Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Analyse IV

Microtechnique

Semestre 4

Par
Munier Louis

Cours de M. Dalang

Table des matières

Chapitre 14

Séries de Fourier

14.1 Motivation

Séries de Taylor Représentent une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, indéfiniment dérivable, par une somme infinie de monômes

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n \qquad \text{où } \alpha_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Exemple typique

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Définition

Séries de Fourier représente une **fonction périodique** comme somme infinie de fonctions en sinus et cosinus.

Rappel

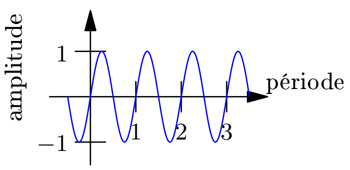
Soit $T > 0$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **T-périodique** si

$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

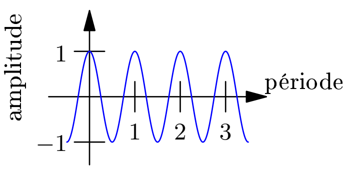
T est appelée la/une période de f.

Exemples typiques

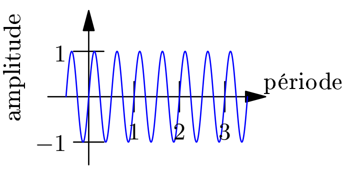
$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$$



$$\cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$$



$$\sin\left(\frac{4\pi}{T}x\right)$$



Remarque Une onde sonore correspond à des variations de pression de l'air.

Définitions

Son pur une variation de pression $\Longrightarrow$ une fonction sinusoïdale du temps.

$$\textit{temps } x \mapsto \sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$$

où la période T représente la "note musicale". *La centrale du piano :* $T = \frac{1}{440} \simeq 2.27 \cdot 10^{-3}$ *secondes.*

Son complexe superposition de sons purs *accord de n notes*

$$a_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T_1}x\right) + a_2 \sin\left(\frac{2\pi}{T_2}x\right) + \cdots + a_n \sin\left(\frac{2\pi}{T_n}x\right)$$

Problème étant donné $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ T-périodique, est-ce que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\right]$$

avec a_n, b_n des valeurs bien choisies ? **Réponse** oui, mais pas toujours.

14.2 Propriété fondamentale des fonctions trigonométriques

Proposition Soit $T > 0$ $m, n \in \mathbb{N}^*$. Alors

1. $$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{T}x\right) dx = \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{T}x\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{T}{2} & \text{si } n = m \end{cases}$$
2. $$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{T}x\right) dx = 0$$

Démonstration *cf exercices*

14.2.1 Propriétés des fonctions périodiques

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ T-périodique. Alors pour tout a $\in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

Démonstration

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_a^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx$$

$$\text{or : } \int_T^{a+T} f(x)dx \overset{\substack{y = x - T \\ dy = dx}}{=} \int_0^a \underbrace{f(y+T)}_{=f(y)} dy = \int_0^a f(y)dy = \int_0^a f(x)dx = -\int_a^0 f(x)dx$$

$$\text{où} \quad \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

14.2.2 Série de Fourier d'une fonction T-périodique

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ T-périodique.

1. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, la **série de Fourier partielle d'ordre** N de f est

$$F_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \right]$$

où

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Les a_n et b_n sont les **coefficients de Fourier** de f.

2. La **série de Fourier** de f est la limite *quand elle existe* de $F_N f(x)$, lorsque $N \longrightarrow +\infty$

$$Ff(x) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{N \to +\infty} F_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \right]$$

Question de base Est-ce que $Ff(x) = f(x)$?

Explication des formules pour a_n et b_n

Pour simplifier, on prend $T = 2\pi$. Supposons

$$f(x) = Ff(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \right]$$

Alors les a_n et b_n sont nécessairement donnés par

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nx) f(x) dx \qquad\qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nx) f(x) dx$$

En effet, pour $k \geqslant 1$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \right) \cos(kx)dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2}\cos(kx) + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx)\cos(kx) + b_n \sin(nx)\cos(kx)] \right) \cos(kx)dx \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}\cos(kx)dx}_{=0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\int_0^{2\pi} a_n \cos(nx)\cos(kx)dx}_{=a_n \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k \\ 1 & \text{si } n = k \end{cases}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\int_0^{2\pi} b_n \sin(nx)\cos(kx)dx}_{=0} = \pi a_k$$

Donc $a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx$. On calcul b_n et a_0 de manière similaire.

14.3 Convergence des séries de Fourier

Question

Est-ce que $Ff(x) = \lim\limits_{N\to+\infty} F_N f(x)$ existe ? Est-ce qu'elle est égale à f ?

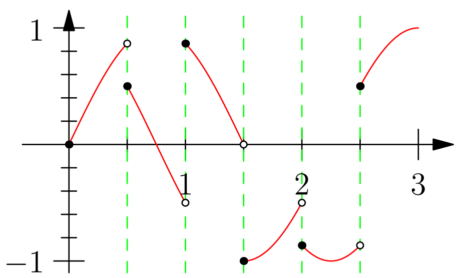
Définition

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est **continue par morceaux** si elle admet un nombre fini de **discontinuités** sur tout intervalle de longueur finie, et, en chaque point x de discontinuité

$$\lim_{t\to x, t<x} f(t) \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to x, t>x} f(t) \qquad \text{existent et sont finies.}$$

Notation

$$f(x-0) = \lim_{t\to x, t<x} f(t)$$
$$f(x+0) = \lim_{t\to x, t>x} f(t)$$



14.3.1 Théorème de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ T-périodique, telle que f et f' sont continues par morceaux. Alors

$$\lim_{N\to+\infty} F_N f(x) = Ff(x)$$

existe et pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\qquad Ff(x) = \frac{1}{2}\left(f(x-0) + f(x+0)\right)$.

Si f est continue en x, alors $Ff(x) = f(x)$.

Remarque 1

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{a}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\right]$$

où a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de f.

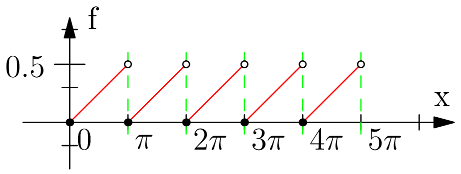
Remarque 2 Une fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ qui vérifie les hypothèses du théorème, est égale à une superposition des fonctions trigonométriques

$$\underbrace{a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)}_{\text{périodique}} \qquad\qquad \underbrace{b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)}_{\text{périodique}}$$

Exemple 1 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $2\pi-$périodique, telle que $f(x)=x$ pour $x\in[0,2\pi]$. Calculer la série de Fourier de f, comparer Ff avec f.

Coefficients de Fourier de f

$$a_n=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}xdx=\frac{x^2}{2\pi}\Big|_0^{2\pi}=2\pi$$



$\mathbf{n\geqslant 1}$

$$a_n=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\underset{f}{x}\cdot\underset{g'}{\cos(nx)}dx \qquad \textit{par parties}$$

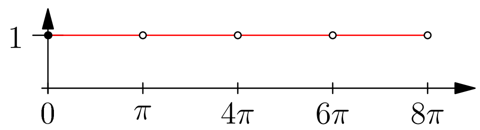
$$=\frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{\sin(nx)}{n}dx\right]=0$$

$$b_n=-\frac{2}{n}$$

$$Ff(x)=\pi-1\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$$

Comparaison de Ff et f

f et f' sont continues par morceaux



D'après le théorème de Dirichlet

si $x\in]0,2\pi[$, f est continue en x, donc $Ff(x)=f(x)$

$$f(x)=x=\pi-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$$

si $x=0$

$$\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))=Ff(x)$$

$$\frac{1}{2}(2\pi+0)=\pi-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\cdot 0)}{n}$$

on constate bien que $Ff(0)=\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\pi\neq f(0)=0$

Remarque La relation $Ff(x)=f(x)$ pour $x\in]0,2\pi[$ donne la valeur explicite de certaines séries trigonométriques

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi-x}{2}$$

x = 1

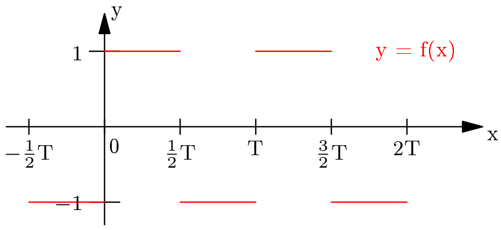
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi - 1}{2}$$

x = 2

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n)}{n} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Exemple 2 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, T-périodique

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[0, \frac{T}{2}\right[\\ -1 & \text{si } x \in \left[\frac{T}{2}, T\right[\end{cases}$$



Trouver Ff et comparer Ff et f sur $[0, T[$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T \underbrace{f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right)}_{\text{T-périodique}} dx$$

$$= \frac{2}{T} \int_0^T \underbrace{\underbrace{f(x)}_{impaire} \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right)}_{paire}}_{\text{impaire}} dx = 0$$

n ⩾ 1

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{impaire} \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right)}_{impaire}}_{\text{paire}} dx$$

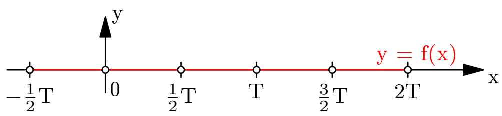
$$= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(x)}_{=1} \sin\left(\frac{2\pi n}{x}\right) dx = \frac{4}{T} \left. \frac{-\cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right)}{\frac{2\pi n}{T}} \right|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos(\pi n))$$

$$\begin{cases} b_n = 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Donc

$$Ff(x) = \sum_{\text{n impair}} \frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \overset{n=2k+1}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin\left(\frac{2\pi(2k+1)}{T} x\right)$$

f et f' sont continues par morceaux.



