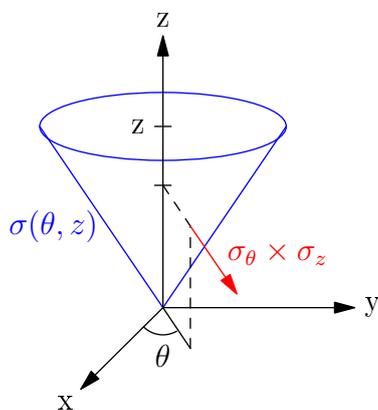
Exemple 1:

Soit

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$$

et le champ vectoriel $F : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ défini par $F(x, y, z) = (y, -x, z^2)$

Calculer le flux de F à travers Σ dans la direction ascendante.



Paramétrisation cône (exemple 3 §3.1.2)

$$A =]0, 2\pi[\times]0, 1[$$

$$\sigma(\theta, z) = (z \cos \theta, z \sin \theta, z) \text{ et } \sigma_{\theta} \times \sigma_z = \begin{pmatrix} z \cos \theta \\ z \sin \theta \\ -z \end{pmatrix}$$

Comme $z \in [0, 1]$ et $-z < 0$, la normal pointant vers le haut est $-\sigma_{\theta} \times \sigma_z$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} F \cdot ds &= - \iint_A [F(\sigma(\theta, z)) \cdot (\sigma_{\theta} \times \sigma_z)] d\theta dz \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 (z^2 \cos \theta \sin \theta - z^2 \cos \theta \sin \theta - z^3) d\theta dz \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 (z^3) d\theta dz = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Citation de M. Cibils:

"C'est formidable et non pas fort minable, comme dirait un certain Stromae"

Autres exemples : exercices 4 et 5 série 6.

3.4 Théorème de la Divergence :

3.4.1 Motivation :

But

Généralisation du théorème de la divergence de \mathbb{R}^2 à des domaines de \mathbb{R}^3

Rappel

Théorème de la divergence dans \mathbb{R}^2 *exercice 1 série 5 et corollaire du Théorème de Green §2.4.4*

Théorème de la Divergence :

$$\iint_A \operatorname{div} F(x, y) dx dy = \int_{\partial A} (F \cdot \nu) dl$$

Avec :

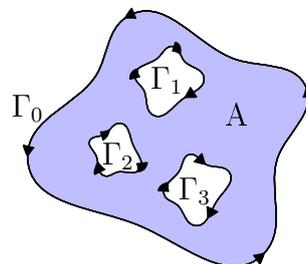
$A \subset \mathbb{R}^2$ domaine régulier de bord ∂A orienté positivement.

$\nu : \partial A \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de normales unités extérieures à A .

$F : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ vectoriel $\in C^1(\bar{A}, \mathbb{R}^2)$

Motivation

Obtenir un théorème analogue en remplaçant A par un domaine de \mathbb{R}^3 et l'intégrale curviligne $\int_{\partial A}$ par une intégrale de surface.



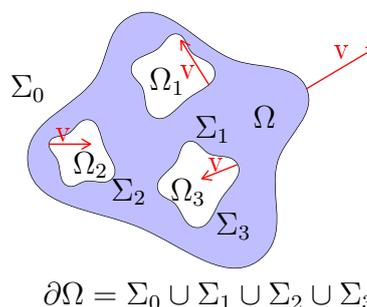
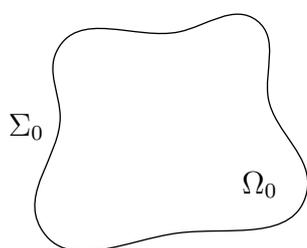
$$\partial A = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

3.4.2 Définitions :

Définition : On a dit qu'un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un **domaine régulier** s'il existe des ouverts bornés $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_m \subset \mathbb{R}^3$ tels que :

- $\partial\Omega_j = \Sigma_j$ pour $j = 0, 1, \dots, m$ sont des surfaces régulières (par morceaux) orientables avec un champ de normales unités.
- $\overline{\Omega}_j \subset \Omega_0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, m$
- $\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j = \emptyset \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, m$ avec $i \neq j$
- $\Omega = \Omega_0 \setminus \bigcup_{i=1}^m \overline{\Omega}_i$ possède un champ de normales **extérieures**.

Illustration typique :



Champ de normales **extérieures** à Ω lorsqu'on considère les surfaces $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_m$. Elles sont **intérieures** par rapport aux ouverts $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$.

3.4.3 Énoncé du théorème de la divergence :

Théorème de la Divergence :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier et $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de normales **unités extérieures** à Ω défini par $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$.

Soit $F : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel tel que $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ défini par $F = (F_1, F_2, F_3)$. Alors

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu) \, ds$$

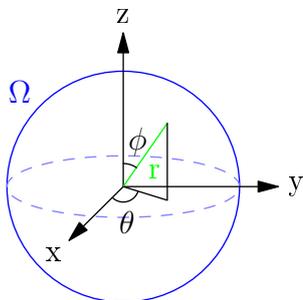
Le théorème de la divergence est la généralisation pour \mathbb{R}^3 du théorème de la divergence dans \mathbb{R}^2 (corollaire du théorème de Green §2.4.4)

Explicitement on a :

$$\underbrace{\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) \, dx dy dz}_{\text{intégrale triple d'un champ scalaire}} = \underbrace{\iint_{\partial\Omega} (F_1 \nu_1 + F_2 \nu_2 + F_3 \nu_3) \, ds}_{\text{intégrale de surface d'un champ scalaire}}$$

3.4.4 Exemples :

Exemple 1 : Vérifier le théorème de la Divergence pour la boule unité.



$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

et

$$F(x, y, z) = (xy, y, z)$$

- Calcul de $\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx dy dz$

On a :

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = y + 1 + 1 = y + 2$$

On calcul en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (r \sin \phi \sin \theta + 2) \underbrace{r^2 \sin \phi}_{|\text{jacobien}|} \, dr d\theta d\phi \\ &= \int_0^1 r^3 \, dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta}_0 \int_0^{\pi} \sin^2 \phi \, d\phi + 2 \int_0^1 r^2 \, dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \phi \\ &= 4\pi \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^1 - \cos \phi \Big|_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3} \cdot 2 = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

- Calcul de $\iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu) \, ds$

$$\partial\Omega = \Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} = \text{sphère unité}$$

Paramétrisation : $\sigma(\theta, \phi) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$ $A =]0, 2\pi[\times]0, \pi[$

voir exemple §3.1.2

$$\sigma_{\theta} \times \sigma_{\phi} = \begin{pmatrix} -\sin^2 \phi \cos \theta \\ -\sin^2 \phi \sin \theta \\ -\sin \phi \cos \phi \end{pmatrix} \text{ est une normale } \mathbf{intérieure} \text{ à } \Omega$$

Normale **unité extérieure** $\nu(\theta, \phi) = -\frac{\sigma_{\theta} \times \sigma_{\phi}}{\|\sigma_{\theta} \times \sigma_{\phi}\|}$

$$\Rightarrow \nu(\theta, \phi) \|\sigma_{\theta} \times \sigma_{\phi}\| = -\sigma_{\theta} \times \sigma_{\phi} = \begin{pmatrix} \sin^2 \phi \cos \theta \\ \sin^2 \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu) \, ds &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \iint_A F(\sigma(\theta, \phi)) \cdot \nu(\theta, \phi) \|\sigma_\theta \times \sigma_\phi\| \, d\theta d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sin^2 \phi \cos \theta \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \cdot \begin{pmatrix} \sin^2 \phi \cos \theta \\ \sin^2 \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix} d\theta d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [\sin^4 \phi \cos^2 \theta \sin \theta + \sin^3 \phi \sin^2 \theta + \cos^2 \phi \sin \phi] \, d\theta d\phi \\
\implies &\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \int_0^\pi \sin^4 \phi \, d\phi + \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta \int_0^\pi \sin^3 \phi \, d\phi + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \cos^2 \phi \sin \phi \, d\phi
\end{aligned}$$

En calculant s\u00e9par\u00e9ment, on obtient :

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta = -\frac{1}{3} \cos^3 \theta \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\theta) \, d\theta = \pi - \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta \, d\theta}_{=0} = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

$$\int_0^\pi \sin^3 \phi \, d\phi \stackrel{\text{pp}}{=} -\sin^2 \phi \cos \phi \Big|_0^\pi + 2 \int_0^\pi \sin \phi \cos^2 \phi \, d\phi = -\frac{2}{3} \cos^3 \phi \Big|_0^\pi = \frac{4}{3}$$

en ayant pos\u00e9 : $f' = \sin \phi \longrightarrow f = -\cos \phi$ $g = \sin^2 \phi \longrightarrow g' = 2 \cos \phi \sin \phi$

$$\int_0^\pi \sin \phi \cos^2 \phi \, d\phi = -\frac{1}{3} \cos^3 \phi \Big|_0^\pi = \frac{2}{3}$$

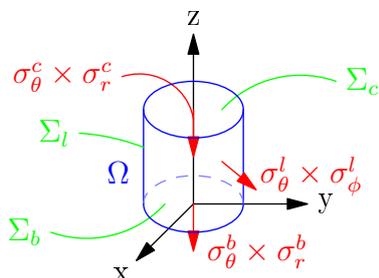
$$\implies \iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu) \, ds = 0 + \phi \cdot \frac{4}{3} + 2\phi \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

Citation de M. Cibils:

"Tous les chemins m\u00e8nent \u00e0 Rome, \u00e0 condition de prendre la bonne direction."

Exemple 2: Vérifier le théorème de la Divergence pour

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, 0 < z < 1\} \quad \text{et} \quad F(x, y, z) = (x^2, 0, z^2)$$



$$\begin{aligned} \Sigma_b &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \quad \text{et} \quad z = 0\} \\ \Sigma_c &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \quad \text{et} \quad z = 1\} \\ \Sigma_l &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq z \leq 1\} \\ \partial\Omega &= \Sigma_b \cup \Sigma_c \cup \Sigma_l \end{aligned}$$

- Calcul de $\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx dy dz$

$$\text{On a } \operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 2x + 2z$$

On calcul en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (2x + 2z) \, dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r \cos \theta + 2z) \underbrace{r}_{|\text{jacobien}|} \, dr d\theta dz \\ &= 2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta}_{=0} \int_0^1 r^2 \, dr \int_0^1 dz + 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \, dr \int_0^1 z \, dz \\ &= 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^1 \cdot \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^1 = 4\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \pi \end{aligned}$$

- Calcul de $\iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu) \, ds = \iint_{\Sigma_b} (F \cdot \nu) \, ds + \iint_{\Sigma_c} (F \cdot \nu) \, ds + \iint_{\Sigma_l} (F \cdot \nu) \, ds$

1. Paramétrisation de Σ_b : $\sigma^b(\theta, r) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0) \quad A_b =]0, 2\pi[\times]0, 1[$

$$\sigma_{\theta}^b \times \sigma_r^b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} \text{ est une normale } \mathbf{extérieure} \text{ à } \Omega$$

Normale **unité extérieure** à Ω : $\nu^b(\theta, r) = \frac{\sigma_{\theta}^b \times \sigma_r^b}{\|\sigma_{\theta}^b \times \sigma_r^b\|}$

$$\Rightarrow \nu^b(\theta, r) \|\sigma_{\theta}^b \times \sigma_r^b\| = \sigma_{\theta}^b \times \sigma_r^b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_b} (F \cdot \nu) \, ds &\stackrel{\text{déf}}{=} \iint_{A_b} F(\sigma^b(\theta, r)) \cdot \nu^b(\theta, r) \|\sigma_{\theta}^b \times \sigma_r^b\| \, d\theta dr \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \cos^2 \theta, 0, 0) \cdot (0, 0, -r) \, d\theta dr \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 0 \, d\theta dr = 0 \end{aligned}$$

2. Paramétrisation de Σ_c : $\sigma^c(\theta, r) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 1)$ $A_c =]0, 2\pi[\times]0, 1[$

$$\sigma_\theta^c \times \sigma_r^c = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} \text{ est une normale } \mathbf{intérieure} \text{ à } \Omega$$

