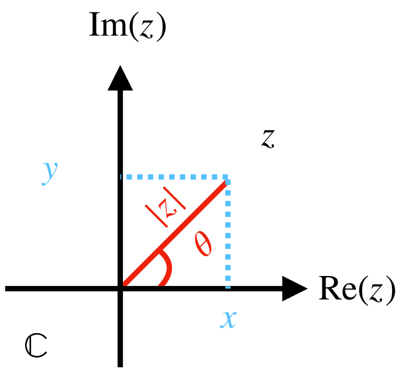
Analyse IV

1. Fonctions holomorphes et équations de Cauchy-Riemann

Rappels sur les nombres complexes

1. $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes
2. $z \in \mathbb{C} \implies z = x + iy$ avec $x = \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$ la partie réelle de z, $y = \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$ la partie imaginaire de z, et $i^2 = -1$.
3. $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \backslash \{0\}$
4. Complexe conjugué de z : $\bar{z} = x - iy$
5. Module de $z \in \mathbb{C}$: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_+$
6. Représentation polaire de $z \in \mathbb{C}^*$: $z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, où θ est appelé l'**argument** du nombre complexe z et est noté $\arg(z)$



Formule d'Euler : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Remarques pour $z \in \mathbb{C}^*$:

1. L'argument de z est défini à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$
2. Par **convention**, la **valeur principale de l'argument de** z est l'unique angle $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $\dfrac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Fonctions complexes

Une fonction complexe d'une variable complexe z à valeur dans $\mathbb{C}$ t.q. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s'écrit $z = x + iy \mapsto f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, où $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui s'appellent respectivement la partie réelle de f (on écrit $u = \mathrm{Re}(f)$) et la partie imaginaire de f (on écrit $v = \mathrm{Im}(f)$).

Remarque : les variables $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ des fonctions u et v **sont** les parties réelles et imaginaires de la variable $z \in \mathbb{C}$ de la fonction f.

Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, la **fonction exponentielle** est définie par
$e^z = e^{x+iy} \equiv e^x(\cos y + i \sin y) \in \mathbb{C}^*$, et on a $u(x, y) = e^x \cos y$ et $v(x, y) = e^x \sin y$
Remarque : e^z n'est pas bijective sur $\mathbb{C}$ car $e^{z+2ik\pi} = e^z, \forall k \in \mathbb{Z}$.
En choisissant y t.q. $-\pi < y < \pi$, la fonction e^z est bijective sur l'ensemble
$\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \in]-\pi, \pi[\}$. Avec cette convention, c'est la « restriction bijective de l'exponentielle complexe ».

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, la fonction **logarithme** est définie par $\log z = \ln|z| + i \arg z$ avec le choix de la valeur principale t.q. $\arg z \in]-\pi, \pi]$. Avec cette convention, c'est la « détermination principale du logarithme complexe » qui correspond parfaitement à la définition de la fonction réciproque de la restriction bijective de l'exponentielle complexe. On a $u(x, y) = \ln|x + iy| = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ et
$v = \arg(x + iy)$.
Remarque : les formules valables en analyse réelle ne sont pas nécessairement valables en analyse complexe. Par exemple, en général, $\log(z_1 z_2) \neq \log(z_1) + \log(z_2)$.

Pour $z \in \mathbb{C}$, les fonctions **trigonométriques** et **hyperboliques** sont définies par
$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ et $\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$.

Limites, continuité et dérivabilité

Les notions de limite, de continuité et de dérivabilité sont analogues à celles de l'analyse réelle.
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction d'une variable complexe z à valeur dans $\mathbb{C}$,

1. f possède une **limite** $l \in \mathbb{C}$ en $z_0 \in \mathbb{C}$, noté $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$, si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.q. $0 < |z - z_0| < \delta$, alors $|f(z) - l| < \varepsilon$.
2. f est **continue** en $z_0 \in \mathbb{C}$ si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$
3. f est **dérivable** en $z_0 \in \mathbb{C}$ si $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe et est finie. La limite qui est appelée **la dérivée de** f **en** z_0 est notée $f'(z_0)$.
4. Étant donné un ouvert $V \subset \mathbb{C}$, on dit que la fonction $f : V \to \mathbb{C}$ est **holomorphe dans** V si f est **définie** et **dérivable** pour **tout** $z \in V$.
5. Soit U et V deux ouverts t.q. $U \subset V \subset \mathbb{C}$. Si $f : V \to \mathbb{C}$ et $g : V \to U$ sont deux fonctions holomorphes dans V et si $g(z) \neq 0, \forall z \in V$, alors $f + g, fg, \dfrac{f}{g}$ et $f \circ g$ sont des fonctions holomorphes dans V.

Équations de Cauchy-Riemann

Remarque : Étant donné un ouvert $V \subset \mathbb{C}$, on l'identifie souvent au sous-ensemble correspondant de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qu'on décrit indifféremment $z = x + iy \in V$ ou $(x, y) \in V$.