D'après le théorème de Dirichlet

$\mathbf{x = 0}$

$$\frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right)=\frac{1}{2}(-1+1)=0=Ff(0)=\sum_{\text{impair}}\frac{4}{n\pi}\underbrace{\sin\left(\frac{2\pi\cdot 0}{T}n\right)}_{=0}=0$$

$x \in 0, \frac{T}{2}$ f est continue en x, donc

$$f(x)=Ff(x) \text{ d'où } 1=\sum_{0}^{\infty}\frac{4}{(2k+1)\pi}\sin\left(\frac{2\pi(2k+1)}{T}x\right)$$

$\mathbf{x = \frac{T}{2}}$

$$\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{T}{2}+0\right)+f\left(\frac{T}{2}-0\right)\right)=\frac{1}{2}(1+(-1))=0=Ff\left(\frac{T}{2}\right)$$
$$\text{or } =f\left(\frac{T}{2}\right)=-1\neq Ff\left(\frac{T}{2}\right)=0$$

$\mathbf{x \in \frac{T}{2}, T}$

$$-1=f(x)=Ff(x)=\sum_{0}^{\infty}\frac{4}{(2k+1)\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}(2k+1)x\right)$$

14.4 Notation complexe de la série de Fourier

$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continue par morceaux et T-périodique. Alors

$$Ff(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}x} \qquad \text{où } c_n\in\mathbb{C}: c_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\frac{2\pi n}{T}x}\,dx$$

Vérification dans le cas où $T = 2\pi$

$$\begin{aligned}
Ff(x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right] \overset{Euler}{=} \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right]\\
&= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}-i\cdot b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}\right]\\
&= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{a_n-ib_n}{2}e^{inx}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-inx}\right]\\
\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2}\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\underbrace{e^{i\cdot 0\pi}}_{=1}dx=c_0
\end{aligned}$$

$\mathbf{n \geqslant 1}$

$$\begin{aligned}
\frac{a_n-ib_n}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)dx-i\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin(nx)dx\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\left(\cos(nx)-i\sin(nx)\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-inx}dx=c_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{a_n+ib_n}{2} &= \overline{\frac{a_n-ib_n}{2}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\underbrace{\overline{e^{-inx}}}_{=e^{inx}}dx = c_{-n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } Ff(x) &= c_0e^{i0\cdot x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[c_ne^{inx}+e^{-inx}\right] \\
&= c_0e^{-i0\cdot x} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_ne^{inx} \overset{n=-m}{+} \sum_{m=-\infty}^{-1} c_me^{imx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_ne^{inx}
\end{aligned}$$

14.4.1 Propriétés des séries de Fourier

Théorème *périodicité et parité*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, T-périodique telle que f et f' sont continue par morceaux.

a) la série de Fourier Ff de f est aussi T-périodique

b) Si f est une fonction **paire** $f(x) = f(-x)\forall x \in \mathbb{R}$ alors $b_n = 0, \forall n \geqslant 1$ et

$$Ff(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)$$

et Ff est ainsi paire.

c) Si f est une fonction **impaire** $f(-x) = -f(x)\forall x \in \mathbb{R}$. Alors $a_n = 0, \forall n \geqslant 0$, et

$$Ff(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)$$

et Ff est aussi impaire.

Vérification

$$\begin{aligned}
Ff(x+T) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}(x+T)\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T}(x+T)\right)\right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x+2\pi n\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x+2\pi n\right)\right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\right] = Ff(x)
\end{aligned}$$

Théoème ***Identité de Parseval***

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ T-périodique telle que f et f' sont continues par morceaux. Alors

$$\frac{2}{T}\int_0^T (f(x))^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n^2+b_n^2\right]$$

où les a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de f.

Vérification

Pour simplifier, on prend $T = 2\pi$ et f est continue. Dans ce cas, $Ff(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(x))^2\,dx &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)Ff(x)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\left(\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty}[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)]\right)dx \\
&= \frac{a_0}{2}\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx}_{a_o} + \sum_1^{\infty} a_n \cdot \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx}_{a_n} + \sum_1^{\infty} b_n \cdot \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)x}_{b_n} \\
&= \frac{a_0^2}{2} + \sum_1^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)
\end{aligned}$$

Exemple

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0; 2\pi[\\ 0 & \text{si } x \in [\pi; 2\pi[\end{cases} \quad \text{étendue par } 2\pi\text{-périodicité.}$$

Coefficients de Fourier

On trouve après calculs

$$a_0 = 1, a_n = 0 \quad \text{si} \quad n \geqslant 1, b_n = 0 \quad \text{si n est pair} \quad , b_n = \frac{2}{n\pi}\text{si n est impair}$$

donc $Ff(x) = \frac{1}{2} = \sum_{\text{impair}} \frac{2}{\pi n}\sin(nx) = \frac{1}{2} + \sum_0^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$

Or

$$\frac{2}{T}\int_0^T (f(x))^2\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(x))^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1^2 dx = 1$$

et

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{2} + \sum_0^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2}$$

donc, **d'après Parseval**

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_0^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \implies \frac{\pi^2}{8} = \sum_0^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

Théorème *dérivation des séries de Fourier*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ T-périodique, **continue**, telle que f **et** f' sont continues par morceaux. La série de Fourier de f est

$$Ff(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\right]$$

Alors la série obtenue en dérivant terme à terme $Ff(x)$ converge et vaut

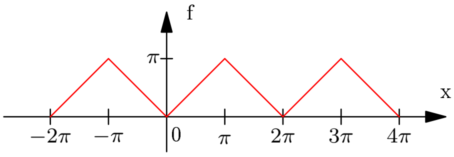
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[-a_n\frac{2\pi n}{T}\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)+b_n\frac{2\pi n}{T}\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\right]=\frac{1}{2}(f'(x+0)+f'(x-0))$$

Si f' est continue en x, alors le membre de droite vaut $f'(x)$.

Exemple

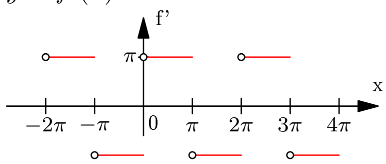
$$f(x)=\begin{cases}x & \text{si } x\in[0,\pi]\\ 2\pi-x & \text{si } x\in[\pi,2\pi]\end{cases}\qquad \text{étendue par } 2\pi-\text{périodique.}$$

$y=f(x)$



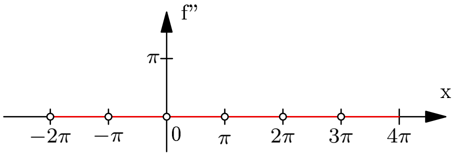
f est continue

$y=f'(x)$



f' est continue par morceaux

$y=f''(x)$



f'' est continue par morceaux

Coefficients de Fourier de f

$b_n=0, n\geqslant 1$ car f est paire.

$$a_0=\pi \qquad a_n=\begin{cases}0 & \text{si } n\geqslant 1, \text{n pair}\\ \frac{-4}{\pi n^2} & \text{si } n\geqslant 1, \text{n impair}\end{cases}$$

$$f(x)=Ff(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{\text{n impair}}\frac{-4}{\pi n^2}\cos(nx)=\frac{\pi}{2}+\frac{-4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$$

D'après le théorème

$$\frac{1}{2}(f'(x+0)+f'(x-0))=\frac{-4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}(-2k+1)\sin((2k+1)x)$$

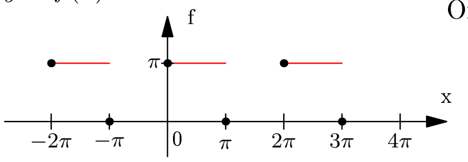
$$=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\sin((2k+1)x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-1)=0 & \text{si } x=0\\ 1 & \text{si } x\in]0,\pi[\\ \frac{1}{2}(-1+1)=0 & \text{si } x=\pi\\ -1 & \text{si } x=]\pi,2\pi[\end{cases}$$

Remarque Faire bien attention à ce que **toutes** les hypothèses soient vérifiées pour ce théorème.

Contre-exemple

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \pi[\\ 0 & \text{si } x \in [\pi, 2\pi[\end{cases} \text{ étendue par } 2\pi\text{-périodique.}$$

$y = f(x)$



On a vu que

$$Ff(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$

f n'est **pas continue** et $f'(x) = 0$ si $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. f et f' sont continues par morceaux. Si on dérive terme à terme la série de Fourier de f, on obtient

$$0 + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \cos((2k+1)x) \qquad \textbf{série divergente}\text{, sauf pour } x = n\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}, n \text{ impair}$$

Théorème *intégration des séries de Fourier*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ T-périodique telle que f et f' sont continues par morceaux et

$$Ff(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \right]$$

Alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{a_0}{2} dt}_{\frac{a_0}{2}(x-x_0)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \int_{x_0}^{x} \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt + b_n \int_{x_0}^{x} \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt \right]$$

14.5 Deux autres formulations des séries de Fourier

But

Travailler avec des fonctions définies sur un intervalle de largeur finie.

Théorème *série de Fourier en cosinus*

Soit $f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue** telle que f' soit continue par morceaux. Alors la série

$$F_c f(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$$

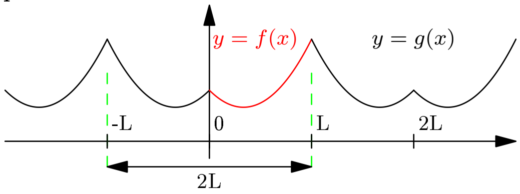
où

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

converge vers f sur $[0, L]$: $f(x) = F_c f(x), \forall x \in [0, L]$.

Vérification

On étend f par parité à $[-L, 0]$, en prenant $f(x) = f(-x)$, pour $x \in [-L, 0]$, puis à $\mathbb{R}$ par 2L-périodicité.



Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2L-périodique obtenue par cette double extension.
g est continue, paire, 2L-périodique et g' est continue par morceaux.

Ecrivons la série de Fourier de g

$$b_n = 0, \forall n \geqslant 1, g(x) = Fg(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{2L} x\right)$$

avec

$$a_n = \frac{2}{2L} \int_0^{2L} g(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{2L} x\right) dx = \frac{1}{L} \int_0^{2L} \underbrace{g(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right)}_{\text{2L-périodique}} dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \underbrace{g(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right)}_{\text{paire}} dx$$

$$= \frac{2}{L} \int_0^{L} \underbrace{g(x)}_{f(x)} \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^{L} f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx$$

Pour $x \in [0, 1]$: $f(x) = g(x) = Fg(x) = F_c f(x)$.

Théorème *série de Fourier en sinus*

Soit $f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue avec $f(0) = f(L) = 0$, telle que f' est continue par morceaux. Alors

$$F_s f(x) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$$

où

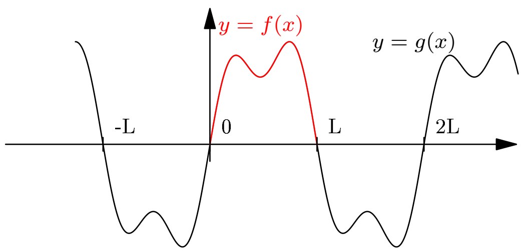
$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^{L} f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

converge vers f sur $[0, L]$: $f(x) = F_s f(x), \forall x \in [0, L]$

Vérification

On étend f par imparité à $[-L, 0]$, en posant $f(x) = -f(-x)$, pour $x \in [-L, 0]$, puis à $\mathbb{R}$ par 2L-périodicité.