Normale **unité extérieure** à Ω : $\nu^c(\theta, r) = -\frac{\sigma_\theta^c \times \sigma_r^c}{\|\sigma_\theta^c \times \sigma_r^c\|}$

$$\implies \nu^c(\theta, r) \|\sigma_\theta^c \times \sigma_r^c\| = -\sigma_\theta^c \times \sigma_r^c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_c} (F \cdot \nu) \, ds &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \iint_{A_c} F(\sigma^c(\theta, r)) \cdot \nu^c(\theta, r) \|\sigma_\theta^c \times \sigma_r^c\| \, d\theta dr \\ &= - \iint_{A_c} F(\sigma^c(\theta, r)) \sigma_\theta^c \times \sigma_r^c \, d\theta dr = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \cos^2 \theta, 0, 1) \cdot (0, 0, r) \, d\theta dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \, dr = 2\pi \left. \frac{1}{2} r^2 \right|_0^1 = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi \end{aligned}$$

3. Paramétrisation de Σ_l : $\sigma^l(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$ $A_l =]0, 2\pi[\times]0, 1[$
exemple 2 §3.1.2

$$\sigma_\theta^l \times \sigma_z^l = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 1 \\ \cos \theta & \sin \theta & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est une normale } \mathbf{ext\u00e9rieure} \text{ à } \Omega$$

Normale **unité extérieure** à Ω : $\nu^l(\theta, z) = \frac{\sigma_\theta^l \times \sigma_z^l}{\|\sigma_\theta^l \times \sigma_z^l\|} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\implies \|\sigma_\theta^l \times \sigma_z^l\| = 1$$

On a donc

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_l} (F \cdot \nu) \, ds &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \iint_{A_l} F(\sigma^l(\theta, z)) \cdot \nu^l(\theta, z) \|\sigma_\theta^l \times \sigma_z^l\| \, d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\cos^2 \theta, 0, z^2) \cdot (\cos \theta, \sin \theta, 0) \, d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta \, d\theta \int_0^1 dz \\ &\stackrel{\text{pp}}{=} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos^2 \theta \, d\theta}_{=0} + 2 \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{2}{3} \sin^3 \theta \Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{en posant } f' = \cos \theta \longrightarrow f = \sin \theta \quad g = \cos^2 \theta \longrightarrow g' = -2 \cos \theta \sin \theta$$

Finalement, on obtient :

$$\iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu) ds = 0 + \pi + 0 = \pi$$

- *Autres exemples : exercices 1, 2, 3 et 4 série 7*

3.5 Théorème de Stokes :

3.5.1 Motivations :

But :

Généralisation du Théorème de Green pour des champs vectoriels à valeurs dans \mathbb{R}^3 .

Rappel : (*chapitre 2 § 2.4.2*)

Théorème de Green :

Soit $B \subset \mathbb{R}^2$ un domaine **régulier** dont le bord est **orienté positivement**.
Soit

$$G : \bar{B} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto G(x, y)$$

un champ vectoriel tel que $G \in C^1(\bar{B}, \mathbb{R}^2)$.

Alors

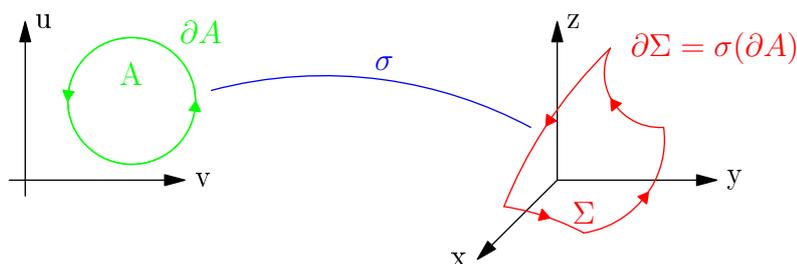
$$\underbrace{\iint_B \text{rot} G(x, y) \, dx dy}_{\text{intégrale double d'un champ scalaire}} = \underbrace{\int_{\partial B} G \cdot dl}_{\text{intégrale curviligne d'un champ vectoriel}}$$

Motivation :

Obtenir un théorème analogue en remplaçant B par une surface Σ dans \mathbb{R}^3 et G par un champ $F : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

3.5.2 Détermination du bord d'une surface et de son sens de parcours

1. Si $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ est une surface régulière et $\sigma : \bar{A} \longrightarrow \Sigma$ est une paramétrisation de Σ alors le bord de Σ (noté $\partial\Sigma$) est donné par $\partial\Sigma = \sigma(\partial A)$ et il est indépendant du choix de la paramétrisation.
2. Le sens du parcours de $\partial\Sigma$ induit par la paramétrisation Σ est celui obtenu en parcourant ∂A dans le sens positif.



3. Si ∂A est une courbe simple fermée régulière par morceaux alors $\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_m$ et pour obtenir le bord de Σ on procède de la façon suivante :

On supprime de $\sigma(\partial A)$ les courbes Γ_i qui se réduisent à un point et celles qui sont parcourues deux fois (une fois dans un sens et une fois dans l'autre).

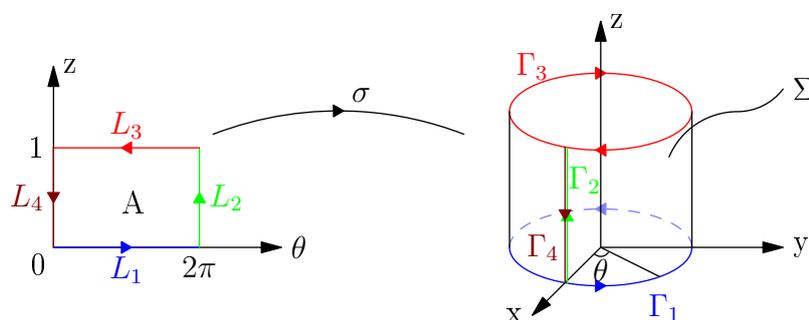
Ce qui reste après avoir appliqué ce procédé **est le bord de Σ** désigné par $\partial\Sigma$.

Exemple 1:

$$\text{Cylindre : } \Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

Paramétrisation :

$$\Sigma = \{(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z), (\theta, z) \in \bar{A}\} \quad \text{avec } A =]0, 2\pi[\times]0, 1[$$



On a

$$\begin{aligned} \sigma(\partial A) &= \sigma(L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4) \\ &= \sigma(L_1) \cup \sigma(L_2) \cup \sigma(L_3) \cup \sigma(L_4) \\ &= \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \end{aligned}$$

Déterminons les différents bords du cylindre :

$$\Gamma_1 = \{\gamma_1(\theta) = \sigma(\theta, 0) = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \text{ avec } \theta : 0 \longrightarrow 2\pi\}$$

cercle parcouru dans le sens **positif**

$$\Gamma_2 = \{\gamma_2(z) = \sigma(2\pi, z) = (1, 0, z) \text{ avec } z : 0 \longrightarrow 1\}$$

droite parcourue vers le **haut**

$$\Gamma_3 = \{\gamma_3(\theta) = \sigma(\theta, 1) = (\cos \theta, \sin \theta, 1) \text{ avec } \theta : 2\pi \longrightarrow 0\}$$

cercle parcouru dans le sens **négatif**

$$\Gamma_4 = \{\gamma_4(z) = \sigma(\theta, z) = (1, 0, z) \text{ avec } z : 1 \longrightarrow 0\}$$

droite Γ_2 parcourue vers le **bas**

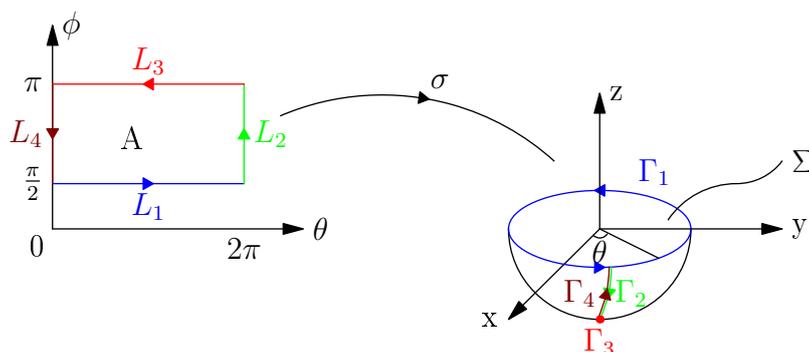
En appliquant le procédé on élimine Γ_2 et Γ_4 de $\sigma(\partial A)$ et on obtient $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_3$ avec Γ_1 orienté positivement et Γ_3 orienté négativement.

Exemple 2:

Demi-sphère inférieure : $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } z \leq 0\}$

Paramétrisation :

$$\Sigma = \{\sigma(\theta, \phi) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) : (\theta, \phi) \in \bar{A}\} \quad \text{avec} \quad A =]0, 2\pi[\times]\frac{\pi}{2}, \pi[$$



On a

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

où

$$\Gamma_i = \sigma(L_i) \text{ pour } i = 1, 2, 3, 4$$

On détermine tous les bords du domaine :

$$\Gamma_1 = \left\{ \gamma_1(\theta) = \sigma\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \text{ avec } \theta : 0 \longrightarrow 2\pi \right\}$$

qui est un cercle parcouru dans le sens **positif**

$$\Gamma_2 = \left\{ \gamma_2(\phi) = \sigma(2\pi, \phi) = (\sin \phi, 0, \cos \phi) \text{ avec } \phi : \frac{\pi}{2} \longrightarrow \pi \right\}$$

qui est un demi-arc passant par le pôle sud parcouru vers le **bas**

$$\Gamma_3 = \{\gamma_3(\theta) = \sigma(\theta, \pi) = (0, 0, -1) \text{ avec } \theta : 2\pi \longrightarrow 0\}$$

qui est un seul point : pôle sud

$$\Gamma_4 = \left\{ \gamma_4(\phi) = \sigma(0, \phi) = (\sin \phi, 0, \cos \phi) \text{ avec } \phi : \pi \longrightarrow \frac{\pi}{2} \right\}$$

qui est un demi-arc Γ_2 parcouru vers le **haut**

Citation de M. Cibils:

"Avec un plaisir non dissimulé, on enlève tout. C'est la description délicieuse d'un bord."

Procédé \implies on élimine Γ_2, Γ_3 et Γ_4 de $\sigma(\partial A)$ et on obtient :

$$\partial \Sigma = \Gamma_1 \quad \text{orienté positivement}$$

Citation de M. Cibils:

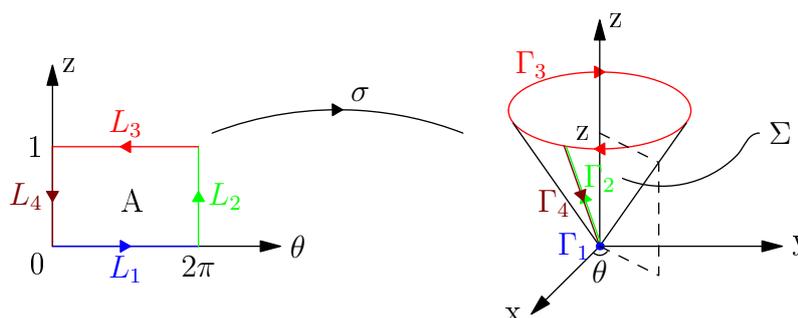
"Les nons scientifiques comprennent pas ça, mais la sphère n'a pas de bord."

Exemple 3:

$$\text{Cône : } \Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$$

Paramétrisation :

$$\Sigma = \{\sigma(\theta, z) = (z \cos \theta, z \sin \theta, z) : (\theta, z) \in \bar{A}\} \quad \text{avec } A =]0, 2\pi[\times]0, 1[$$



On a

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

où

$$\Gamma_i = \sigma(L_i) \text{ pour } i = 1, 2, 3, 4$$

Les différents bord du domaine sont :

- Γ_1 : un seul point : l'origine
- Γ_2 : droite sur le cône dans le plan (x, z) parcouru vers le haut
- Γ_3 : cercle parcouru dans le sens négatif
- Γ_4 : droite Γ_2 parcourue vers le bas

Procédé \implies éliminer Γ_1, Γ_2 et Γ_4 et on obtient $\partial\Sigma = \Gamma_3$ qui est orienté **négativement**.

Citation de M. Cibils:

"Et on passe au théorème de Stokes, deuxième moment solennel de ce cours."