Théorème : Soit $V \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit une fonction $f : V \to \mathbb{C}$ t.q.
$z = x + iy \mapsto f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, alors les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

1. f est holomorphe dans V

2. Les fonctions $u \in C^1(V)$, $v \in C^1(V)$ satisfont les équations de Cauchy-Riemann données par $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$ et $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$ pour tout $(x,y) \in V$.

De plus, si f est holomorphe dans V, alors, pour tout $z = x + iy \in V$, on a :
$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$.

Remarques :
1. Les équations de Cauchy-Riemann sont une condition **nécessaire** pour que f soit holomorphe, mais elles ne sont pas une condition suffisante. Si u et v sont continûment dérivables ($u, v \in C^1$) alors elles deviennent une condition suffisante.
2. Pour qu'une fonction f soit holomorphe dans un ouvert V, il suffit de vérifier que les équations de Cauchy-Riemann pour $u = \mathrm{Re}(f) \in C^1(V)$ et $v = \mathrm{Im}(f) \in C^1(V)$ sont satisfaites dans V. Si les équations de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées en $(x_0, y_0) \in V$ alors $f(z)$ n'est pas holomorphe en $z_0 = x_0 + iy_0 \in V$.
3. On utilise souvent la notation $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$ et $v_y = \frac{\partial v}{\partial y}$. Les équations Cauchy-Riemann s'écrivent alors $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$.

La fonction $\log z$ est continue et holomorphe dans $V = \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$
$= \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0, \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$ et on a $f'(z) = \frac{1}{z}$ pour tout $z \in V$.

Pour montrer qu'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ avec $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$ est dérivable en $z = x + iy$, il ne suffit pas de montrer que le champ vectoriel $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$ est continûment dérivable. Il faut en plus vérifier les équations de Cauchy-Riemann pour u et v.

2. Théorème et formule intégrale de Cauchy

Intégration complexe

1. $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est une **courbe simple régulière dans** $\mathbb{C}$ s'il existe un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est une fonction $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ t.q. $t \mapsto \gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$ qui est une **paramétrisation** de Γ décrite par $t \in [a,b]$ avec $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$.
2. $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est une courbe simple régulière **fermée** si $\gamma(a) = \gamma(b)$
3. $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est une courbe simple régulière par morceaux s'il existe $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$ des courbes simples régulières t.q. $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{k} \Gamma_j$
4. Si $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est une courbe simple **fermée** régulière (par morceaux) de paramétrisation γ, on note $\operatorname{int}\Gamma$ l'ensemble ouvert et borné $V \subset \mathbb{C}$ dont le bord est Γ
   - Pour le bord de V on écrit $\partial V = \gamma$
   - Pour l'adhérence de V on écrit $\overline{\operatorname{int}\gamma} = \operatorname{int}\gamma \cup \gamma$
   - γ est dite orientée positivement si le sens de parcours laisse $\operatorname{int}\gamma$ à gauche
5. Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe simple régulière de paramétrisation $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ et soit $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ une fonction **continue. L'intégrale de** f **le long de** Γ est définie par $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz \equiv \int_a^b f\left(\gamma(t)\right)\, \gamma'(t)\,dt$, aussi notée $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$ par abus de notation.
6. Si la courbe $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{k} \Gamma_j$ est simple régulière par morceaux alors, $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{\Gamma_j} f(z)\,dz$

En analyse complexe on identifie souvent par abus de notation la courbe Γ et sa paramétrisation γ.

Théorème de Cauchy

Terminologie : on appelle **domaine simplement connexe** un ensemble ouvert $D \subset \mathbb{C}$ qui « n'a pas de trous ».

Notation : pour désigner une courbe γ contenue dans D on écrit $\gamma \subset D$

Théorème de Cauchy : Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe, $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction **holomorphe** dans D et γ une courbe simple **fermée** régulière (par morceaux) **contenue dans** D. Alors $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

Formule intégrale de Cauchy

Soient $D \subset \mathbb{C}$ un **domaine simplement connexe**, $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction **holomorphe dans** D et γ une courbe simple **fermée** régulière (par morceaux) orientée **positivement contenue dans** D. Alors $\displaystyle f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$ pour tout $z \in \operatorname{int}\gamma$.

Corollaire de la formule intégrale de Cauchy

Avec les mêmes hypothèses que pour la formule intégrale de Cauchy ($D \subset \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe dans D, $\gamma \subset D$ une courbe simple fermée régulière orientée positivement) on a :

1. f est infiniment dérivable dans D
2. $f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi$ pour $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \operatorname{int} \gamma$

Remarques :

1. Pour $n = 0$ la corollaire donne la formule intégrale de Cauchy :
   $f(z) = f^{(0)}(z) = \dfrac{0!}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$
2. Résultat remarquable : le corollaire affirme qu'une fonction holomorphe dans D (c-à-d dérivable pour tout $z \in D$) est infiniment dérivable et donne une formule exprimant la n-ème dérivée pour $n \in \mathbb{N}$

Généralisation du Théorème de Cauchy

Soient $D_0, D_1, \ldots, D_m \subset \mathbb{C}$ où $m \in \mathbb{N}^*$ sont des domaines simplement connexes, tel que :

1. $\partial D_j = \gamma_j$ pour $j = 0,1,\ldots, m$ sont des courbes simples fermées régulières (par morceaux)
2. $\overline{D_j} \subset D_0$ pour tout $j = 1,2,\ldots, m$
3. $\overline{D_j} \cap \overline{D_k} = \varnothing$ pour tout $j = 1,2,\ldots, m$ et tout $k = 1,\ldots, m$ avec $j \neq k$.