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2L-périodique obtenue par cette double extension.
g est continue, impaire, 2L-périodique et g' est continue par morceaux.



La série de Fourier de g comporte uniquement des termes en

$$\sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$$

La suite du raisonnement est similaire à celui pour les séries de Fourier en cosinus.

Chapitre 15

Transformée de Fourier

- On calcule les séries de Fourier de fonctions périodique ou de fonctions définies sur $[0, L]$.
- On pourra calculer la **transformée** de Fourier d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, non périodique.

Idée

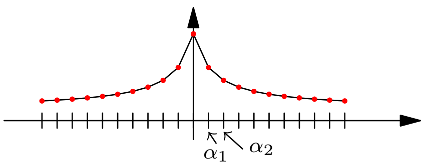
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, T-périodique, avec T très grand. La série de Fourier en notation complexe de f est

$$Ff(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{T} e^{i\frac{2\pi n}{T}y}$$

où

$$c_n = \int_0^T f(x)e^{i\frac{2\pi n}{T}x}dx$$

Posons $\alpha_n = \frac{2\pi n}{T}$. On considère l'application qui associe c_n avec α_n ; $c_n \mapsto \alpha_n$



Si T est très grand, α_n et α_{n+1} sont très proche, pourquoi ne pas considérer la courbe continue $\alpha \mapsto c(\alpha)$ où

$$c(\alpha) = \int_0^T f(x)e^{-i\alpha x}dx$$

Etant donnée f, on construit une nouvelle fonction

$$\alpha \mapsto c(\alpha) = \mathcal{F}f(\alpha)$$

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *ou dans* $\mathbb{C}$ continue par morceaux et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{|f(x)|}_{\text{valeur absolue ou module de nombre complexe}} dx < +\infty$$

a) La **transformée de Fourier de** f est la fonction $\mathcal{F}f$ ou $\hat{f}$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, définie par

$$\alpha \mapsto \mathcal{F}f(\alpha) = \hat{f}(\alpha) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

b) La **transformée de Fourier inverse de** f est la fonction notée $\mathcal{F}^{-1}f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, définie par

$$x \mapsto \mathcal{F}^{-1}f(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

Théorème *de réciprocité*
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que f et f' sont continues par morceaux, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty, \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)| d\alpha < +\infty$$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

Si f est continue en x, alors $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$

Remarque

$$f \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \hat{f} = \mathcal{F}f \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longmapsto} f$$

si f est continue et les autres hypothèses sont satisfaites.

Interprétation

f peut représenter un signal sonore, optique, ... *en général, x représente le temps.* $\hat{f}(\alpha)$ représente l'intensité des fréquences α $\left(\frac{\alpha}{2\pi} \text{ en fait}\right)$. Parfois, on veut modifier le son : "atténuer les aigus" consiste à modifier le son pour diminuer les intensités associées aux valeurs élevées de $|\alpha|$.

Exemple

$$f(x) = e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ e^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a) **trouver** $\hat{f}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-|x|}| dx = 2 \int_{0}^{+\infty} e^{-x} dx = 2 \left. \frac{e^{-x}}{-1} \right|_{0}^{+\infty} = 2 < +\infty$$

Donc $\mathcal{F}f$ est bien définie.

$$\mathcal{F}f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{x} e^{-i\alpha x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-x} e^{-i\alpha x} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\alpha)x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-(1+i\alpha)x} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{(1-i\alpha)x}}{1-i\alpha}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(1+i\alpha)x}}{-(1+i\alpha)}\bigg|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1-i\alpha} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+i\alpha}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1+i\alpha+1-i\alpha}{1+\alpha^2} \right)$$

$$\Longrightarrow \mathcal{F}f(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{1+\alpha^2}$$

Car

$$\lim_{x \to -\infty} e^{(1-i\alpha)x} = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{e^{x}}_{\to 0} \underbrace{e^{-i\alpha x}}_{|e^{-i\alpha x}|=1} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-(1+i\alpha)x} = e^{-(1+i\alpha)x} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} \underbrace{e^{-i\alpha x}}_{|e^{-i\alpha x}|=1} = 0$$

b) **Utilisation du théorème de réciprocité**

$$f'(\alpha) = \begin{cases} -e^{-x} & x > 0 \\ e^{x} & x < 0 \end{cases} \qquad f' \text{est continue par morceaux}$$

De plus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}f(\alpha)| d\alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\alpha^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \arctan(\alpha)\bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \sqrt{2\pi} < +\infty$$

Le théorème de réciprocité affirme que

$$f(x) = e^{-|x|} = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} dx$$

$$\Longrightarrow e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\alpha^2} e^{i\alpha x} d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+\alpha^2} dx$$

c) Vérification directe

- $x \geqslant 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+\alpha^2} d\alpha \overset{\substack{\text{Analyse III} \\ \text{chapitre 12}}}{=} 2\pi \sum_{k} \text{Rés}_{z_k} \left(\frac{e^{i\alpha x}}{1+\alpha^2} \right)$$

z_k est une singularité *variable* α dans le **domaine supérieur**.

Singularités

$$\alpha = \pm i \longrightarrow z_1 = i \text{ pôle d'ordre } 1$$

$$\text{Rés}_{z_1} \left(\frac{e^{i\alpha x}}{1+\alpha^2} \right) = \lim_{z \to i} (z-i) \frac{e^{ixz}}{(z+i)(z-i)} = \frac{e^{-x}}{2i}$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{+} \infty \frac{e^{i\alpha x}}{1+\alpha^2} d\alpha \overset{x \geq 0}{=} 2\pi i \frac{e^{-x}}{2i} = \pi e^{-x} \overset{x \geq 0}{=} \pi e^{-|x|}$$

- $x < 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{1+\alpha^2} d\alpha \overset{\beta=-\alpha}{=} -\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{e^{i\beta(-x)}}{1+\beta^2} d\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\beta(-x)}}{1+\beta^2} d\beta$$
$$\overset{-x \geq 0}{=} \pi e^{-x} = \pi e^{x} \overset{x \leq 0}{=} \pi e^{-|x|}$$

15.1 Propriétés de la transformée de Fourier

Soit $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux, telles que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx < +\infty$$

On utilise les deux notations $\mathcal{F}f, \mathcal{F}g$ ou $\hat{f}, \hat{g}$

1. **Continuité** $\hat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue et $\lim\limits_{\alpha \to \pm\infty} \hat{f}(\alpha) = 0$
2. **Linéarité** $\mathcal{F}(af + bg)(\alpha) = a\mathcal{F}f(\alpha) + b\mathcal{F}g(\alpha)$
3. **Transformée de Fourier de la dérivée**
   Si $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)| dx < +\infty$, alors

   $$\mathcal{F}f'(\alpha) = i\alpha \mathcal{F}f(\alpha) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

   plus généralement, si $f \in C^n(\mathbb{R})$, et

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(k)}(x)| dx < +\infty \qquad \text{pour } k = 1, 2, ..., n$$

   Alors $\mathcal{F}(f^{(k)}(\alpha)) = (i\alpha)^k \mathcal{F}f(\alpha)$
4. **Décalage et changement d'échelle** si $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, et $g(x) = f(a(x+b))$, alors

   $$\mathcal{F}g(\alpha) = e^{i\alpha b} \frac{1}{|a|} \mathcal{F}f\left(\frac{\alpha}{a}\right)$$
5. **Identité de Plancherel** si de plus,

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2 dx < +\infty \text{ alors } \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)]^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{|\mathcal{F}f(\alpha)|^2}_{\text{module au carré du nombre complexe}} d\alpha$$

6. **Transformée de Fourier en sinus et cosinus**

   a) Si f est paire, $f(-x) = f(x), x \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathcal{F}f(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(x)\cos(\alpha x)dx, \text{ et } \mathcal{F}f \text{ est aussi paire.}$$

   *Appelée **"Transformée de Fourier en cosinus de f"***
   Les conclusions du théorème de réciprocité deviennent *sous les mêmes hypothèses qu'avant.*

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \hat{f}(\alpha)\cos(\alpha x)dx$$

   b) Si f est impair, $f(-x) = -f(x), x \in R$, alors

$$\mathcal{F}f(\alpha) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(x)\sin(\alpha x)dx, \text{ et } \mathcal{F}f \text{ est aussi impaire.}$$

   *Appelée **"Transformée de Fourier en sinus de f"***
   La conclusion du théorème de réciprocité devient

$$f(x) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \hat{f}(\alpha)\sin(\alpha x)dx$$

Vérification de quelques propriétés

(4) $g(x) = f(a(x+b))$ **cas où** $a < 0$ Alors

$$\mathcal{F}g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\alpha)e^{-i\alpha x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(a(x+b))e^{-i\alpha x}dx$$

$y = a(x+b)$ et $dy = adx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-\infty} f(y)e^{i\alpha\left(\frac{y}{a}-b\right)}dx$$

$$= \frac{1}{-a}e^{i\alpha b}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-i\frac{\alpha}{a}y}dx$$

$$= \frac{1}{-a}e^{i\alpha b}\mathcal{F}f\left(\frac{\alpha}{a}\right) \overset{\text{a} \leq 0}{=} \frac{1}{|a|}e^{i\alpha b}\mathcal{F}f\left(\frac{\alpha}{a}\right)dx$$

(5) On vérifie une égalité plus générale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathcal{F}f(\alpha)}\mathcal{F}g(\alpha)d\alpha$$

Pour retrouver Plancherel, prendre $f = g$

Vérification de cette égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx \overset{\text{réciprocité}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}g(\alpha)e^{i\alpha x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)\mathcal{F}g(\alpha)e^{i\alpha x}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \mathcal{F}g(\alpha)\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\overline{e^{-\alpha x}}}_{=\overline{\mathcal{F}f(\alpha)}} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \mathcal{F}g(\alpha)\overline{\mathcal{F}f(\alpha)}$$

15.2 Le produit de convolution

Définition Soit, f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|dx < +\infty$$