3.5.3 Énoncé du Théorème de Stokes :

Théorème de Stokes :

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière par morceaux et orientable.

Soit $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel tel que $F \in C^1(\Sigma, \mathbb{R}^3)$.

Alors

$$\underbrace{\iint_{\Sigma} \text{rot} F \cdot ds}_{\text{intégrale de surface d'un champ vectoriel dans } \mathbb{R}^3} = \underbrace{\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl}_{\text{intégrale curviligne d'un champ vectoriel dans } \mathbb{R}^3}$$

Remarque 1 : Une fois choisie, la paramétrisation : $\sigma : \bar{A} \rightarrow \Sigma$

$$(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$$

On considère $\sigma_u \times \sigma_v$ comme normale dans l'intégrale de surface. C'est-à-dire :

$$\iint_{\Sigma} \text{rot} F \cdot ds \stackrel{\text{déf}}{=} \iint_A [\text{rot} F(\sigma(u, v)) \cdot (\sigma_u \times \sigma_v)] \, dudv$$

Remarque 2 : Le sens de parcours de $\partial\Sigma$ dans l'intégrale curviligne est celui induit par la paramétrisation σ (c'est-à-dire celui obtenu en parcourant ∂A positivement).

Conseil : Pour simplifier, tenir compte des notations canoniques pour l'ordre

exemple : $drd\theta dz \implies \sigma_r \times \sigma_\theta$

Citation de M. Cibils:

"Et je vous le recommande, dans la vie c'est toujours plus facile de prendre les choses positivement que négativement."

Exemple 1 : Vérifier le Théorème de Stokes pour

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\} \quad \text{et} \quad F(x, y, z) = (z, x, y)$$

• Calcul de $\iint_{\Sigma} \text{rot} F \cdot ds$ $\quad \text{rot} F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Paramétrisation de Σ : $\sigma(\theta, z) = (z \cos \theta, z \sin \theta, z)$ et $A =]0, 2\pi[\times]0, 1[$

Normale

$$\sigma_\theta \times \sigma_z = \begin{pmatrix} z \cos \theta \\ z \sin \theta \\ -z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \implies \iint_{\Sigma} \text{rot} F \cdot ds &= \iint_A [\text{rot} F(\sigma(\theta, z)) \cdot \sigma_\theta \times \sigma_z] \, d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (z \cos \theta + z \sin \theta - z) \, d\theta dz \\ &= \int_0^1 z \, dz \left[\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta}_{=0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta}_{=0} - \int_0^{2\pi} d\theta \right] = -2\pi \left. \frac{1}{2} z^2 \right|_0^1 = -\pi \end{aligned}$$

Citation de M. Cibils:

"Moi j'ai une manie, j'aime bien intégrer entre 0 et 2π . Encore une fois, celui qui tient le stylo décide !"

- Calcul de $\int_{\Sigma} F \cdot ds$

Bord du cône : $\Sigma = \{\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 1) \text{ avec } \theta : 0 \rightarrow 2\pi\}$ est orienté **négativement**.
Alors

$$\gamma'(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} F \cdot dl &= - \int_0^{2\pi} F(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) d\theta = - \int_0^{2\pi} (1, \cos \theta, \sin \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} (-\sin \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta}_{=0} - \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta = -\frac{1}{2} \left[2\pi + \underbrace{\frac{1}{2} \sin 2\theta}_{=0} \right]_0^{2\pi} = -\pi \end{aligned}$$

Citation de M. Cibils:

"Je ressort l'étendard de la réussite."

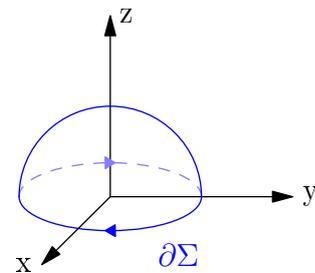
Autres exemples série 8

Exemple 2: Vérifier le Théorème de Stokes pour la demi sphère supérieure

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } z \geq 1\} \quad \text{et} \quad F(x, y, z) = (z, x, y^2)$$

- Calcul de $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$

$$\partial\Sigma = \{\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \text{ avec } \theta : 2\pi \rightarrow 0\}$$



Ce qui nous donne le bord de la demi-sphère supérieure orienté **négativement**.

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} &\stackrel{\text{d'éf}}{=} - \int_0^{2\pi} F(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) d\theta = - \int_0^{2\pi} (0, \cos \theta, \sin^2 \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) d\theta \\ &= -\frac{1}{2} 2\pi - \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta}_{=0} = -\pi \end{aligned}$$

Citation de M. Cibils:

"Je mets ma main au feu que le résultat est le même. A moins que vous ne changiez la paramétrisation, auquel cas je me brûle."

• Calcul de $\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds$ $\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} 2y \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Paramétrisation de Σ : $\sigma(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi)$ et $A =]0, 2\pi[\times]0, \frac{\pi}{2}[$

Normale

$$\sigma_{\theta} \times \sigma_{\phi} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin^2 \phi \\ -\sin^2 \phi \sin \theta \\ -\sin \phi \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds &= \iint_A [\operatorname{rot} F(\sigma(\theta, \phi)) \cdot \sigma_{\theta} \times \sigma_{\phi}] \, d\theta d\phi \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (-2 \sin^3 \phi \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \phi \sin \theta - \sin \phi \cos \phi) \, d\theta d\phi \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2} \sin^3 \phi \cos 2\theta + \sin^2 \phi \cos \theta - \sin \phi \cos \phi \right]_0^{2\pi} d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} (-\sin \phi \cos \phi) \, d\phi = \left[\frac{1}{2} \pi \cos 2\phi \right]_0^{\pi/2} = -\pi \end{aligned}$$

Deuxième partie
Analyse Complexe

Chapitre 4

Fonctions holomorphe et équations de Cauchy-Riemann :

4.1 Introduction :

4.1.1 Motivation :

But

Étendre l'étude des fonctions réelles *du type* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à des fonctions qui dépendent **d'une** variable complexe à valeur complexe *du type* $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Rôle

Établir les notions de limites, continuité, dérivabilité et intégrabilité dans \mathbb{C} .

Intérêt

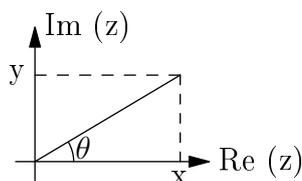
Fournir des méthodes pour calculer **facilement** des intégrales **réelles** compliquées.

Citation de M. Cibils:

"La plus grande frustration des mathématiciens est de voir une fonction réelle continue et de savoir qu'il existe une primitive, qui les regarde, sans pour autant réussir à la calculer. C'est grâce à l'analyse complexe qu'on va pouvoir conquérir ce nouveau monde."

4.1.2 Rappels sur les nombres complexes :

- \mathbb{C} désigne l'ensemble des nombres complexes.
- $z \in \mathbb{C}z = x + iy$ avec $x = \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}, y = \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$
- $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus 0$ où $0 = 0 + i0$
- Conjugué complexe : $\bar{z} = x - iy$
- Module de $z \in \mathbb{C} : |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_+$
- Représentation polaire de $z \in \mathbb{C}^* \quad z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$.



θ est appelé **l'argument** de z et noté $\operatorname{arg}z$.
L'argument est défini à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$.

Convention : pour $z \in \mathbb{C}^*$ $\operatorname{arg}z$ est l'unique angle $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\frac{z}{|z|} = \cos \theta + i \sin \theta$

4.2 Fonctions complexes :

4.2.1 Définition :

Une fonction **d'une** variable complexe à valeur dans \mathbb{C} s'écrit

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z = x + iy \mapsto f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

où

$$u: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad v: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto u(x, y) \qquad (x, y) \mapsto v(x, y)$$

sont deux fonctions à **valeur réelles** qui s'appellent respectivement la partie réelle de f *on note* $u = \text{Re}(f)$ et la partie imaginaire de f *on note* $v = \text{Im}(f)$.

Remarque : Les variables $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ des fonctions u et v **sont** les parties réelles et imaginaires de la variable $z \in \mathbb{C}$ de la fonction f .

4.2.2 Exemples :

Exemple 1:

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z = x + iy \mapsto f(z) = \bar{z} = x - iy$$

On a $u(x, y) = x$ et $v(x, y) = -y$

Exemple 2:

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z = x + iy \mapsto f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

On a $u(x, y) = x^2 - y^2$ et $v(x, y) = 2xy$

Exemple 3:

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z = x + iy \mapsto f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

On a $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ et $v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$

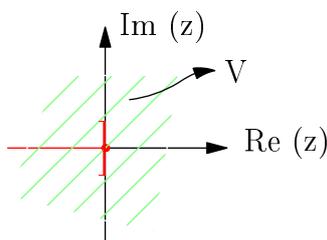
Exemple 4: Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ la **fonction exponentielle** est définie par :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \in \mathbb{C}^*$$

On a $u(x, y) = e^x \cos y$ et $v(x, y) = e^x \sin y$

Remarque : Contrairement au cas réel, e^z n'est pas bijective sur \mathbb{C} car $e^{z+2ik\pi} = e^z \forall k \in \mathbb{Z}$ *exercice 1 série 9.*

Exemple 5: Soit $V = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0 \text{ et } \text{Re}(z) \leq 0\}$



Pour $x \in V$ la **fonction logarithme** est définie par $\log z = \ln|z| + i \arg(z)$ avec la convention de choisir $\arg(z) \in]-\pi, \pi[$.

En écrivant $z = x + iy$ on a $u(x, y) = \ln|z| = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ et $v(x, y) = \arg(z)$

Remarque : Les choix de l'ensemble V et de l'intervalle $] - \pi, \pi[$ garantissent la continuité et la bijectivité de $\log(z)$. Cette fonction ainsi définie s'appelle "*la détermination principale du logarithme*".

Exemple 6:

Pour $z \in \mathbb{C}$ les fonctions trigonométriques et hyperboliques sont définies par :

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} & \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} & \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \end{aligned}$$

exercice 2 série 9

4.3 Limites, continuité et dérivabilité :

4.3.1 Définitions :

- Les notions de topologie *ouvert, fermé etc...* de limite, de continuité et de dérivabilité sont analogue à celles de l'analyse réelle.
- En particulier f est dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$ si $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe et est finie. La limite est appelée la dérivée de f en z_0 et notée $f'(z_0)$. Les règles de dérivation établies dans \mathbb{R} sont valables dans \mathbb{C} .
- Étant donné un ouvert $V \subset \mathbb{C}$ on dit que la fonction $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ est **holomorphe** ou **analogue complexe dans V** si f est **définie et dérivable** $\forall z \in \mathbb{C}$.

4.3.2 Équations de Cauchy-Riemann :

Remarque : abus de notation :

Étant donné un ouvert $V \subset \mathbb{C}$, on l'identifie souvent au sous-ensemble correspondant de \mathbb{R}^2 . C'est-à-dire qu'on écrira $\underbrace{z}_{\in \mathbb{C}} = x + iy \in V$ où $\underbrace{(x, y)}_{\in \mathbb{R}^2} \in V$ de façon équivalente.

Citation de M. Cibils:

"On peut se permettre de faire des bêtises à condition d'avoir conscience qu'on en fait."

Théorème : Soit $V \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit une fonction

$$\begin{aligned} f : V &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z = x + iy &\mapsto f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} u : V &\longrightarrow \mathbb{R} & v : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy)) & (x, y) &\mapsto v(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy)) \end{aligned}$$

Sont respectivement les parties réelles et imaginaires de f . Alors les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

1. f est holomorphe dans V
2. les fonctions $u, v \in C^1(V)$ et satisfont les équations de Cauchy-Riemann donnés par :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

pour tout $(x, y) \in V$

En particulier, si f est holomorphe dans V , alors on a :

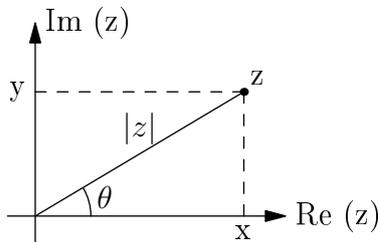
$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \quad (4.1)$$

pour tout $z = x + iy \in V$

Remarque 1 : Utilité du Théorème : donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit holomorphe dans un ouvert V . Il faut et il suffit que les équations de Cauchy-Riemann pour $u = \text{Re}(f) \in C^1$ et $v = \text{Im}(f) \in C^1$ soient satisfaites dans V .