Le **produit de convolution** de f avec g est la fonction notée $f * g$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)g(t)|dt$$

15.2.1 Propriétés

1. **Commutativité**

$$(f * g)(x) = (g * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)f(t)dt$$

Démonstration

$$f(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(x)dt \overset{y=x-t}{=} \int_{+\infty}^{-\infty} f(y)g(x-y)(-dy) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y)f(y)dy = (g*f)(x)$$

2. **Associativité**

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

3. **Distributivité par rapport à l'addition**

$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$$

4. **Transformée de Fourier**

$$\mathcal{F}(f * g)(\alpha) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}f(\alpha)\mathcal{F}g(\alpha)$$

5. Si, de plus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|dx < +\infty \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |g'(x)|dx < +\infty$$

alors

$$(f * g)'(x) = (f' * g)(x) = (f * g')(x)$$

Vérification de la propriété 4

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f*g)(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(f*g)(x)e^{-i\alpha x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\ e^{-i\alpha x}\int_{-\infty}^{+\infty}dt f(x-t)g(t)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\ g(t)\int_{-\infty}^{+\infty}dx\ e^{-i\alpha x} \overset{y=x-t(t\text{ fixé})}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\ g(t)\int_{-\infty}^{+\infty}dy\ e^{-i\alpha(y+t)}f(y)\\
&= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\ g(t)e^{-i\alpha t}}_{\mathcal{F}g(\alpha)}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}dy\ e^{-i\alpha y}}_{\sqrt{2\pi}\mathcal{F}f(\alpha)} = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}f(\alpha)\mathcal{F}g(\alpha)
\end{aligned}$$

Vérification de la propriété 5

$$\begin{aligned}
(f*g)'(x) &= \frac{d}{dx}(f*g)(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)g(t)dt\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dx}f(x-t)g(t)dt\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}f'(x-t)g(t)dt = (f'*g)(x)\\
&\overset{\text{commutativité}}{\Longrightarrow} (f*g)'(x) = (g*f)'(x) = (f'*g)(x) = (f*g')(x)
\end{aligned}$$

Utilisation du produit de convolution

Filtres linéaires invariants dans le temps

Exemple 1

micro signal entrant sonore, signal sortant électrique.

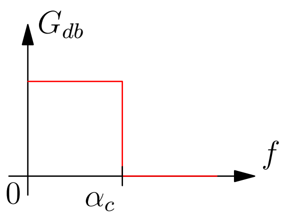
haut-parleur signal entrant électrique, signal sortant sonore.

Les filtres sont conçus pour que

$$g = h * f \equiv \text{signal sortant} = \text{réponse impulsionnel du filtre} * \text{signal entrant}$$

Observons que $\mathcal{F}g(\alpha) = \sqrt{2\pi}\ \underbrace{\mathcal{F}h(\alpha)}_{\text{fonction de transfert}}\ \mathcal{F}f(\alpha)$. En général, on construit le filtre pour que $\mathcal{F}h$ ait une forme particulière.

Exemple 2

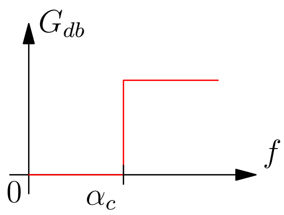


Filtre passe-bas

$$\mathcal{F}h(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\alpha| \leqslant \alpha_c \\ 0 & \text{si } |\alpha| > \alpha_c \end{cases}$$

$\longrightarrow$ le filtre laisse passer les fréquences inférieures à α_c

Exemple 3

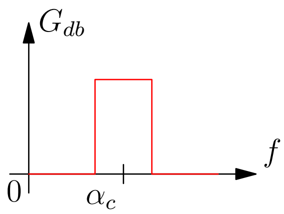


Filtre passe-haut

$$\mathcal{F}h(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\alpha| \leqslant \alpha_c \\ 1 & \text{si } |\alpha| > \alpha_c \end{cases}$$

$\longrightarrow$ le filtre laisse passer les fréquences supérieures à α_c

Exemple 4



Filtre passe-bandes

$$\mathcal{F}h(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_c - \alpha_0 \leqslant |\alpha| \leqslant \alpha_c + \alpha_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ le filtre laisse passer les fréquences comprise dans une certaine bande autour de α_c

Remarque 1 Une fois qu'on a défini $\mathcal{F}h$, on trouve la réponse impulsionnelle en calculant $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}h)$.

Remarque 2 On peut mettre plusieurs filtres en série

$$g = h_3 * h_2 * h_1 * f$$

Interprétation de l'associativité

Remplacer les deux premiers filtres par un seul, avec une réponse impulsionnelle de $h_2 * h_1$.

Chapitre 16

Transformée de Laplace

Laplace 1749 – 1827 Fourier 1758 – 1830

Lien heuristique entre transformées de Fourier et de Laplace

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, sa transformée de Fourier est $\mathcal{F}g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\mathcal{F}g(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\alpha t} dt$$

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, supposons que

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors

$$\mathcal{F}g(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt$$

Posons $i\alpha = z, \quad z \in \mathbb{C} \quad \alpha = -iz$

$$\mathcal{F}g(\alpha) = \mathcal{F}g(-iz) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t) e^{-i(-iz)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{0}^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt}_{\substack{\text{transformée de Laplace} \\ \text{de } f \text{ en } z}}$$

Il n'y a pas de raisons de se limiter aux nombres imaginaires purs.

Définition

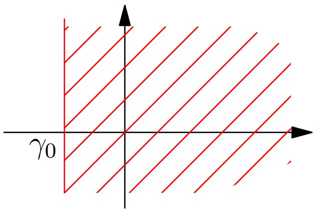
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux *étendue à* $\mathbb{R}$ *en posant* $f(t) = 0$ *si* $t < 0$
Soit $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_{0}^{+\infty} |f(t)| e^{-\gamma_0 t} dt < +\infty$$

La **transformée de Laplace** de f est la fonction notée $\mathcal{L}f$ ou $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$z \mapsto \mathcal{L}(f)(z) = F(z) \overset{\text{déf}}{=} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) \geqslant \gamma_0$ où γ_0 est appelé une **abscisse de convergence** de f.



Remarque Si $Re(z) \geqslant \gamma_0$, alors $(\mathcal{L}f)(z)$ est bien définie. En effet

$$|e^{-zt}| = |e^{-(Re(z)+iIm(z)t)}| = |e^{-Re(z)}|\underbrace{|e^{-iIm(z)t}|}_{=1} = e^{-Re(z)t} \leqslant e^{-\gamma_0 t}$$

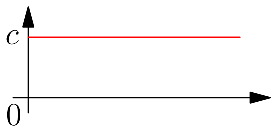
Donc

$$\int_0^{+\infty} |f(t)||e^{-zt}|dt \leqslant \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-\gamma_0 t}|dt < +\infty$$

L'intégrale qui défini $\mathcal{L}(f)(z)$ est absolument convergente.

Exemple 1

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = c, c \in \mathbb{R}_+$, trouver $\mathcal{L}f(z)$.



Abscisse de Convergence

$$\int_t^{+\infty} |f(t)|e^{-\gamma_0 t}dt = |c|\int_t^{+\infty} e^{-\gamma_0 t}dt = |c|\left.\frac{-e^{-\gamma_0 t}}{\gamma_0}\right|_0^{+\infty} = \begin{cases} \frac{|c|}{\gamma_0} & \text{si } \gamma_0 > 0 \\ +\infty & \text{si } \gamma_0 \leqslant 0 \end{cases}$$

Tout $\gamma_0 > 0$ est une abscisse de convergence.

Remarque $\mathcal{F}f$ n'est **pas** définie.

Calcul de $\mathcal{L}f$

$$\mathcal{L}f(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt = c\int_0^{+\infty} e^{-zt}dt = c\left.\frac{e^{-zt}}{z}\right|_{+\infty}^{0} = \frac{c}{z}\left(1 - \lim_{z\to+\infty} e^{-zt}\right)$$

Or

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty}|e^{-zt}| &\overset{z=x+iy}{=} \lim_{t\to+\infty}|e^{-(x+iy)t}| = \lim_{t\to+\infty}|e^{-xt}e^{-iy}| \\ &= \lim_{t\to+\infty}|e^{-xt}|\underbrace{|e^{-iyt}|}_{=1} = \lim_{t\to+\infty} e^{-xt} \overset{x=Re(z)>0}{=} 0 \\ &\Longrightarrow \mathcal{L}f(z) = \frac{c}{z} \end{aligned}$$

Résultat

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{L}(f) : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \\ z & \mapsto & \mathcal{L}f(z) = \frac{c}{z} & \quad \text{si } Re(z) > 0 \end{array}$$

Exemple 2

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = e^{at}, a \in \mathbb{R}$, trouver $\mathcal{L}f(z)$.

Abscisse de Convergence

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-\gamma_0 t}dt = \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-\gamma_0 t}dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-\gamma_0)t}dt = +\infty \text{ si } a < \gamma_0$$

Tout $\gamma_0 > 0$ est une abscisse de convergence.

Calcul de $\mathcal{L}f$

$$\mathcal{L}f(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt = \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-zt}dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-z)t}dt = \left.\frac{e^{(a-z)t}}{a-z}\right|_0^{+\infty}$$

$$Re(z) \geqslant \gamma_0 > a$$

$$\mathcal{L}f(z) = \frac{1}{a-z}\underbrace{\left(\lim_{t\to+\infty}\left(e^{(a-z)t}\right) - 1\right)}_{=-1 \text{ car } \lim\to 0} = \frac{1}{z-a} \qquad \text{si } Re(z) > a$$

Résultat

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{L}(f) : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \\ z & \mapsto & \mathcal{L}f(z) = \frac{1}{z-a} & \qquad \text{si } Re(z) > a \end{array}$$

16.1 Propriétés de la transformée de Laplace

Soit $f, g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux *étendues à $\mathbb{R}$ en posant $f(t) = 0 = g(t)$ si $t < 0$* et $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-\gamma_0 t}dt < +\infty \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} |g(t)|e^{-\gamma_0 t}dt < +\infty$$

On note $\mathcal{L}(f) = F$ et $\mathcal{L}(g) = G$

1. **Linéarité** $\quad \mathcal{L}(af + bf) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g) \qquad a, b \in \mathbb{R}$
2. **Décalage** $\quad$ Soit $a > 0$ et $g(t) = \begin{cases} f(t-a) & \text{si } t \geqslant a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   Alors
   $$\mathcal{L}(g)(z) = e^{-za}\mathcal{L}f(z) \qquad Re(z) \geqslant \gamma_0$$
3. **Changement d'échelle** $\quad$ Soit $a \geqslant 0$ et $g(t) = f(at)$. Alors
   $$\mathcal{L}(g)(z) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f)\left(\frac{z}{a}\right) \qquad Re(z) \geqslant \gamma_0 a$$
4. **Holomorphie et dérivée de la transformée de Laplace** $\quad F = \mathcal{L}(f)$ est holomorphe dans le domaine
   $$D = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > \gamma_0\}$$
   De plus
   $$F'(z) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-zt}dt = -\mathcal{L}(h)(z) \qquad \text{où } h(t) = -tf(t)$$

5. **Transformée de la dérivée d'une fonction** Si, de plus, $\gamma_0 > 0, f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ et $\int\limits_0^{+\infty} |f'(t)|e^{-\gamma_0 t}dt < +\infty$ alors γ_0 est une abscisse de convergence de f' et pour tout $z \in D$

$$\mathcal{L}(f')(z) = z\mathcal{L}(f)(z) - f(0)$$

Plus généralement, si $\gamma_0 > 0, f \in C^n(\mathbb{R}_+)$ et $\int\limits_0^{+\infty} |f^{(k)}(t)|e^{-\gamma_0 t}dt < +\infty$, pour $k = 1, 2, ..., n$

Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f^{(k)})(z) &= z^k\mathcal{L}(f)(z) - \sum_{j=0}^{k-1} z^j f^{(k-1-j)}(0) \qquad\qquad z \in D, k = 1, 2, ..., n\\ &= z^k\mathcal{L}(f)(z) - f^{(k-1)}(0) - zf^{(k-2)}(0) - z^2 f^{(k-3)}(0) - \cdots - z^{(k-1)} f(0)\end{aligned}$$

6. **Transformée de Laplace d'une primitive de fonction** Si, de plus, $f \in C(\mathbb{R}_+)$ avec $\gamma_0 > 0$ et si $\phi(t) = \int\limits_0^t f(s)ds$, alors γ_0 est une abscisse de convergence pour ϕ et

$$\mathcal{L}(\phi)(z) = \frac{1}{z}\mathcal{L}(f)(z)$$

7. **Transformée de Laplace du produit de convolution**
Soit $(f * g)(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(t-s)}_{=0 \text{ si } t-s<0} \underbrace{g(s)}_{=0 \text{ si } s<0} ds = \int\limits_0^t f(t-s)g(s)ds$ Alors

$$\mathcal{L}(f * g)(z) = \mathcal{L}(f)(z)\mathcal{L}(g)(z), \forall z \in \mathbb{C} \text{ avec } Re(z) \geqslant \gamma_0$$

16.1.1 Exemples d'utilisations de ces propriétés

Exemple 1 Trouver $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}, a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$
On décompose $\mathcal{L}(f)(z)$ en éléments simples

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\beta}{z-b} \qquad\qquad \alpha, \beta \text{ à trouver}$$

On multiplie les deux membres par $z - a$

$$\frac{1}{z-b} = \alpha + \beta\frac{z-a}{z-b} \xrightarrow{z=a} \frac{1}{a-b} = \alpha$$

On multiplie les deux membres par $z - b$

$$\frac{1}{z-a} = \alpha\frac{z-b}{z-a} + \beta \xrightarrow{z=b} \frac{1}{b-a} = \beta$$

Par conséquent $\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)$ or

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-a} &= \mathcal{L}(g)(z), \text{ où } g(t) = e^{at}\\ \frac{1}{z-b} &= \mathcal{L}(h)(z), \text{ où } g(t) = e^{bt}\end{aligned}$$

On a donc

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{a-b}(\mathcal{L}(g)(z) - \mathcal{L}(f)(z)) \stackrel{\text{linéarité}}{=} \mathcal{L}\left(\frac{1}{a-b}(g-h)\right)(z)$$

$$\Longrightarrow f(t) = \frac{1}{a-b}(g(t) - h(t)) = \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$$

Exemple 2 Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t^2$. Calculer $\mathcal{L}(f)$.

Idée Utiliser la transformée de Laplace de la dérivée seconde.

$$\mathcal{L}(f'')(z) = z^2\mathcal{L}(f)(z) - f'(0) - zf(0)$$

Or

$$f'(t) = 2t \qquad f'(0) = 0$$
$$f''(t) = 2 \qquad f''(0) = 0$$

Donc $\mathcal{L}(f'')(z) = \frac{2}{z}$

$$\frac{2}{z} = z^2\mathcal{L}(f)(z) - 0 - z0 \Longrightarrow \mathcal{L}(f)(z) = \frac{2}{z^3} \qquad Re(z) > 0$$

16.1.2 Vérification de certaines de ces propriétés

(4) $(\mathcal{L}(f))'(z) = \mathcal{L}(h)(z)$, **où** $h(t) = -tf(t)$

$$F(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt$$

$$F'(z) = \frac{d}{dz}\left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt\right) \overset{\text{Hyp. utilisée}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{d}{dz}\left(f(t)e^{-zt}\right)dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \underbrace{f(t)(-t)}_{=h(t)}dt = \int_0^{+\infty} h(t)e^{-zt}dt = \mathcal{L}(h)(z)$$

(5) $\mathcal{L}(f')(z) = z\mathcal{L}(f)(z) - f(0)$ Pour simplifier, on suppose que f est bornée $|f(t)| \leqslant M, \forall t \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(f')(z) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-zt}dt = \int_0^{+\infty} f(t)ze^{-zt}dt + \left[f(t)e^{-zt}\right]_0^{+\infty}$$

$$u'(t) = f'(t) \qquad u(t) = f(t)$$
$$v(t) = e^{-zt} \qquad v'(t) = -ze^{-zt}$$

$$= z\int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt + lim_{t\to+\infty}f(t)e^{-zt} - f(0)$$

Or pour $z \in \mathbb{C}$ avec $Re(z) \geqslant \gamma_0$

$$0 \leqslant |f(t)e^{-zt}| = |f(t)||e^{-zt}| \overset{Re(z)\geqslant\gamma_0}{\leqslant} |f(t)|e^{-\gamma_0 t} \leqslant Me^{-\gamma_0 t} \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \gamma_0 > 0$$

Par conséquent

$$\mathcal{L}(f')(z) = z\mathcal{L}(f)(z) - f(0)$$

(6) $(\gamma_0 > 0)$ $\phi(t) = \int_0^t f(s)ds$ primitive de f avec $\phi(0) = 0$

A montrer

$$\mathcal{L}(\phi)(z) = \frac{1}{z}\mathcal{L}(f)(z)$$

Or $\phi'(t) = f(t)$

Donc

$$\mathcal{L}(f)(z) = \mathcal{L}(\phi')(z) \overset{(5)}{=} z\mathcal{L}(\phi)(z) - \underbrace{\phi(0)}_{=0}$$

$$\mathcal{L}(\phi)(z) = \frac{1}{z}\mathcal{L}(f)(z)$$

16.2 Inversion de la transformée de Laplace

Théorème Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *étendue à* $\mathbb{R}$ *en posant* $f(t) = 0$ *si* $t < 0$ telle que f et f' sont continues par morceaux, et soit $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\int\limits_0^{+\infty} |f(t)|e^{-\gamma_0 t}dt < +\infty$.
Si la transformée de Laplace $F(z) = \mathcal{L}(f)(z)$ est telle que

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(\gamma + is)|ds < +\infty \qquad \text{pour un certain } \gamma > \gamma_0$$

et si on pose

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(t) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\gamma + is)e^{(\gamma+is)t}ds$$

Alors

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(t) = \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2}, t \in \mathbb{R}$$

Remarque 1 $\mathcal{L}^{-1}$ est appelée la **transformée de Laplace inverse**

Remarque 2 Si f est continue et $f(0) = 0$, alors

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\gamma + is)e^{(\gamma+is)t}ds, \forall t \in \mathbb{R}$$

Remarque 3

$$\text{Si } t < 0 \qquad \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2} = 0$$

$$\text{Si } t = 0 \qquad \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2} = \frac{1}{2}f(0+0)$$

Remarque 4 L'intégrale porte sur une droite verticale dans le plan complexe.

Démonstration

$$F(\gamma + is) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-(\gamma+is)t}dt = \int\limits_0^{+\infty} \underbrace{f(t)e^{-\gamma t}}_{=\phi(t)} e^{-ist}dt$$

$$= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\phi(s), \text{ où } \phi(t) = f(t)e^{-\gamma t} \textit{ donc } \phi(t) = 0 \textit{ si } t < 0$$

Donc $\hat{\phi}(s) = \mathcal{F}\phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(\gamma + is)$

D'après le théorème de réciprocité

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{\phi}(t) = \frac{\phi(t-0)+\phi(t+0)}{2}$$

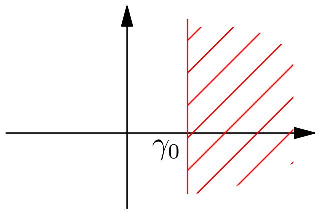
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(s) e^{its} ds = e^{-\gamma t} \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\gamma+is) e^{(\gamma+is)t} ds = \frac{\phi(t-0)+\phi(t+0)}{2}$$

Exemple Trouver une fonction f dont la transformée de Laplace est

$$F(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)^2}$$

On va calculer $\mathcal{L}^{-1}(F)$.



$\mathcal{L}(f)$ est holomorphe dans le demi-plan Re(z) $> \gamma_0$. On prend donc γ tel que toutes les singularités de F sont à gauche de l'axe $Re(z) = \gamma \implies \gamma > 2$

On vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\gamma+is)| < +\infty$$

Vrai car $F(\gamma+is) = \frac{p(\gamma+is)}{q(\gamma+is}$, avec $p(z) = z, q(z) = (z+1)(z-2)^2$ et degré de $q = 3 \geqslant 2 + \underbrace{\text{degré de p}}_{=1}$.

Pour $t \geqslant 0$, il s'agit de calculer $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\gamma+is) e^{(\gamma+is)t} ds$. Ceci ressemble au calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{i\alpha x} dx$.