Remarque 2 : On écrit souvent $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ et $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$; $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$ et $v_y = \frac{\partial v}{\partial y}$.
Les équations de Cauchy-Riemann sont : $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$.

Remarque 3 : Les équations de Cauchy-Riemann et la formule 4.1 donnant $f'(z)$ se démontrent avec l'hypothèse :



$$f \text{ holomorphe dans } V \implies f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existent pour tout $z_0 \in V$

4.3.3 Exemples :

Exemple 1 : $f(z) = z^2$ définie pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(z) &= (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy \implies u(x, y) = x^2 - y^2 \text{ et } v(x, y) = 2xy \\ u_x(x, y) &= 2x & u_y(x, y) &= -2y \\ v_x(x, y) &= 2y & v_y(x, y) &= 2x \implies u_x = v_y & u_y &= -v_x \end{aligned}$$

Cauchy-Riemann est satisfaite $\implies f$ holomorphe dans \mathbb{C}

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z$$

Exemple 2 : $f(z) = \bar{z}$ définie pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \overline{(x + iy)} = x - iy \implies u(x, y) = x \text{ et } v(x, y) = -y \\ u_x(x, y) &= 1 & u_y(x, y) &= 0 \\ v_x(x, y) &= 0 & v_y(x, y) &= -1 \implies u_x \neq v_y & u_y &= v_x \end{aligned}$$

Cauchy-Riemann n'est pas satisfaite $\implies f$ n'est pas holomorphe dans \mathbb{C}

Exemple 3 : $f(z) = e^z$ définie pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y \implies u(x, y) = e^x \cos y \text{ et } v(x, y) = e^x \sin y \\ u_x(x, y) &= e^x \cos y & u_y(x, y) &= -e^x \sin y \\ v_x(x, y) &= e^x \sin y & v_y(x, y) &= e^x \cos y \implies u_x = v_y & u_y &= -v_x \end{aligned}$$

Cauchy-Riemann est satisfaite $\implies e^z$ est holomorphe dans \mathbb{C}

$$f'(z) = u_x(x + y) + iv(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$$

Exemple 4: $f(z) = \log(z) = \ln|z| + i \arg(z)$ définie pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$

On montre que $\log(z)$ est holomorphe dans

$$V = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = 0 \text{ et } \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$$

De plus, on a :

$$f'(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in V$$

Autres exemples : ex 2 à 5 série 9

Chapitre 5

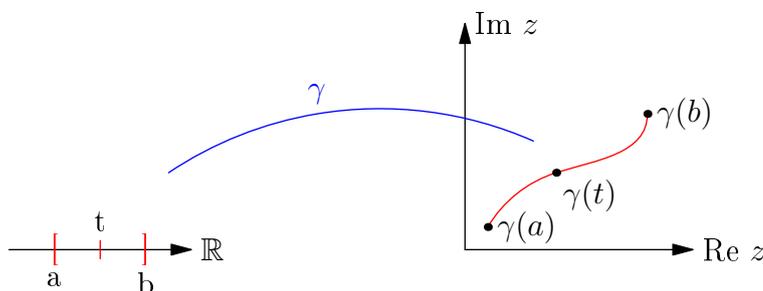
Théorème et formule intégrale de Cauchy

5.1 Intégration complexe :

5.1.1 Notations et définitions :

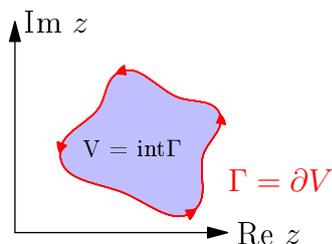
- On note $\Gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe simple régulière (par morceaux) du plan complexe et

$$\begin{aligned} \gamma : [a, b] &\longrightarrow \Gamma \subset \mathbb{C} \\ t \in \mathbb{R} &\mapsto \gamma(t) \in \mathbb{C} \end{aligned}$$



En analyse complexe, par abus de langage et de notation, on identifie souvent la courbe Γ et sa paramétrisation. On dit "soit γ une courbe ..." au lieu de dire "soit Γ une courbe...".

- Si $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est une courbe simple **fermée** régulière (par morceau) de paramétrisation γ , on note $\text{int } \Gamma$ (ou aussi $\text{int } \gamma$) l'ensemble ouvert borné $V \subset \mathbb{C}$ dont le bord est Γ (c-à-d $\partial V = \Gamma$).



γ est orientée positivement si le sens de son parcours laisse $\text{int } \gamma$ à gauche.

- Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe simple régulière de paramétrisation

$$\begin{array}{lll} \gamma : [a, b] &\longrightarrow \Gamma & \text{et soit} & f : \Gamma &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \gamma(t) & & z &\mapsto f(z) \end{array}$$

L'intégrale de f le long de Γ est définie par

Intégrale de f le long de Γ :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz \stackrel{\text{déf}}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

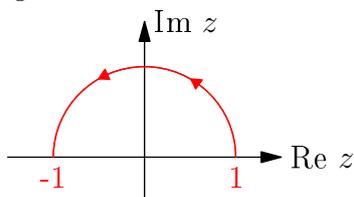
où le fait de remplacer Γ par γ est un abus de notation.

- Si $\Gamma = \bigcup_{k=1}^n \Gamma_k$ est simple régulière (par morceaux), alors

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} f(z) dz$$

5.1.2 Exemples

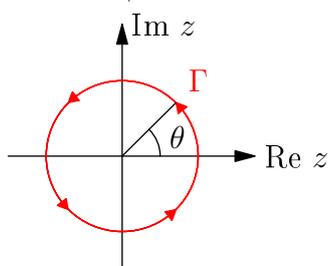
Exemple 1 : Calculer $\int_{\gamma} f(z) dz$ pour $f(z) = z^2$ et γ : demi-cercle supérieur de rayon 1 centré à l'origine.



$$\begin{aligned} \gamma : [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\mapsto \gamma(\theta) = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \\ \gamma'(\theta) &= -\sin \theta + i \cos \theta = i(\cos \theta + i \sin \theta) = ie^{\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^{\pi} f(\gamma(\theta))\gamma'(\theta) d\theta = \int_0^{\pi} (e^{i\theta})^2 ie^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_0^{\pi} e^{3i\theta} d\theta = \frac{1}{3} e^{3i\theta} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{3} [e^{3i\pi} - 1] = \frac{1}{3} (-1 - 1) = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Exemple 2 : Calculer $\int_{\gamma} f(z) dz$ pour $f(z) = \frac{1}{z}$ et γ le cercle de rayon 1 centré à l'origine



$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\mapsto \gamma(\theta) = e^{i\theta} \\ \gamma'(\theta) &= ie^{i\theta} \end{aligned}$$

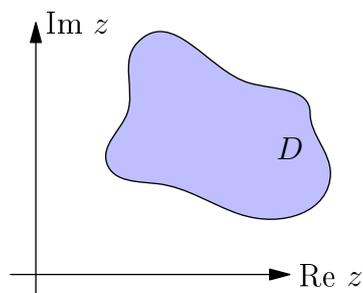
$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(\theta))\gamma'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta = 2\pi i$$

5.2 Théorème de Cauchy

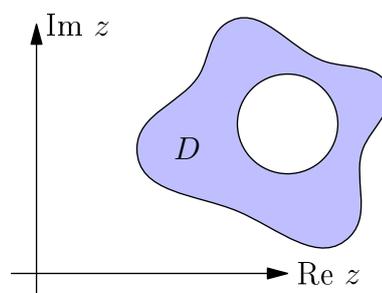
5.2.1 Énoncé du théorème de Cauchy :

- **Terminologie :**

On appelle **domaine simplement connexe** un ensemble ouvert $D \subset \mathbb{C}$ qui "n'a pas de trous".



Simply connected



Not simply connected

Théorème de Cauchy : Soit D un domaine simplement connexe,

$$f: D \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto f(z)$$

une fonction **holomorphe** dans D et γ une courbe simple **fermée** régulière (par morceaux) telle que $\gamma \subset D$ (c-à-d : γ contenue dans D) alors :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

5.2.2 Exemples :

Exemple 1 : $D = \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ holomorphe dans \mathbb{C} et γ une courbe simple **fermée** régulière par morceaux quelconque dans \mathbb{C} donc

$$\text{Théorème de Cauchy} \implies \int_{\gamma} z^2 dz = 0$$

Par exemple, si $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$ (cercle unité centré à l'origine) on a bien

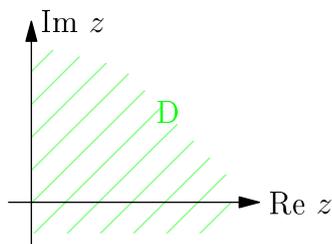
$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^2 dz &= \int_0^{2\pi} (e^{i\theta})^2 d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{2i\theta} d\theta = \frac{1}{3} e^{3i\theta} \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{3} [e^{6i\pi} - 1] = \frac{1}{3}(1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

Exemple 2 :

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

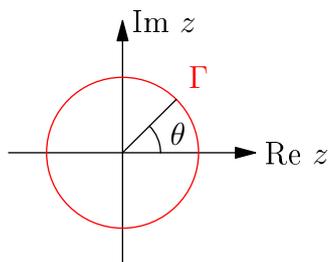
- $D = \mathbb{C}$ Le théorème ne s'applique pas car f n'est pas holomorphe en $z = 0$.
- $D = \mathbb{C}^*$ Le théorème ne s'applique pas car D n'est pas simplement connexe.

c) $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$



Le théorème s'applique car D est simplement connexe et $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe sur D .

Théorème de Cauchy $\implies \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 0$ où $\gamma \subset D$ et (par exemple) le cercle unité centré en $z = 2$



Vérification

$$\begin{aligned} \gamma(\theta) &= 2 + e^{i\theta} \\ \gamma'(\theta) &= ie^{i\theta} \quad \text{avec } \theta \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + e^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta = \log(2 + e^{i\theta}) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \log(2 + e^{2i\pi}) - \log(2 + e^{i0}) = \log 3 - \log 3 = 0 \end{aligned}$$

5.3 Formule intégrale de Cauchy

5.3.1 Énoncé

Formule intégrale de Cauchy : Soit $D \subset \mathbb{C}$ simplement connexe, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans D et $\gamma \subset D$ une courbe simple fermée régulière (par morceaux) orientée positivement. Alors

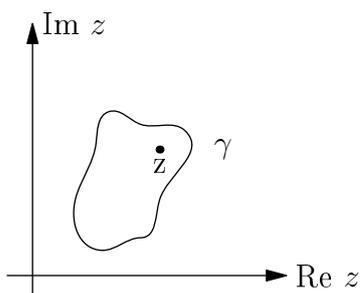
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad \forall z \in \operatorname{int} \gamma$$

Citation de M. Cibils:

"Le xi grecque c'est un serpent qui se tortille. Voilà la formule de l'intégrale de Cauchy... Je vous laisse l'apprécier."

Illustration

$D \subset \mathbb{C}$



Si f est holomorphe dans \mathbb{C} , la valeur de la fonction f en un point $z \in \mathbb{C}$ s'obtient en intégrant $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ le long de n'importe quelle courbe fermée orientée positivement telle que $z \in \operatorname{int} \gamma$.

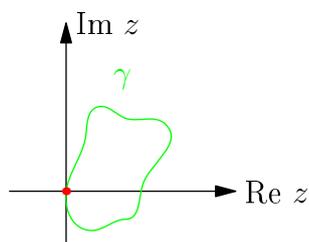
5.3.2 Exemples d'utilisations :

Exemple 1: Soit γ une courbe simple fermée régulière (par morceaux). Discuter en fonction de γ la valeur de l'intégrale

$$\int_{\gamma} \frac{\cos 2z}{z} dz$$

Remarque : la fonction $g(z) = \frac{\cos 2z}{z}$ n'est pas définie en $z = 0 \implies$ distinction de plusieurs cas.

1. $0 \in \gamma$



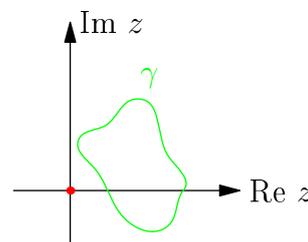
L'intégrale n'est pas définie puisque $g(z) = \frac{\cos 2z}{z}$ possède une singularité en $z = 0$.