Or

$$\int_{Re(z)=\gamma} F(z) e^{zt} dz \overset{\substack{z=\gamma+is,\, s\in\mathbb{R} \\ dz = ids}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\gamma+is) e^{(\gamma+is)t} i ds$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} F(\gamma+is) e^{(\gamma+is)t} ds = \frac{1}{i} \left(2\pi i \sum_k \text{Rés}_{z_k} \left(F(z) e^{zt} \right) \right)$$

Toutes les singularités sont à gauche de l'axe Re(z) = γ

Posons $\quad h(z) = F(z) e^{zt}$ Deux pôles $\quad z_1 = -1$, d'ordre 1
$z_2 = 2$, d'ordre 2

$$\text{Rés}_{-1}(h) = \lim_{z\to -1} (z+1) h(z) = \lim_{z\to -1} (Z+1) \frac{z e^{zt}}{(z+1)(z-2)^2} = \lim_{z\to -1} \frac{z e^{zt}}{(z-2)^2} = -\frac{1}{9} e^{-zt}$$

$$\text{Rés}_2(h) = \lim_{z\to 2} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left((z-2)^2 H(z) \right) = \lim_{z\to 2} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z+1} e^{zt} \right) = \lim_{z\to 2} \left(\frac{z+1-z}{(z+1)^2} e^{zt} + \frac{z}{z+1} t e^{zt} \right)$$

$$= \lim_{z\to 2} \left(\frac{1}{(z+1)^2} e^{zt} + \frac{z}{z+1} t e^{zt} \right) = \frac{1}{9} e^{2t} + \frac{2}{3} t e^{2t}$$

Ainsi

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\gamma+is)e^{(\gamma+is)t}ds = \frac{1}{2i\pi}2\pi i\left(-\frac{1}{9}e^{-t}+\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{3}t\right)e^{2t}\right)$$
$$= -\frac{1}{9}e^{-t}+\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{3}t\right)e^{2t}$$

On trouve donc

$$\mathcal{L}(f)(z) = F(z) \qquad \text{avec} \qquad f(t) = -\frac{1}{9}e^{-t}+\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{3}t\right)e^{2t}$$

pour z avec $Re(z) \geqslant \gamma_0$. Tout $\gamma_0 > 2$ est une abscisse de convergence de f.

Formule

$$\mathcal{L}(F)(t) = \sum_k \text{Rés}_{z_k}\left(F(z)e^{zt}\right)$$

Si F est une fonction rationnelle comme ci-dessus. *Hyp* : $deg\ q \geqslant 2 + deg\ p, F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$

Chapitre 17

Applications aux équations différentielles

But

Présenter des méthodes basées sur les séries de Fourier, transformées de Fourier et de Laplace pour résoudre des équations différentielles.

17.1 Le problème de Cauchy

Trouver une solution $y(t)$ de l'équation différentielle

$$a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = f(t), t > 0$$

avec conditions initiales $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y_1$, où $a_0, a_1, a_2, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ donnés ($a_1 \neq 0$), et $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée. On cherche $y(t)$.

17.1.1 Méthode de résolution

Etape 1 On prend la transformée de Laplace des 2 membres de l'opération

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(a_2y'' + a_1y' + a_0y) = \mathcal{L}(f)(z)\\
\overset{\textbf{Linéarité}}{\Longleftrightarrow}\ &a_2\mathcal{L}(y'')(z) + a_1\mathcal{L}(y')(z) + a_0\mathcal{L}(y)(z)\\
\overset{\textbf{Propriété de }\mathcal{L}}{\Longleftrightarrow}\ &a_2(z^2\mathcal{L}(y)(z) - zy(0) - y'(0)) + a_1(z\mathcal{L}(y)(z) - y(0)) + a_0\mathcal{L}(y)(z)\\
{\scriptstyle y(z)=\mathcal{L}(y)(z)}\ &= \mathcal{L}(f)(z)\\
\textbf{Conditions Initiales}\ \overset{F(z)=\mathcal{L}(f)(z)}{\Longleftrightarrow}\ &a_2(z^2y(z) - zy_0 - y_1) + a_1(zy(z) - y_0) + a_0y(z) = F(z)\\
&\Longleftrightarrow\ (a_2z^2 + a_1z + a_0)y(z) = F(z) + a_2y_0z + a_1y_0 + a_2y_1\\
&\Longleftrightarrow\ y(z) = H(z),\ \text{où } H(z) = \frac{F(z) + a_2y_0z + a_1y_0 + a_2y_1}{a_2z^2 + a_1z + a_0}
\end{aligned}$$

Etape 2 On utilise la formule d'inversion de la transformée de Laplace pour exprimer $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(H)(f)$

Etape 3 On contrôle que le résultat obtenu satisfait bien l'équation et les conditions initiales.

Exemple Résoudre $y''(t) + y(t) = \sin t, t > 0 \qquad y(0) = 1, y'(0) = 1$

D'après la table

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$$

$$H(z) = \frac{\frac{1}{z^2+1} + z + 1}{z^2+1} = \frac{1}{(z^2+1)^2} + \frac{z}{z^2+1} + \frac{1}{z^2+1}$$

De plus

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1+1}{2(z^2+1)^2} = \frac{z^2+1-z^2+1}{2(z^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{z^2+1} - \frac{1}{2}\frac{z^2-1}{(z^2+1)^2}$$

où on doit multiplier par le double de ce coefficient : 1

Finalement

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{3}{2}\underbrace{\frac{1}{z^2+1}}_{=y_1(z)} + \underbrace{\frac{z}{z^2+1}}_{=y_2(z)} - \frac{1}{2}\underbrace{\frac{z^2-1}{(z^2+1)^2}}_{=y_3(z)} \\ &= \frac{3}{2}y_1(z) + y_2(z) - \frac{1}{2}y_3(z) \end{aligned}$$

Donc $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(H)(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{2}y_1 + y_2 - \frac{1}{2}y_3\right)(t) = \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}(y_1)(t) + \mathcal{L}^{-1}(y_2)(t) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}(y_3)(t)$

$$\overset{\text{tables}}{\Longrightarrow} y(t) = \frac{3}{2}\sin t\cos t - \frac{1}{2}t\cos t$$

Etape 3 On vérifie que la fonction $y(t)$ trouvée satisfait bien l'équation et les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

Cas particulier du problème de Cauchy

$$a_2 = 1 \qquad a_1 = 0 \qquad a_0 = \lambda \in \mathbb{R} \qquad f(t) = 0$$

$\begin{cases} y''(t) + \lambda y(t) = 0 \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1 \end{cases}$ Discuter la nature des solutions en fonction de la valeur de λ

$$z^2 y(z) - z\underbrace{y(0)}_{y_0} - \underbrace{y'(0)}_{y_1} + \lambda y(z) = 0$$

$$(z^2+\lambda)y(z) = zy_0 + y_1 \iff y(z) = \frac{zy_0+y_1}{z^2+\lambda}$$

1$^{\text{er}}$ cas $\lambda = 0$ Dans ce cas, l'équation était $y''(t) = 0$. La solution est $y(t) = y_0 + y_1 t, t > 0$.

2$^{\text{ème}}$ cas $\lambda < 0$ Écrivons $\lambda = -w^2$, avec $w \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$y(z) = \frac{y_0 z + y_1}{z^2 - w^2} = y_0 \underbrace{\frac{z}{z^2-w^2}}_{\text{ligne 11}} + \frac{y_1}{w}\underbrace{\frac{w}{z^2-w^2}}_{\text{ligne 10}} = y_0 y_1(z) + \frac{y_1}{w}y_2(z)$$

$$\begin{aligned} &\text{avec } y_1(t) = \frac{z}{z^2-w^2},\ y_2(t) = \frac{w}{z^2-w^2} \\ &\Longrightarrow y(t) = y_0\mathcal{L}^{-1}(y_1)(t) + \frac{y_1}{w}\mathcal{L}^{-1}(y_2)(t) = y_0\cosh(wt) + \frac{y_1}{w}\sinh(wt) \\ &\qquad = y_0\cosh(\sqrt{-\lambda}t) + \frac{y_1}{\sqrt{-\lambda}}\sinh(\sqrt{-\lambda}t) \end{aligned}$$

3$^{\text{ème}}$ cas $\lambda > 0$ Ecrivons $\lambda = w^2$, avec $w \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$y(z) = \frac{y_0 z + y_1}{z^2 + w^2} = y_0 \underbrace{\frac{z}{z^2+w^2}}_{\text{ligne 7}} + \frac{y_1}{w}\underbrace{\frac{w}{z^2+w^2}}_{\text{ligne 6}}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} &y(t) = \mathcal{L}^{-1}(y)(t) = y_0\cos(wt) + \frac{y_1}{w}\sin(wt) \\ \Longrightarrow\ &y(t) = y_0\cos(\sqrt{\lambda}t) + \frac{y_1}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}t) \end{aligned}$$

17.2 Problème de Sturm-Liouville

Soit $L > 0$

$1^{\text{ère}}$ partie du problème

Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que l'équation $y''(t) + \lambda y(t) = 0, t \in]0, L[$, possède une solution non triviale *(c'est-à-dire $y(t) \neq 0$ dans $]0, L[$)* pour $t \in]0, L[$ avec $y(0) = y(L) = 0$.

$2^{\text{ème}}$ partie du problème

Pour les λ en question, donner l'expression explicite des solutions.

Remarque 1 Les différences avec le problème de Cauchy

- on cherche une solution dans un intervalle borné
- pas de condition sur $y'(o)$
- condition en $L : y(L) = 0$

Remarque 2 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, la fonction constante $y(t) = 0$ est une solution dite triviale du problème. On cherche des valeurs de λ pour lesquelles il y a une autre solution.

17.2.1 Résolution du problème de Sturm-Liouville

Pour le problème de Cauchy $y''(t) + \lambda y(t) = 0$, avec $y(0) = y_0 = 0, y'(0) = y_1$, il y a 3 cas possibles

$$\begin{aligned}
&\lambda = 0 \text{ et } y(t) = y_1 t \\
&\lambda < 0 \text{ et } y(t) = \frac{y_1}{\sqrt{-\lambda}} \sinh(\sqrt{-\lambda} t) \\
&\lambda > 0 \text{ et } y(t) = \frac{y_1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} t)
\end{aligned}$$

Pour la résolution de problème de Sturm-Liouville on pose une contrainte sur y_1, mais il faut que $y(L) = 0$.

$$\begin{array}{ll}
\lambda = 0 & y(L) = y_1 L = 0 \iff y_1 = 0 \iff y(t) = 0 \\
\lambda < 0 & y(L) = \dfrac{y_1}{\sqrt{-\lambda}} \sinh(\underbrace{\sqrt{-\lambda} L}_{\neq 0}) = 0 \iff y_1 = 0 \iff y(t) = 0 \\
\lambda > 0 & y(L) = \dfrac{y_1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} L) = 0 \iff y_1 = 0 \iff y(t) = 0 \quad \lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2} n \in \mathbb{Z}_+^*
\end{array}$$

Conclusion si $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, n \in \mathbb{Z}_+^*$, alors il y a des solutions non triviales de la forme

$$y(t) = \frac{y_1 L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{L} t\right) = \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} t\right)$$

où $\alpha_n = \frac{y_1 L}{n\pi}$ est une constante arbitraire.