Citation de M. Cibils:

"Quand je vois une singularité, je pose le stylo et je m'éloigne. Je ne touche pas à ça."

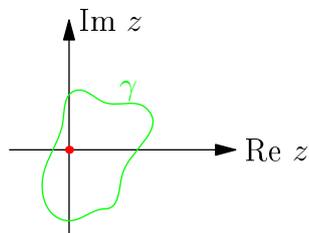
2. $0 \notin \overline{\text{int}\gamma}$

La fonction $g(z) = \frac{\cos 2z}{z}$ est holomorphe dans un domaine simplement connexe D telle que $\overline{\text{int}\gamma} \subset D$.



Comme $\gamma \subset \overline{\text{int}\gamma}$ alors le théorème de Cauchy s'applique à g (§5.2.1) et on obtient $\int_{\gamma} \frac{\cos 2z}{z} dz = 0$ pour tous γ de ce type.

3. $0 \in \text{int}\gamma$



La fonction $f(\xi) = \cos 2\xi$ est holomorphe dans \mathbb{C} . Comme $\gamma \subset \mathbb{C}$ en lui appliquant la formule de Cauchy (§5.3.1) pour $z = 0$ (et $D = \mathbb{C}$).

On trouve

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\cos 2\xi}{\xi - 0} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\cos 2\xi}{\xi} d\xi \\ &\implies \int_{\gamma} \frac{\cos 2\xi}{\xi} d\xi = 2\pi i f(0) = 2\pi i \end{aligned}$$

pour toute courbe γ orientée positivement de ce type.

Avantage : Pour le cercle unité centré à l'origine $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ avec $\theta = [0, 2\pi]$ exemple de courbe du 3^e cas le calcul direct de l'intégrale serait :

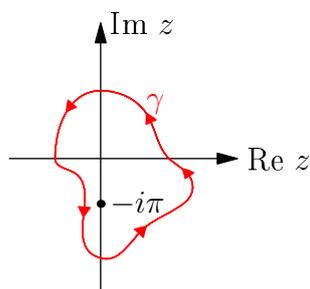
$$\int_{\gamma} \frac{\cos 2z}{2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2e^{i\theta})}{e^{i\theta}} d\theta = i \int_0^{2\pi} \cos(2e^{i\theta}) d\theta \quad \text{Laborieux, voir impossible à faire}$$

Exemple 2 : Soit γ une courbe simple fermée régulière (par morceaux). Calculer en fonction de γ l'intégrale

$$\int_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{z+i\pi} dz$$

La fonction $g(z) = \frac{e^{z^2}}{z+i\pi}$ n'est pas définie en $z = -i\pi$

1. $-i\pi \in \gamma$: L'intégrale n'est pas définie car $g(z) = \frac{e^{z^2}}{z+i\pi}$ possède une singularité en $z = -i\pi \in \gamma$
2. $-i\pi \notin \overline{\text{int}\gamma}$ La fonction $g(z) = \frac{e^{z^2}}{z+i\pi}$ est holomorphe dans un domaine simplement connexe D tel que $D \subset \overline{\text{int}\gamma}$. Comme $\gamma \subset \overline{\text{int}\gamma} \subset D$ alors le Théorème de Cauchy s'applique à g et on trouve $\int_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{z+i\pi} dz = 0$ pour tous γ de ce type.
3. $-i\pi \in \text{int}\gamma$ La fonction $f(\xi) = e^{\xi^2}$ est holomorphe dans \mathbb{C} . Comme $\gamma \subset \mathbb{C}$ en lui appliquant la formule de Cauchy pour $z = -i\pi$ et $D = \mathbb{C}$, on trouve :



$$\begin{aligned} f(-i\pi) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{\xi^2}}{\xi+i\pi} d\xi \\ \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{e^{\xi^2}}{\xi+i\pi} d\xi &= 2i\pi f(-i\pi) = 2i\pi e^{(i\pi)^2} = 2i\pi e^{-\pi^2} \end{aligned}$$

Conclusion

$$\int_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{z+i\pi} dz = 2i\pi e^{-\pi^2}$$

Pour toute courbe γ orientée positivement de ce type.

Autres exemples exercices 2, 3 et 4 série 10

5.3.3 Corollaire de la formule intégrale de Cauchy :

Énoncé :

Corollaire de la formule intégrale de Cauchy : Avec les mêmes hypothèses : Soit $D \subset \mathbb{C}$ simplement connexe, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans D et $\gamma \subset D$ une courbe simple fermée régulière (par morceaux) orientée positivement.

On a :

1. f est infiniment dérivable dans D .
- 2.

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall z \in \text{int}\gamma$$

Remarque 1 : Pour $n = 0$ le corollaire redonne la formule intégrale de Cauchy.

$$f(z) = f^{(0)}(z) = \frac{0!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (0! = 1)$$

Citation de M. Cibils:

"C'est vraiment remarquable. Dans votre langage, je dirais : C'est un truc de ouf!"

Remarque 2 : Résultat remarquable :

Le corollaire affirme qu'une fonction holomorphe sur D est en fait infiniment dérivable et que sa n -ième dérivée s'obtient en dérivant n fois par rapport à z sous l'intégrale de la formule de Cauchy.

En effet :

$$f^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi) \left[\frac{f(\xi)}{\xi - z} \right]' d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

$$f^{(2)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi) \left[\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \right]' d\xi = \frac{2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi$$

$$f^{(3)}(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi) \left[\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} \right]' d\xi = \frac{2 \cdot 3}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^4} d\xi$$

$$f^{(4)}(z) = \frac{2 \cdot 3}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi) \left[\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^4} \right]' d\xi = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^5} d\xi$$

⋮

Récurrence :

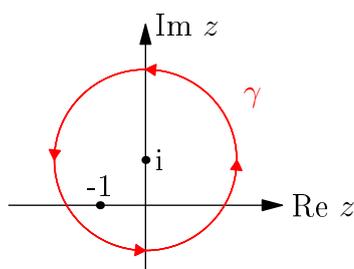
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

5.3.4 Exemple d'utilisation :

Exemple 1: Calculer $\int_{\gamma} \frac{ze^{3z+5}}{(z+1)^3} dz$ où $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 2\}$

Remarque 1 : La fonction $g(z) = \frac{ze^{3z+5}}{(z+1)^3}$ n'est pas définie en $z = -1$

Remarque 2 : γ est le cercle de rayon 2 centré en $z_0 = i$.



On considère γ orienté positivement et la fonction $f(\xi) = \xi e^{3\xi+5}$ qui est holomorphe dans \mathbb{C} .

Une fonction est holomorphe lorsqu'elle est une combinaison linéaire, un produit ou une puissance de fonctions élémentaires holomorphes.

En appliquant à f le corollaire de la formule de Cauchy pour $z = -1$ et $d = \mathbb{C}$, on obtient

$$f''(-1) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\xi e^{3\xi+5}}{(\xi + 1)^3} d\xi \implies \frac{\xi e^{3\xi+5}}{(\xi + 1)^3} d\xi = \pi i f''(-1)$$

Mais

$$\begin{aligned}f'(\xi) &= (\xi e^{3\xi+5})' = e^{3\xi+5} + 3\xi e^{3\xi+5} \\f''(\xi) &= 3e^{3\xi+5} + 3e^{3\xi+5} + 9\xi e^{3\xi+5} \implies f''(-1) = -3e^2\end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\gamma} \frac{ze^{3z+5}}{(z+1)^3} dz = -3\pi i e^2$$

Autres exemples exercices 1 à 4 série 11

Chapitre 6

Série de Laurent, pôles et résidus

6.1 Polynôme et série de Taylor d'une fonction holomorphe :

6.1.1 Définitions et résultats :

Hypothèse :

soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans D et $z_0 \in D$.
 $z \mapsto f(z)$

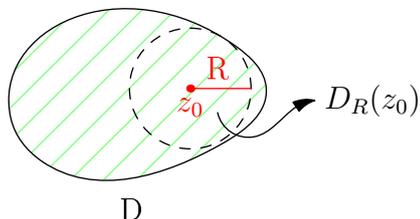
Définition : pour $n \in \mathbb{N}$, le polynôme de Taylor de f de degré N au voisinage de z_0

Polynôme de Taylor de f de degré N au voisinage z_0 :

$$T_N f(z) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Résultat : séries de Taylor

Soit $R > 0$ et $D_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ le plus grand disque de rayon R centré en z_0 et contenu dans D



Convention

Si $D = \mathbb{C} \rightarrow R = +\infty$ et $D_R(z_0) = \mathbb{C}$

Série de Taylor :

$$Tf(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} T_N f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Existe et est finie pour tout $z \in D_R(z_0)$. L'expression $Tf(z)$ s'appelle la **série de Taylor** de f au voisinage de z_0

De plus, on a $f(z) = Tf(z) \forall z \in D_R(z_0)$ et R s'appelle le **rayon de convergence** de la série de Taylor.

Coefficients de la série de Taylor : Les coefficients de la série de Taylor sont reliés à la formule de Cauchy par le corollaire.

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

où $\gamma \subset D_R(z_0)$ est une courbe simple fermée régulière (par morceaux) orientée positivement telle que $z_0 \in \text{int } \gamma$

Citation de M. Cibils:

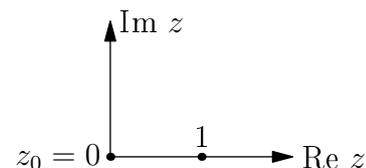
"J'ai lu vos commentaires sur le cours et j'ai été touché, mais... je les dédie à l'Analyse, c'est elle qui est responsable de tous ça."

6.1.2 Exemples :

Exemple 1: $f(z) = e^z$ est holomorphe dans \mathbb{C} . On a $f^{(n)}(z) = e^z$ et $f^{(n)}(0) = 1 \forall n \in \mathbb{N}$. Donc

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Exemple 2: $f(z) = \frac{1}{1-z}$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.



Le plus grand disque centré en $z_0 = 0$ et contenu dans D est $D_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. On a

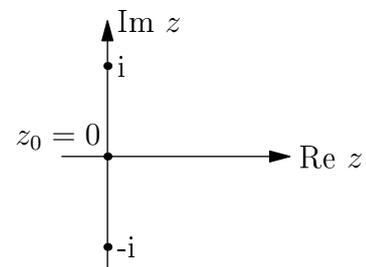
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \text{ et } f^{(n)}(0) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{avec } |z| < 1$$

C'est la série géométrique.

Exemple 3: $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ est holomorphe dans $D = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$.



Le plus grand disque centré en $z_0 = 0$ et contenu dans D est $D_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Donc

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{avec } |z| < 1$$

La troisième égalité est possible grâce à l'exemple 2, la série géométrique telle que :

$$|-z^2| < 1 \iff |z| < 1$$

Autre exemple exercice 5 série 11

6.2 Développement et série de Laurent d'une fonction holomorphe

6.2.1 Motivations, définitions et résultats :

Le développement de Taylor d'une fonction f donne seulement une **série entière** en puissance positives de $(z - z_0)$ au voisinage d'un point z_0 où f est holomorphe.

But :

obtenir un développement en puissances **positives** et **négatives** de $z - z_0$ où z_0 peut être une **singularité** de f .

Hypothèse :

soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe, $z_0 \in D$ et $f : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction
 $z \mapsto f(z)$

holomorphe dans $D \setminus \{z_0\}$

Définition : pour $n \in \mathbb{N}$, le développement de degré N de Laurent de f du voisinage de z_0 est :

Développement de f de degré N de Laurent au voisinage de z_0 :

$$\begin{aligned} L_N f(z) &= \sum_{n=-N}^N c_n (z - z_0)^n \\ &= \frac{c_{-N}}{(z - z_0)^N} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_N(z - z_0)^N \end{aligned}$$

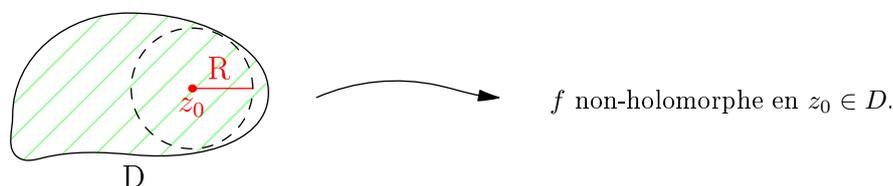
Avec

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

où $\gamma \subset D$ est une courbe simple fermée régulière (par morceaux) orientée positivement telle que $z_0 \in \text{int} \gamma$.

Résultat : Série de Laurent

Soit $R > 0$ et $D_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$, le plus grand disque de rayon R centré en z_0 et contenu dans D



Série de Laurent :

1.

$$Lf(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} L_N f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

existe et est finie $\forall D_R(z_0) \setminus \{z_0\}$

2. De plus, on a $f(z) = Lf(z) \forall z \in D_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ et R s'appelle le **rayon de convergence** de la série de Laurent.

Remarque 1 : La série de Laurent de f peut s'écrire sous la forme :

$$Lf(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

On voit donc qu'on a deux séries différentes :

La première série

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} \\ &= \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \dots \end{aligned}$$

s'appelle la **partie singulière** de la série de Laurent.

La deuxième série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots$$

s'appelle la **partie régulière** de la série de Laurent.

Remarque 2 : Si $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe en z_0 alors la série de Laurent coïncide avec la série de Taylor.

La partie singulière de la série de Laurent est nulle puisque par définition pour $n = 1, 2, \dots$ on a

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{-n+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi)(\xi-z_0)^{n-1} d\xi = 0 \quad \text{Théorème de Cauchy}$$

Car $f(\xi)(\xi-z_0)^{n-1}$ est holomorphe dans D ($n-1 > a$).

Les coefficients de la partie régulière donnent la série de Taylor puisque par définition pour $n = 0, 1, 2, \dots$ on a

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{car } f(\xi) \text{ est holomorphe dans } D$$

Par le corollaire de la formule de Cauchy.

6.2.2 Définition issues de la série de Laurent :

Définition 1: $z_0 \in \mathbb{C}$ est un **point régulier** de $f \iff$ partie singulière de la série de Laurent de f au voisinage de z_0 est **nulle**. C'est-à-dire

Point régulier :

$$Lf(z) = Tf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

Définition 2: Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $z_0 \in \mathbb{C}$ est un **pôle d'ordre m** de $f \iff c_{-m} \neq 0$ et $c_{-k} = 0$ pour tout $k \geq m + 1$. C'est-à-dire

Pôle d'ordre m :

$$Lf(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Définition 3: $z_0 \in \mathbb{C}$ est une **singularité essentielle (isolée)** de $f \iff c_{-k} \neq 0$ pour une infinité d'indices k . C'est-à-dire

Singularité essentielle :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Définition 4: Le **résidu de f en z_0** , noté $\text{Rés}_{z_0}(f)$, est la valeur du coefficient c_{-1} de la série de Laurent de f au voisinage de z_0 . C'est-à-dire

Résidu de f :

$$\text{Rés}_{z_0}(f) \stackrel{\text{déf}}{=} c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi) d\xi \quad \text{où } \gamma \subset D \text{ avec } z_0 \in \text{int}\gamma$$

6.2.3 Exemples :

Exemple 1: Soit $f(z) = \frac{1}{z}$ définie dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

a) Au voisinage de $z_0 = 0$

$$Lf(z) = \frac{1}{z} + 0$$

Partie singulière ———— Partie régulière

$\implies c_{-1} = 1$ et $c_{-n} = 0$ pour tout $n \geq 2 \implies z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 1 de f et $\text{Rés}_0(f) = c_{-1} = 1$

Rappel : série géométrique

$$\frac{1}{1 - w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \quad \text{pour } w \in \mathbb{C} \text{ tel que } |w| < 1$$

b) Au voisinage de $z_0 = 1$ on a

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 - (1 - z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - z)^n = \underbrace{\sum_{z=0}^{\infty} (-1)^n (1 - z)^n}_{\text{partie régulière}} = Tf(z) = Lf(z)$$

La série de Laurent coïncide avec la série de Taylor. La partie singulière est nulle $\implies z_0 = 1$ est un **point régulier** de f et $\text{Rés}_1(f) = 0$

Exemple 2: Soit $f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Au voisinage de z_0 on a

$$Lf(z) = \underbrace{\frac{1}{z^3} + \frac{2}{z}}_{\text{Partie singulière}} + \underbrace{0}_{\text{Partie régulière}}$$

On a $c_{-1} = 2, c_{-2} = 0, c_{-3} = 1$ et $c_n = 0$ pour $n \geq 4 \implies z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 3 de f et $\text{Rés}_0(f) = c_{-1} = 2$

Exemple 3: Soit $f(z) = \frac{1}{z^2+z}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0\}$

Au voisinage de $z_0 = 0$ on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2+z} &= \frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} z^n = Lf(z) \\ &\underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{Partie singulière}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} z^n}_{\text{Partie régulière}} \end{aligned}$$

$\implies c_{-1} = 1$ et $c_{-n} = 0$ pour tout $n \geq 2 \implies z_0$ est un pôle d'ordre 1 de f et $\text{Rés}_0(f) = c_{-1} = 1$

Exemple 4: Soient $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ et $g(z) = \frac{\cos z}{z}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

a)

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{z} &= \frac{1}{z} \sin z = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} \\ &= \underbrace{0}_{\text{Partie singulière}} + \underbrace{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots}_{\text{Partie Régulière}} = Lf(z) \end{aligned}$$

La partie singulière est nulle $\implies z_0 = 0$ est un **point régulier** de f et $\text{Rés}_0(f) = c_{-1} = 0$ ($z_0 = 0$ est une singularité éliminable).

b)

$$\begin{aligned} \frac{\cos z}{z} &= \frac{1}{z} \cos z = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n)!} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n)!} = \underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{Partie singulière}} - \underbrace{\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots}_{\text{Partie régulière}} = Lg(z) \end{aligned}$$

On a $c_{-1} = 1$ et $c_{-n} = 0$ pour tout $n \geq 2 \implies z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 1 de g et $\text{Rés}_0(g) = c_{-1} = 1$

Exemple 5: Soit $f = e^{\frac{1}{z}}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \underbrace{1}_{\text{Partie régulière}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}}_{\text{Partie singulière}} = Lf(z)$$

On a $c_{-n} = \frac{1}{n!}$ pour tout $n \geq 1 \implies z_0 = 0$ **singularité essentielle** de f et $\text{Rés}_0(f) = \frac{1}{1!} = 1$

Remarque : On ne l'a pas fait pour les exemples précédents, dans le but de les alléger, mais on doit toujours définir le rayon de convergence pour les séries de Laurent.

Autres exemples : exercices 1, 2 et 3 série 13

6.2.4 Détection des pôles, détermination de l'ordre et formules de calcul du résidu

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $z_0 \in \mathbb{C}$ est un zéro d'ordre n d'une fonction f lorsque

$$f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0 \text{ mais } f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

Méthodes d'études :

a) Soit $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ où p et q sont des fonctions holomorphes au voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$ qui est un zéro d'ordre k de p et un zéro d'ordre l de q . Deux cas possibles :

Cas 1. si $l > k$ alors z_0 est un **pôle d'ordre $l - k$ de f** .

Cas 2. si $l \leq k$ alors z_0 est un **point régulier de f** .

On dit que z_0 est une singularité éliminable de f en posant $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{p(z)}{q(z)}$

b) Soit f une fonction holomorphe dans $D \setminus \{z_0\}$, $m \in \mathbb{N}^*$ et

$$Lf(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^m f(z)]$$

Si L est fini et $L \neq 0 \implies L \in \mathbb{R}^*$ alors z_0 est un pôle d'ordre m de f .

Exemple 1: $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ et $z_0 = 0$. Avec $p(z) = \sin z$ et $q(z) = z$.

On a

$$p(0) = \sin 0 = 0, \quad p'(0) = \cos 0 = 1, \quad q(0) = 0, \quad q'(0) = 1$$

Alors $k = l = 1$ et donc $z_0 = 0$ est un point régulier de f . $z_0 = 0$ est une singularité éliminable en posant :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Exemple 2: $f(z) = \frac{z}{\sin^2 z}$ et $z_0 = 0$. Avec $p(z) = z$ et $q(z) = \sin^2 z$.

On a

$$p(0) = 0, \quad p'(0) = 1, \quad q(0) = 0, \quad q'(0)|_{z=0} = 2 \sin z \cos z|_{z=0} = 0, \quad q''(0) = 2 \cos(2 \cdot 0) = 2$$

$k = 1$ et $l = 2$ $l > k \implies z_0 = 0$ est un pôle d'ordre $l - k = 2 - 1 = 1$.

Exemple 3: $f(z) = \frac{\sin(\pi - z)}{(z - \pi)^3}$ $z_0 = \pi$ est un pôle d'ordre 2 de f car pour $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{z \rightarrow \pi} [(z - \pi)^m f(z)] = \lim_{z \rightarrow \pi} \left[(z - \pi)^m \frac{\sin(z - \pi)}{(z - \pi)^3} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow \pi} [(z - \pi)^{m-3} \sin(z - \pi)] = \begin{cases} \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{1}{z - \pi} \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{\sin(z - \pi)}{z - \pi} = \infty & \text{si } m = 1 \\ \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{\sin(z - \pi)}{z - \pi} = 1 & \text{si } m = 2 \\ \lim_{z \rightarrow \pi} (z - \pi)^{m-3} \lim_{z \rightarrow \pi} \sin(z - \pi) = 0 & \text{si } m \leq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Formules de calcul du résidu d'une fonction :

- a) Soit f une fonction holomorphe dans $D \setminus \{z_0\}$ et soit $m \in \mathbb{N}^*$. Si z_0 est un pôle d'ordre m de f alors

$$\text{Rés}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]$$

- b) Soit $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ où p et q sont deux fonctions holomorphes au voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$ telles que z_0 est un zéro d'ordre 1 de q et $p(z_0) \neq 0$. Alors

$$\text{Rés}_{z_0}(f) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Exemple 1: $f(z) = \frac{3z^2}{z+2}$ alors $z_0 = -2$ est un pôle d'ordre 1 de f .

$$\implies \text{Rés}_{-2}(f) = \lim_{z \rightarrow -2} \left[(z+2) \frac{3z^2}{z+2} \right] = \lim_{z \rightarrow -2} [3z^2] = 12$$

Exemple 2: $f(z) = \frac{e^z}{(z-5)^3}$ alors $z_0 = 5$ est un pôle d'ordre 3 de f .

$$\implies \text{Rés}_5(f) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 5} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z-5)^3 \frac{e^z}{(z-5)^3} \right] = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 5} e^z = \frac{e^5}{2}$$

Citation de M. Cibils:

"La formule tue, de manière civilisée, la singularité"

Exemple 3: $f(z) = \frac{\sin z}{z^2+1}$ Comme $z^2+1 = (z-i)(z+i)$ alors $z_0 = i$ et $z_0 = -i$ sont des pôles d'ordre 1 de f .

$$\begin{aligned} \implies \text{Rés}_i(f) &= \lim_{z \rightarrow i} \left[(z-i) \frac{\sin z}{(z-i)(z+i)} \right] = \frac{\sin i}{2i} \\ \text{Rés}_{-i}(f) &= \lim_{z \rightarrow -i} \left[(z+i) \frac{\sin z}{(z-i)(z+i)} \right] = \frac{\sin(-i)}{-2i} = \frac{\sin i}{2i} \end{aligned}$$

Citation de M. Cibils:

"Évidemment, je prends des exemples pas trop longs car je n'ai pas le temps pendant les cours. Vous verrez pendant la séance d'exercices."