17.2.2 D'autres types d'équations différentielles

a) Trouver une solution $y(x)$ de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$y''(x) + wy(x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, w, f \text{ donnés}$$

On suppose que $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$

Méthode on écrit la transformée de Fourier des 2 membres

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(y'' + wy)(\alpha) &= \mathcal{F}(f)(\alpha) \\
\Longrightarrow \mathcal{F}(f)(\alpha) &= \mathcal{F}(y'')(\alpha) + w\mathcal{F}(y)(\alpha) \\
&= (i\alpha)^2\mathcal{F}(y)(\alpha) + w\mathcal{F}(y)(\alpha) \\
&= (-\alpha^2 + w)\mathcal{F}(y)(\alpha) \\
\Longrightarrow \mathcal{F}(y)(\alpha) &= \frac{\mathcal{F}(f)(\alpha)}{w - \alpha^2}
\end{aligned}$$

On utilise le théorème de réciprocité pour exprimer y ceci détermine la fonction $y(x)$.

Cas particulier $w = -1, y''(x) - y(x) = f(x)$
Alors

$$\mathcal{F}(y)(\alpha) = -\frac{1}{1-\alpha^2}\mathcal{F}(f)(\alpha)$$

On a vu que $\mathcal{F}(e^{-|\alpha|})(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\alpha^2}$

Donc $\mathcal{F}(y)(\alpha) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathcal{F}(g)(\alpha)\mathcal{F}(f)(\alpha)$, avec $g(\alpha) = e^{-|\alpha|}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \mathcal{F}(y)(\alpha) &= -\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(g)(\alpha)\mathcal{F}(f)(\alpha) \\
&= -\frac{1}{2}\mathcal{F}(g * f)(\alpha) = \mathcal{F}\left(-\frac{1}{2}(g * f)\right)(\alpha)
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
y(x) = -\frac{1}{2}(g * f)(x) &= -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x-u)f(u)du \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-u|}f(u)du
\end{aligned}$$

b) Équation différentielle sur $[0, L]$. Trouver une fonction $2\pi-$périodique $y(x)$ qui est solution de

$$\lambda y''(x) + wy(x) = f(x) \qquad \forall x \in]0, 2\pi[$$

avec les conditions $y(0) = y(2\pi)$ et $y'(0) = y'(2\pi)$. La fonction f est donnée, $2\pi-$périodique et telle que $f \in C^1(]0, 2\pi[)$ et $\lambda, w \in \mathbb{R}$ sont donnés.

Méthode On écrit les séries de Fourier de f et y

$$f(x) = \mathcal{F}(f)(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)]$$

$$y(x) = \mathcal{F}(y)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_m \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \qquad y \in C^1 \text{ donc continue}$$

Les α_n et β_n sont déterminés par la donnée f, on cherche a exprimer les a_n et b_n en fonction des α_n, β_n. On dérive formellement $F(y)(x)$

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}[-na_n \sin(nx) + nb_n \cos(nx)] \\
y''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[-n^2a_n \cos(nx) - n^2b_n \sin(nx)\right]
\end{aligned}$$

On insère ces formules dans l'équation $\lambda y'' + wy = f$

$$\begin{aligned}
&\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \left[-n^2 a_n \cos(nx) - n^2 b_n \sin(nx)\right] + \frac{wa_0}{2} + w \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \\
&= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)] \\
\iff &\frac{wa_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n(w - \lambda n^2) \cos(nx) + b_n(w - \lambda n^2) \sin(nx)\right] \\
&= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)]
\end{aligned}$$

On identifie les composants

$$\frac{wa_0}{2} = \frac{\alpha_0}{2} \qquad a_n(w - \lambda n^2) = \alpha_n \qquad b_n(w - \lambda n^2) = \beta_n$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{\alpha_0}{w} & & w \neq 0 \\
a_n &= \frac{\alpha_n}{w - \lambda n^2} & & \frac{w}{\lambda} \neq n^2, n = 1, 2, \ldots \\
b_n &= \frac{\beta_n}{w - \lambda n^2}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$y(x) = \frac{\alpha_0}{2w} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha_n}{w - \lambda n^2} \cos(nx) + \frac{\beta_n}{w - \lambda n^2} \sin(nx)\right]$$

Remarque

Problème de Cauchy données initiales en 0, équation sur $\mathbb{R}_+$, on utilise la transformée de Laplace

Équation sur $\mathbb{R}$ utilisation de la transformée de Fourier

Recherche de solutions périodique utilisation des séries de Fourier

Chapitre 18

Application aux équations aux dérivées partielles

But

Utiliser les séries de Fourier et les transformées de Fourier et Laplace pour résoudre des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants.

Équations considérées

Équation de la chaleur Décrit la variation de température mais aussi le prix d'un produit dérivé en finance.

Équation des ondes Décrit les vibrations d'une onde élastique mais aussi le mouvement d'une molécule d'ADN.

Équation de Laplace Déformation d'un solide sous l'effet d'un poids mais aussi le mouvement d'une particule libre en mécanique quantique

18.1 Équation de la chaleur dans $\mathbb{R}$

Barre de longueur infinie. $u(x,t)$ = température au point x et à l'instant t. On montre que l'équation suivante est satisfaite.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} && \forall x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,t) &= f(x) && \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée. On suppose que

$$f \in C^1(\mathbb{R}), \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| < +\infty \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(f)(x)| dx < +\infty$$

Résolution

Etape 1 On fixe t et on prend la transformée de Fourier en x.

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(\alpha,t) = a^2 \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\alpha,t) \quad \textit{avec} \quad \mathcal{F}(u)(\alpha,0) = \mathcal{F}(f)(\alpha) \tag{18.1}$$

Posons $v(\alpha,t) = \mathcal{F}(u)(\alpha,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\alpha,t) e^{-ixt} dx$

Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(\alpha,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-i\alpha t}dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{-i\alpha t}dx\right) = \frac{\partial v}{\partial t}(\alpha,t)\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)(\alpha,t) \\ &= (i\alpha)^2\mathcal{F}(u)(\alpha,t) = -\alpha^2 v(\alpha,t)\end{aligned}$$

L'équation 18.1 devient

$$\begin{cases}\frac{\partial v(\alpha,t)}{\partial t} &= -a^2\alpha^2 v(\alpha,t) \\ v(\alpha,t) &= \mathcal{F}(f)(\alpha)\end{cases}$$ On fixe α, ceci est une équation différentielle.

$$v(\alpha,t) = v(\alpha,0)e^{-a^2\alpha^2 t} = \mathcal{F}(f)(\alpha)e^{-a^2\alpha^2 t}$$

Etape 2 Pour trouver $u(x,t)$, on calcule la transformée de Fourier inverse de $v(\alpha,t)$, en considérant t comme fixé.

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(u)(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}v(\alpha,t)e^{i\alpha x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}f(\alpha)e^{-a^2\alpha^2 t}e^{i\alpha x}d\alpha$$

Expression simplifiée pour $u(x,t)$

Table, ligne 9 : $e^{-a^2 t\alpha^2} = \mathcal{F}(g)(\alpha), g$ *fixé* où $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2a^2t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$

Ainsi

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\sqrt{2\pi}\mathcal{F}f\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}g\right)(x,t) = \left(f * \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}g\right)\right)(x,t)$$

Pour indiquer la dépendance en t de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}g$, on écrit

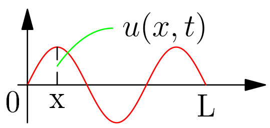
$$G(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

Alors

$$u(x,t) = (G(t) * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}G(t,x-y)f(y)dy$$

18.2 Equation des ondes sur un intervalle

Corde élastique de longueur finie $L > 0$, fixée aux extrémités.



Déplacement $u(x,t)$ = Déplacement verticale de la corde au point x à l'instant t.

On montre que l'équation des ondes suivante est satisfaite

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad x \in]0,L[, t > 0$$

Les données

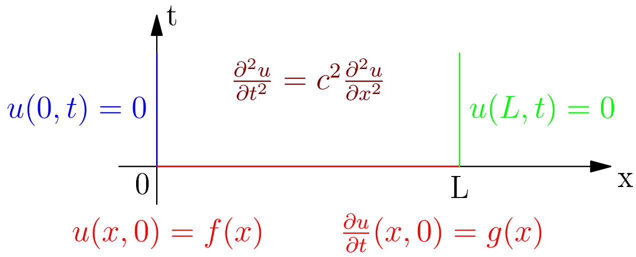
- Deux conditions aux limites $u(0,t) = u(L,t) = 0$
- Deux conditions initiales ($2^{\text{ème}}$ ordre en f)

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) & \text{pour } x \in [0,L] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x) & \text{pour } x \in [0,L] \end{aligned}$$

*A l'instant t, on connait la position initiale **et** la vitesse initiale de la corde*

$$f,g : [0,L] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f,g \in C^3 \qquad \begin{array}{rcl} f(0) &=& f(L) = 0 \\ g(0) &=& g(L) = 0 \end{array}$$

Problème Trouver une solution $u(x,t)$ de l'équation d'onde qui vérifie les deux conditions aux limites **et** les deux conditions initiales.



Résolution

Etape 1 Séparation des variables, on cherche des solutions de la forme

$$u(x,t) = v(x)w(t)$$

du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \overset{EO}{=} c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad \forall t \geqslant 0 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(v(x)w(t)) = v(x)w''(t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(v(x)w(t)) = v''(x)w(t) \end{aligned}$$

On remplace dans l'équation d'onde

$$v(x)w''(t) = c^2 v''(x)w(t) \iff \frac{1}{c^2}\frac{w''(t)}{w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} \qquad \forall x \in]0,L[, \forall t > 0$$

Les deux membres sont égaux à une seule constante, notée $-\lambda$

$$\frac{1}{c^2}\frac{w''(t)}{w(t)} = -\lambda \text{ et } \frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda$$

$$\iff w''(t) + \lambda c^2 w(t) = 0 \qquad v''(x) + \lambda v(x) = 0$$

Conséquence des conditions aux limites

$$\begin{aligned} u(0,t) = 0 \ \forall t > 0 &\iff v(0)w(t) = 0 \ \forall t > 0 \Leftarrow v(0) = 0 \\ u(L,t) = 0 \ \forall t > 0 &\iff v(L)w(L) = 0 \ \forall t > 0 \Leftarrow v(L) = 0 \end{aligned}$$

On a deux problèmes à résoudre

$$v''(x) + \lambda v(x) = 0 \qquad \text{pour } x \in]0, L[\text{ avec } v(0) = v(L) = 0 \longrightarrow \text{ Sturm-Liouville} \tag{18.2}$$

$$w''(t) + \lambda c^2 w(t) = 0 \qquad \text{pour } t > 0 \tag{18.3}$$

Le problème 18.2 est un problème de Sturm-Liouville, les seules solutions non-triviales sont donnés par

$$\lambda_m = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \qquad \text{et} \qquad v_n(x) = \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), n \in \mathbb{N}^*$$

α_n *est une constante ordinaire arbitraire.*

Le problème 18.3 est un problème de Cauchy déjà résolu

$$\begin{aligned} & w''(t) + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 w(t) = 0 \\ \implies \text{pour } n \in \mathbb{N}^* \qquad & w_n(t) = a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) \end{aligned}$$

a_n *et* b_n *sont des constantes arbitraires*

Conclusion pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n(x,t) = v_n(x)w_n(t) = \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right)$$

est solution de l'équation d'onde **avec** les conditions aux imites mais **sans** les conditions initiales.

Etape 2 Superposition, l'équation des ondes est **linéaire** donc pour $N \in \mathbb{N}^*$

$$u_N(x,t) = \sum_{n=1}^{N} u_N(x,t) \qquad \text{est une solution de (EO)}$$

On fait $N \longrightarrow +\infty$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(A_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right)$$

est la solution générale de l'équation d'onde, où $A_n = \alpha_n a_n$ et $B_n = \alpha_n b_n$ sont des constantes arbitraires.

Etape 3 On impose les conditions initiales pour déterminer les A_n et B_n

$$\begin{aligned} u(x,0) = f(x) &\iff \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x) \qquad \forall x \in [0, L] \\ &\iff A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \\ &= \text{ coefficient de la série de Fourier en sinus de } f \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[-A_n \frac{cn\pi}{L} \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + B_n \frac{cn\pi}{L} \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right]$$

donc

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \iff \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) B_n \frac{cn\pi}{L} = g(x)$$
$$\iff B_n \frac{cn\pi}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

Conclusion

La solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) & x \in]0,L[, t>0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t>0 \\ u(x,0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & x \in [0,L] \end{cases}$$

est $u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

Avec

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$
$$B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

Remarque 1 La solution trouvée est la **seule** solution du problème.

Remarque 2 Les conditions $f,g \in C^3$ assurent que la série converge et que $u(x,t)$ est C^2.

18.2.1 Equation de Laplace dans un rectangle

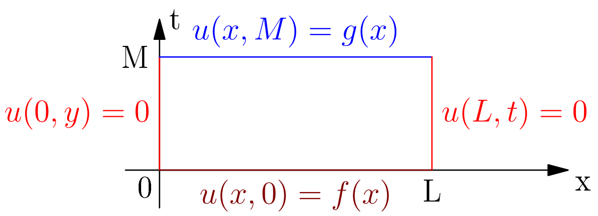
Cas particulier Trouver une solution $u(x,y)$ de

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in]0,L[\times]0,M[\overset{\text{déf}}{=} \Omega$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{array}{ll} u(0,y) = u(L,y) = 0 & \forall y \in [0,M] \\ u(x,0) = f(x), u(x,M) = g(x) & \forall x \in [0,L] \end{array}$$

où $f,g : [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont donnés, $f,g \in C^1$ $f(0) = f(L) = 0, g(0) = g(L) = 0$



Résolution

Etape 1 Séparation des variables, $u(x,y) = u(x)w(y)$. On garde les deux conditions

$$u(0,y) = u(L,y) = 0 \qquad y \in [0,M]$$

On ignore les deux autres conditions pour l'instant

$$\begin{aligned} & v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = 0 \\ \iff & v''(x)w(y) = -v(x)w''(y) \\ \iff & \frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)} = -\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v''(x) + \lambda v(x) = 0 \qquad & x \in]0,L[\\ w''(y) - \lambda w(y) = 0 \qquad & y \in]0,M[\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} u(0,y) = 0 &\iff v(0)w(y) = 0 \Leftarrow v(0) = 0 \\ u(L,y) = 0 &\iff v(L)w(y) = 0 \Leftarrow v(L) = 0 \end{aligned}$$

$$v''(x) + \lambda v(x) = 0 \qquad x \in]0,L[, v(0) = v(L) = 0 \longrightarrow \text{ Sturm-Liouville} \tag{18.4}$$

$$w''(y) - \lambda w(y) = 0 \qquad y \in]0,M[\tag{18.5}$$

Pour 18.4 *problème de Sturm-Liouville*

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \qquad n \in \mathbb{N}^* \\ v_n(x) &= \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad \textit{où } \alpha_n \textit{ est une constante} \end{aligned}$$

Pour 18.5

$$\begin{aligned} w''(y) - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 w(y) = 0 \qquad & \textit{étudier dans les problèmes de Cauchy} \\ w_n(y) = a_n \cosh\left(\frac{n\pi}{L}y\right) + b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \qquad & \textit{où } a_n \textit{ et } b_n \textit{ sont des constantes arbitraires} \end{aligned}$$

Conclusion

pour $n \in \mathbb{N}^*$, une solution est

$$u_n(x,y) = v_n(x)w_n(y) = \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[a_n \cosh\left(\frac{n\pi}{L}y\right) + b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right)\right]$$

Etape 2 Superposition, par linéarité, on pose

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{L}y\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

où A_n et B_n sont des constantes arbitraires.

Etape 3 On impose les conditions aux bords.

$$u(x,0) = f(x) \qquad u(x,M) = g(x) \qquad x \in [0,L]$$

$$\begin{aligned}
u(x,0)=f(x) &\iff \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)\\
&\iff A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\\
u(x,M)=g(x) &\iff \sum_{n=1}^{+\infty}\left[A_n\cosh\left(\frac{n\pi}{L}M\right)+B_n\sinh\left(\frac{n\pi}{L}M\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)=g(x)\\
&\iff A_n\cosh\left(\frac{n\pi}{L}M\right)+B_n\sinh\left(\frac{n\pi}{L}M\right)=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\\
&\iff B_n=\frac{1}{\sinh\left(\frac{n\pi}{L}M\right)}\left[\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx - A_n\cosh\left(\frac{n\pi}{L}M\right)\right]
\end{aligned}$$

Conclusion

La solution des cas particuliers est

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left[A_n\cosh\left(\frac{n\pi}{L}y\right)+B_n\sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\\
\textit{où } A_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\\
B_n &= \frac{1}{\sinh\left(\frac{n\pi}{L}M\right)}\frac{2}{L}\int_0^L\left[g(x)-\cosh\left(\frac{n\pi}{L}M\right)f(x)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx
\end{aligned}$$

Remarque Les hypothèses sur f et g garantissent que la série converge, et que u est C^2 et satisfait l'équation de Laplace.

Cas particulier Trouver une solution $u(x,y)$ de

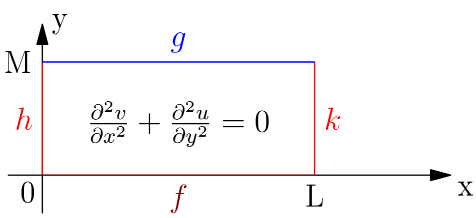
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)=0 \qquad (x,y)\in]0,L[\times]0,M[\overset{\text{déf}}{=}\Omega$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{aligned}
&u(0,y)=h(y) && u(L,y)=k(y) && \forall y\in[0,M]\\
&u(x,0)=f(x) && u(x,M)=g(x) && \forall x\in[0,L]
\end{aligned}$$

où $h,k:[0,M]\longrightarrow\mathbb{R}$ $\quad f,g:[0,L]\longrightarrow\mathbb{R}$ $\quad h,t,f,g\in C^1$
on pose

$$\begin{aligned}
&h(0)=h(M)=0 && k(0)=k(M)=0\\
&f(0)=f(L)=0 && g(0)=g(L)=0
\end{aligned}$$



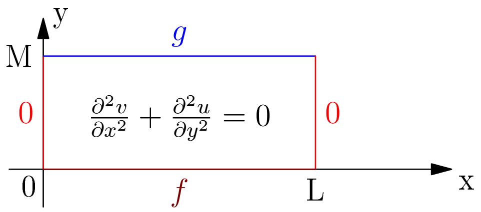
Méthode de résolution

On pose

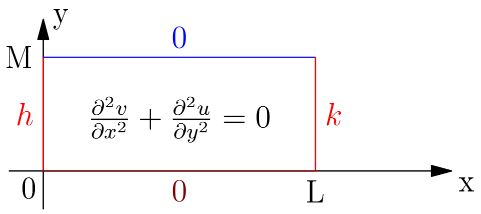
$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$$

où u_1 et u_2 sont solutions de

$$u_1 \begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}(x,y) = 0 & \textit{dans }]0,L[\times]0,M[\\ u_1(0,y) = u_1(L,y) = 0 & y \in [0,M] \\ u_1(x,0) = f(x) \qquad u_1(x,M) = g(x) & x \in [0,L] \end{cases}$$



$$u_2 \begin{cases} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}(x,y) = 0 & \textit{dans }]0,L[\times]0,M[\\ u_2(x,0) = u_2(x,M) = 0 & x \in [0,L] \\ u_2(0,y) = h(y) \qquad u_2(L,y) = k(y) & y \in [0,M] \end{cases}$$



Remarque Pour u_1, on a un problème de type cas particulier alors que pour u_2 c'est un cas particulier avec les rôles inversés pour x et y.