Exemple 4: $f(z) = \frac{3z^2}{z+2}$ Avec $p(z) = 3z^2$ et $q(z) = z+2$. On a que $z_0 = -2$ est un zéro d'ordre 1 de q avec $p(-2) = 12 \neq 0$ $q'(z) = 1 \forall z$

$$\text{Rés}_{-2}(f) = \frac{p(-2)}{q'(-2)} = \frac{12}{1} = 12$$

Chapitre 7

Théorème des résidus et applications au calcul d'intégrales réelles

7.1 Théorème des résidus :

7.1.1 Énoncé du Théorème des résidus :

Théorème des résidus :

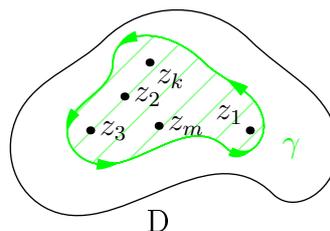
Soient $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe, $\gamma \subset D$ une courbe simple fermée régulière (par morceaux) contenue dans D orientée positivement et $z_1, z_2, \dots, z_m \in \text{int}\gamma$ tels que $z_i \neq z_j$ pour $i \neq j$.

Si une fonction $f : D \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_m\} \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe. Alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^m \text{Rés}_{z_k}(f)$$

Remarque 1 :

Si f est une fonction holomorphe sauf peut-être en un nombre fini de points z_1, z_2, \dots, z_m alors l'intégrale de f le long de n'importe quelle courbe simple fermée régulière γ contenue dans D et orientée positivement est donnée par la somme (multipliée par $2\pi i$) des résidus de f aux points z_k (où f n'est pas holomorphe) qui sont enfermés à l'intérieur de γ .

**Citation de M. Cibils:**

"Parfois, les mathématiciens appellent ce théorème, le théorème de la poubelle, entre nous. [...] Mais bon, officiellement, c'est le théorème des résidus."

Remarque 2 : Si f est holomorphe dans D , alors pour toutes courbe simple γ fermée régulière dans D , il n'y a aucune singularité $z_k \in \text{int}\gamma$. Dans ce cas $\sum_{k=1}^m \text{Rés}_{z_k}(f) = 0$ et le théorème des résidus redonne

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \text{résultat du Théorème de Cauchy §5.2.1}$$

7.1.2 Exemples :

Exemple 1: Soit $f(z) = \frac{2}{z} + \frac{3}{z-1} + \frac{1}{z^2}$ et $\gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe simple fermée régulière orientée positivement. Calculer en fonction de γ l'intégrale $\int_{\gamma} f(z) dz$

On a

$$f(z) = \frac{2z(z-1) + 3z^2 + z - 1}{z^2(z-1)} = \frac{p(z)}{q(z)}$$

$z_1 = 0$ est un pôle d'ordre 2 de f ($p(0) \neq 0, q(0) = 0, q'(0) = 0, q''(0) \neq 0$)

$z_2 = 1$ est un pôle d'ordre 1 de f ($p(1) \neq 0, q(1) = 0, q'(1) \neq 0$)

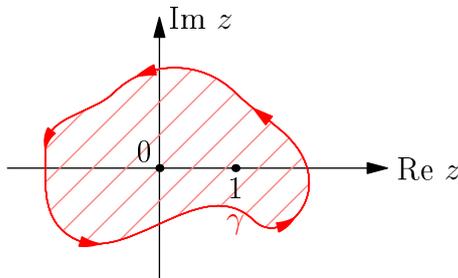
On a

$$\begin{aligned} \text{Rés}_{z_1}(f) &= \text{Rés}_0(f) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} [z^2 f(z)] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[2z + \frac{3z^2}{z-1} + 1 \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left[2 + \frac{6z(z-1) - 3z^2}{(z-1)^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} [2 + 0] = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Rés}_{z_2}(f) &= \text{Rés}_1(f) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)f(z)] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{2(z-1)}{z} + \frac{3(z-1)}{z-1} + \frac{z-1}{z^2} \right] = 0 + 3 + 0 = 3 \end{aligned}$$

On se retrouve avec 5 cas possibles :

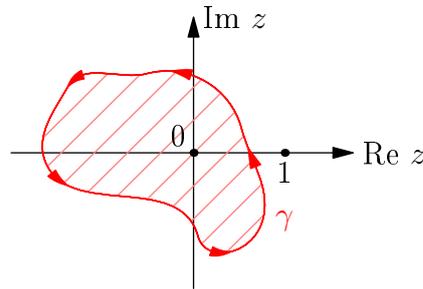
Cas 1. 0 et $1 \in \text{int}\gamma$



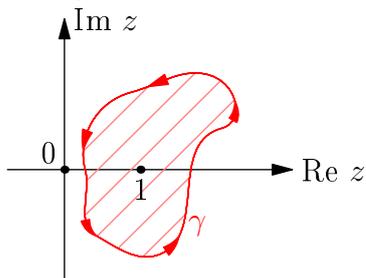
$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= 2\pi i [\text{Rés}_0(f) + \text{Rés}_1(f)] \\ &= 2\pi i [2 + 3] = 10\pi i \end{aligned}$$

Cas 2. $0 \in \text{int}\gamma$ mais $1 \notin \text{int}\gamma$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Rés}_0(f) = 2\pi i \cdot 2 = 4\pi i$$



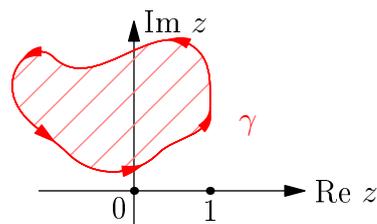
Cas 3. $0 \notin \text{int}\gamma$ mais $1 \in \text{int}\gamma$



$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Rés}_1(f) = 2\pi i \cdot 3 = 6\pi i$$

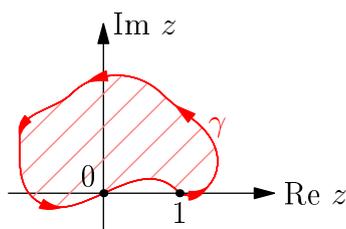
Cas 4. $0 \notin \overline{\text{int}\gamma}$ et $1 \notin \overline{\text{int}\gamma}$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \text{Théorème de Cauchy}$$

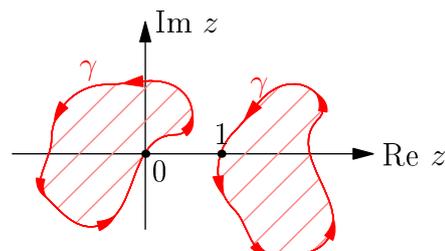


f holomorphe dans un domaine D simplement connexe tel que $\overline{\text{int}\gamma} \subset D$ et $\gamma \subset \overline{\text{int}\gamma} \subset D$

Cas 5. $0 \in \gamma$ ou $1 \in \gamma$ (ou 0 et $1 \in \gamma$)



ou



Dans ce cas, l'intégrale n'est pas bien définie.

Autres exemples, exercices 1 et 2 série 13.

7.2 Applications du Théorème des résidus au calcul d'intégrales réelles

7.2.1 Calcul d'intégrales de fonctions périodiques :

But

Calculer des intégrales de la forme

$$\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

avec $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

où p et q sont des fonctions polynômiales avec

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)}$$

$q(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$

Méthode

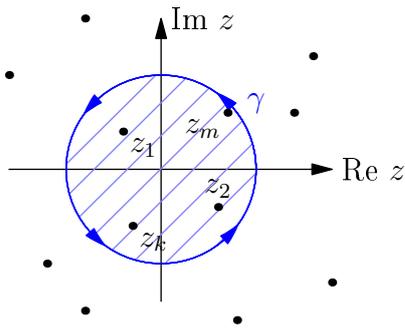
- On pose $z = e^{i\theta}$ et on a :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$$

- On définit $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$z \mapsto \tilde{f}(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{iz} f \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right)$$

Soit γ le cercle **unité** centré en $z = 0$ orienté positivement z_k pour $k = 1, \dots, m$ les singularités de \tilde{f} à l'intérieur de γ .



$z_k \notin \gamma$ car $q(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$
 \implies pas de singularité de \tilde{f} sur γ .

- On applique le Théorème des résidus **à la fonction** \tilde{f} intégrée le long de γ :

$$\int_{\gamma} \tilde{f}(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Rés}_{z_k}(\tilde{f})$$

Citation de M. Cibils:

"Et je pense que l'excitation est à son comble !"

Remarque : On voit que :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \tilde{f}(z) dz &= \int_{\gamma} \frac{1}{iz} f\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) dz \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{ie^{i\theta}} f(\cos \theta, \sin \theta) ie^{i\theta} d\theta \end{aligned}$$

En ayant posé $z = \gamma(\theta) = e^{i\theta}$: cercle de rayon unité centré en 0 orienté positivement. On a exactement l'intégrale qu'on veut calculer ! Le résultat est donc

$$\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Rés}_{z_k}(f)$$

où z_k pour $k = 1, 2, \dots, m$ sont les singularités de \tilde{f} à l'intérieur du cercle unité γ centré en zéro.

Citation de M. Cibils:

"Je ne sais pas si vous vous rendez compte de la performance."

Exemples

Exemple 1: Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{5} - \sin \theta}$$

On a $f(\cos \theta, \sin \theta) = \frac{1}{\sqrt{5} - \sin \theta}$ où $\sqrt{5} - \sin \theta \neq 0$ pour $\theta = [0, 2\pi]$ et

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{iz} f\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{iz} \left[\frac{1}{\sqrt{5} - \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \right] \\ &= \frac{1}{iz} \left[\frac{1}{\frac{2i\sqrt{5}z - z^2 + 1}{2iz}} \right] = \frac{2}{-z^2 + 2i\sqrt{5}z + 1} \end{aligned}$$

Les singularités de \tilde{f} sont les zéros de $-z^2 + 2i\sqrt{5}z + 1$

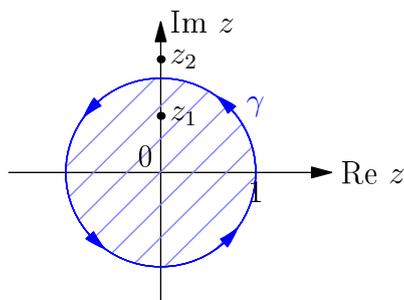
$$\begin{aligned} \Delta &= (2i\sqrt{5})^2 + 4 = -20 + 4 = -16 \\ \sqrt{\Delta} &= \sqrt{-16} = \pm 4i \end{aligned}$$

$$z_1 = \frac{-2i\sqrt{5} + 4i}{-2} = i(\sqrt{5} - 2) \quad z_2 = \frac{-2i\sqrt{5} - 4i}{-2} = i(\sqrt{5} + 2)$$

On a

$$\begin{aligned} z^2 + 2i\sqrt{5}z + 1 &= -(z - z_1)(z - z_2) = -[z - i(\sqrt{5} - 2)][z - i(\sqrt{5} + 2)] \\ \tilde{f}(z) &= \frac{-2}{[z - i(\sqrt{5} - 2)][z - i(\sqrt{5} + 2)]} \end{aligned}$$

Soit γ le cercle unité en $z = 0$ et orienté positivement :



$$\begin{aligned} 0 < \text{Im} z_1 = \sqrt{5} - 2 < 1 &\implies z_1 \in \text{int} \gamma \\ \text{Im} z_2 = \sqrt{5} + 2 > 1 &\implies z_2 \notin \text{int} \gamma \end{aligned}$$

$z_1 = i(\sqrt{5} - 2)$ est un pôle d'ordre 1 de \tilde{f} et

$$\begin{aligned} \text{Rés}_{z_1}(\tilde{f}) &= \lim_{z \rightarrow i(\sqrt{5} - 2)} \left([z - i(\sqrt{5} - 2)] \frac{-2}{[z - i(\sqrt{5} - 2)][z - i(\sqrt{5} + 2)]} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow i(\sqrt{5} - 2)} \left[\frac{-2}{z - i(\sqrt{5} + 2)} \right] = \frac{-2}{-4i} = \frac{1}{2i} \end{aligned}$$

Le résultat est donc :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{5} - \sin \theta} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$$

Exemple 2: Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta}$$

On a $f(\cos \theta, \sin \theta) = \frac{1}{2 + \cos \theta}$ où $2 + \cos \theta \neq 0$ pour $\theta = [0, 2\pi]$ et

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \frac{1}{iz} f\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{iz} \frac{1}{2 + \frac{1}{z}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \\ &= \frac{1}{iz} \frac{1}{\frac{4z + z^2 + 1}{2z}} = \frac{2}{i(z^2 + 4z + 1)} \end{aligned}$$

Les singularit\u00e9s de \tilde{f} sont les z\u00e9ros de $z^2 + 4z + 1$

$$\begin{aligned} \Delta &= 16 - 4 = 12 \\ \sqrt{\Delta} &= \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

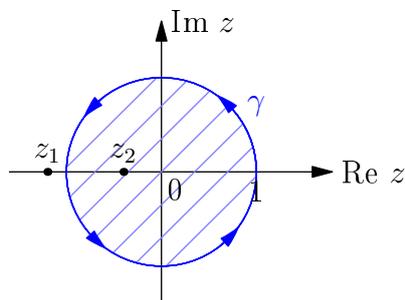
$$z_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - 2 \quad z_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} - 2$$

On a

$$\begin{aligned} z^2 + 4z + 1 &= (z - z_1)(z - z_2) = [z - (\sqrt{3} - 2)] [z + (\sqrt{3} + 2)] \\ \tilde{f}(z) &= \frac{2}{i(z + 2 - \sqrt{3})(z + 2 + \sqrt{3})} \end{aligned}$$

Soit γ le cercle unit\u00e9 en $z = 0$ et orient\u00e9 positivement :

$$\begin{aligned} -1 < z_1 = \sqrt{3} - 2 < 0 &\implies z_1 \in \text{int} \gamma \\ z_2 = -(2 + \sqrt{3}) < -1 &\implies z_2 \notin \text{int} \gamma \end{aligned}$$



$z_1 = \sqrt{3} - 2$ est un p\u00f4le d'ordre 1 de \tilde{f} et

$$\text{R\u00e9s}_{z_1}(\tilde{f}) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \tilde{f} = \lim_{z \rightarrow \sqrt{3} - 2} (z - \sqrt{3} + 2) \frac{2}{i(z + 2 - \sqrt{3})(z + 2 + \sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}i}$$

Le r\u00e9sultat est donc :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} = 2\pi i \cdot \frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Autres exemples : exercices 3 et 4 s\u00e9rie s\u00e9rie 13 exercice 1 et 2 s\u00e9rie 14.

7.2.2 Calcul d'int\u00e9grales g\u00e9n\u00e9ralis\u00e9es

But

Calculer des int\u00e9grales de la forme :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}_+ (\alpha \geq 0)$$

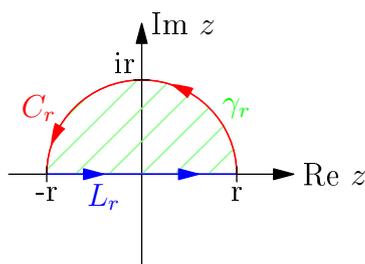
et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ où p et q sont des fonctions polynômiales telles que

$$q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{degré}(q) - \text{degré}(p) \geq 2$$

Méthode

On choisit un nombre réel $r > 0$ et on considère la courbe $\gamma_r \stackrel{\text{déf}}{=} L_r \cup C_r$ orientée positivement où L_r est le **segment de droite** $[-r, r]$ sur **l'axe réel** C_r est le **demi-cercle** de rayon r centré en $z = 0$ situé **dans le demi-plan supérieur**



$\gamma_r = L_r \cup C_r$ est une courbe simple régulière orientée positivement.

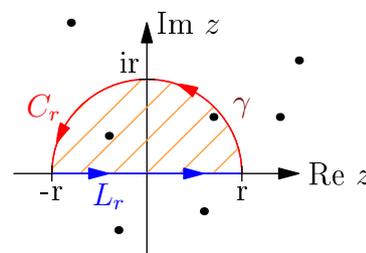
On définit la fonction $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par $z \mapsto g(z) = f(z)e^{i\alpha z} = \frac{p(z)}{q(z)}e^{i\alpha z}$ variable $x \in \mathbb{R}$ remplacée par $z \in \mathbb{C}$ dans l'intégrant.

Citation de M. Cibils:

"Et là évidemment je suis en manque, en manque de fonction complexe."

Constataion

les seules singularités de g sont les zéros de q . Comme q est une fonction polynômiale et $q(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors q possède un nombre **fini** de zéros et **aucun** est situé **sur** l'axe réel.



• → nombre fini de zéros de q

Idée

On choisit $r > 0$ suffisamment grand pour que **tout** les zéros de q situés dans le **demi-plan supérieur** soient à l'**intérieur** de γ_r possible car **nombre fini** de zéros. En appliquant le Théorème des résidus à $g(z) = f(z)e^{i\alpha z}$ intégrée à la fonction le long de la courbe γ_r

On a :

$$\int_{\gamma_r} \underbrace{f(z)e^{i\alpha z}}_{g(z)} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Rés}_{z_k}(g)$$

où z_k pour $k = 1, \dots, m$ sont les singularités de f c'est à dire les zéros de q situés dans le demi-plan **supérieur**. D'autre part ; puisque $\gamma_r = L_r \cup C_r$ on a

$$\int \gamma_r f(z)e^{i\alpha z} dz = \int_{L_r} f(z)e^{i\alpha z} dz + \int_{C_r} f(z)e^{i\alpha z} dz$$

$$\implies \lim_{r \rightarrow +\infty} \int \gamma_r f(z)e^{i\alpha z} dz = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{L_r} f(z)e^{i\alpha z} dz + \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{C_r} f(z)e^{i\alpha z} dz$$

Étude de chaque limites :

1.

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int \gamma_r f(z) e^{i\alpha z} dz = \lim_{r \rightarrow +\infty} \underbrace{\left[2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Rés}_{z_k}(g) \right]}_{\text{indépendantes de } r} = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Rés}_{z_k}(g)$$

2.

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{L_r} f(z) e^{i\alpha z} dz \stackrel{z=x \in [-r, r] \subset \mathbb{C}}{\downarrow} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_r^r f(x) e^{i\alpha x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx$$

est l'intégrale que l'on veut calculer.

3. On montre que si $\deg(q) - \deg(p) \geq 2$ alors

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{C_r} f(z) e^{i\alpha z} dz = 0 \quad \text{on l'admet sans preuve.}$$

Citation de M. Cibils:

"Je sors le drapeau vert de l'optimisme, car c'est pas fini mais c'est déjà ça."

Résultat final

l'étude des trois limites donne la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Rés}_{z_k}(g)$$

où $g(z) \stackrel{\text{d'éf}}{=} f(z) = e^{i\alpha z}$ et z_k pour $k = 1, \dots, m$ sont les singularités de f situées dans le demi-plan supérieur c'est-à-dire les zéros de q tels que $\text{Im} z_k > 0$.

Citation de M. Cibils:

"On a les singularité de f situées dans le demi-plan supérieur. Pas celles sur le demi-plan inférieur, et permettez moi de vous le dire, vous vous en foutez... et moi aussi!"

7.2.3 Exemples

Exemple 1: Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 16} dx$$

Ici $\alpha = 0$ et $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 16}$. On a donc $p(x) = x^2$ et $q(x) = x^4 + 16$
Les conditions sont satisfaites :

$$\begin{aligned} q(x) &\neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \deg(q) - \deg(p) &= 4 - 2 = 2 \geq 2 \end{aligned}$$

Calcul par la méthode des résidus avec $g(z) \stackrel{\alpha=0}{=} f(z) = \frac{z^2}{z^4 + 16}$.
Recherche des singularités de $f \iff$ recherche des zéros de $q \iff q(z) = 0$

$$\begin{aligned} \implies z^4 + 16 = 0 &\iff z^4 = -16 \\ &\iff z^4 = 16e^{i\pi} \\ &\iff z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2n\pi}{4}\right)} \quad \text{avec } n = 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Les singularités sont :

pour $n = 0$: $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(1 + i)$

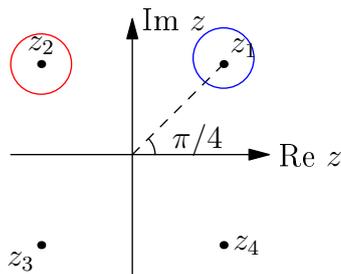
pour $n = 1$: $z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}(-1 + i)$

pour $n = 2$: $z_3 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\sqrt{2}(1 + i)$

pour $n = 3$: $z_4 = 2e^{i\frac{7\pi}{4}} = -\sqrt{2}(-1 + i)$

Ce sont des pôles d'ordre 1 de f et on a

$$z^4 + 16 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$$



Les seuls résidus qui contribuent à l'intégrale sont z_1 et z_2

Calcul des résidus de f en z_1 et z_2

$$\begin{aligned} \text{Rés}_{z_1}(f) &= \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4z_1} = \frac{1}{4\sqrt{2}(1+i)} \\ &= \frac{1-i}{4\sqrt{2}(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{1-i}{8\sqrt{2}} \\ \text{Rés}_{z_2}(f) &= \frac{p(z_2)}{q'(z_2)} = \frac{z_2^2}{4z_2^3} = \frac{1}{4z_2} = \frac{1}{4\sqrt{2}(-1+i)} \\ &= \frac{-1-i}{4\sqrt{2}(-1+i)(-1-i)} = \frac{-1-i}{\sqrt{2} \cdot 2} = -\frac{1+i}{8\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 16} dx = 2\pi i \left(\frac{1-i}{8\sqrt{2}} + \left(-\frac{1+i}{8\sqrt{2}} \right) \right) = 2\pi i \cdot \frac{-2}{8\sqrt{2}} \\ &= \frac{-4\pi}{8\sqrt{2}} i^2 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Citation de M. Cibils:

"Une séance d'exercices sans étudiants c'est comme un réveillon sans champagne! Mais attention, j'ai pas dit qu'il y aurait du champagne pendant la série."

Exemple 2: Calculer

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(5x)}{x^2 + 1} dx$$

On se ramène à la forme adéquate avec la formule d'Euler : $e^{i5x} = \cos(5x) + i \sin(5x)$

On peut écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(5x)}{x^2 + 1} dx = \text{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i5x}}{x^2 + 1} dx \right]$$

On considère

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx$$

Avec $\alpha = 5$ et $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. On a donc $p(x) = 1$ et $q(x) = x^2 + 1$ donc $\deg(q) - \deg(p) = 2$ et $q(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = f(z)e^{i5z} = \frac{e^{i5z}}{z^2 + 1}$$

On veut $z^2 + 1 = 0 \implies z^2 = -1 \implies z_1 = i$ ou $z_2 = -i$
Le seul pôle que l'on considère est z_1 qui est un pôle d'ordre 1 (demi-plan supérieur).

$$\begin{aligned} \text{Rés}_{z_1}(g) &= \lim_{z \rightarrow z_1} g(z) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{e^{i5z}}{(z - i)(z + i)} \\ &= \frac{e^{i5z}}{2i} = \frac{e^{-5}}{2i} \end{aligned}$$

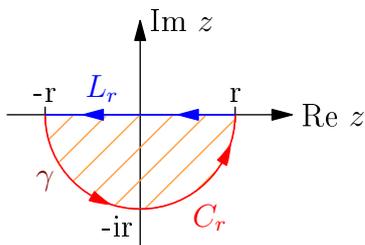
Alors

$$\begin{aligned} I &= \text{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i5z}}{z^2 + 1} dz \right] = \text{Re} \left[2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Rés}_{z_k}(g) \right] \\ &= \text{Re} \left(2\pi i \frac{e^{-5}}{2i} \right) = \frac{\pi}{e^5} \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(5x)}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{e^5}$$

Remarque : Pour des intégrales généralisées $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{i\alpha z} dz$ avec $\alpha \leq 0$, on applique la même méthode en choisissant le demi-cercle C_r situé dans la partie **inférieure** et en considérant les singularités de f dans le **demi-plan** inférieur.



Attention aux signes venant de l'orientation positive du parcours de $\gamma_r = L_r \cup C_r$

Esquisse de preuve

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{C_r} f(z)e^{i\alpha z} dz \stackrel{z=i^n}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(i^n) du \text{ Cours}$$

En posant : $C_r = \gamma(u)$

Annexe A

Formules utiles :

A.1 Séries de Taylor :

Toutes les séries suivantes sont évaluées autour de $x = 0$.

Exponentielle

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Logarithme

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

Somme d'une série géométrique

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Fonctions trigonométriques

$$\text{sinus} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\text{cosinus} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

A.2 Identités Trigonométriques :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos(2x))$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos(2x))$$

$$\cos x + 1 = 2 \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right)$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$