Soit $f : D = \overline{D_0} \backslash \displaystyle\bigcup_{j=1}^{m} D_j \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans D.

Alors $\displaystyle\int_{\gamma_0} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f(z)\, dz$, où toutes les courbes γ_j pour $j = 0,1,\ldots, m$ sont orientées positivement.

3. Séries de Laurent, pôles et résidus

Polynôme et série de Taylor d'une fonction holomorphe

Soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}, f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans D et $z_0 \in D$. Pour $N \in \mathbb{N}$, **le polynôme de Taylor de f de degré N en z_0** est $T_N f(z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$

Soit $R > 0$ et $D_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ le plus grand disque de rayon R centré en z_0 et contenu dans D. Par convention si $D = \mathbb{C}$, on a $R = +\infty$ et donc $D_R(z_0) = \mathbb{C}$. Alors :

1. $Tf(z) = \lim_{N\to\infty} T_N f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ existe et est finie pour tout $z \in D_R(z_0)$.
   L'expression $Tf(z)$ s'appelle la **série de Taylor de f en z_0**.
2. De plus, on a $f(z) = Tf(z)$ pour tout $z \in D_R(z_0)$ et R est appelé le **rayon de convergence** de la série de Taylor.
3. Les coefficients de la série de Taylor sont reliés à la formule de Cauchy par le corollaire de la formule intégrale de Cauchy. On a $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi$, où $\gamma \subset D_R(z_0)$ est une courbe simple fermée régulière (par morceaux) orientée positivement tel que $z_0 \in \operatorname{int}\gamma$.

Règle de l'Hôpital : Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et f, g deux fonctions holomorphes au voisinage de z_0, telles que $f(z_0) = 0$, $g(z_0) = 0$ et $g'(z_0) \neq 0$. Alors $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$

Théorème de Liouville : Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction **bornée** et **holomorphe dans** $\mathbb{C}$, alors f est constante.

Développement en série de Laurent d'une fonction holomorphe

Le développement de Taylor d'une fonction donne une série en puissances positives de $z - z_0$ au voisinage d'un point z_0 où f est **holomorphe**.

Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe, $z_0 \in D$ et $f : D\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans $D\backslash\{z_0\}$. Pour $N \in \mathbb{N}$, le **développement de Laurent de f de degré N au voisinage de z_0** est :

$$L_N f(z) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(z - z_0)^n = \frac{c_{-N}}{(z - z_0)^N} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots + c_N(z - z0)^N,$$

avec $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi$, où $\gamma \subset D$ est une courbe simple fermée régulière (par morceaux) orientée positivement tel que $z_0 \in \operatorname{int}\gamma$.

Remarques :

1. La série de Laurent de f peut s'écrire $Lf(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$
   1. La première série $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \ldots$ s'appelle la **partie singulière** de la série de Laurent.
   2. La deuxième série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots$ s'appelle la **partie régulière** de la série de Laurent
2. Si $f : D \to \mathbb{C}$ est holomorphe en z_0 alors la série de Laurent coïncide avec la série de Taylor. En effet, la partie singulière de la série de Laurent est nulle puisque pour $n = 1,2,3,\ldots$ on a $c_{-n} \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{-n+1}}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\xi)(\xi-z_0)^{n-1}\,d\xi = 0$ car la fonction est définie par $f(\xi)(\xi-z_0)^{n-1}$ est holomorphe dans D par le théorème de Cauchy ($n-1 \geq 0$). De plus, les coefficients de la partie régulière donnent la série de Taylor puisque par définition $c_n \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ car f est holomorphe dans D, par le corollaire du théorème de Cauchy

Définitions :

1. $z_0 \in \mathbb{C}$ est un **point régulier** de f si et seulement si la partie singulière de la série de Laurent de f au voisinage de z_0 est nulle. C'est à dire $c_{-k} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $Lf(z) = Tf(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$
2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $z_0 \in \mathbb{C}$ est un **pôle d'ordre** m de f si et seulement si $c_{-m} \neq 0$ et $c_{-k} = 0$ pour tout $k \geq m+1$. C'est à dire $Lf(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$
3. $z_0 \in \mathbb{C}$ est une **singularité essentielle** de f si et seulement si $c_{-k} \neq 0$ pour une infinité d'indices $k \in \mathbb{N}^*$. C'est à dire $Lf(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$
4. Le **résidu** de f en z_0, noté $\text{Rés}_{z_0}(f)$, est la valeur du coefficient c_{-1} de la série de Laurent de f au voisinage de z_0. C'est à dire $\text{Rés}_{z_0}(f) \equiv c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\xi)\,d\xi$ où $\gamma \subset D$ avec $z_0 \in \text{int}\,\gamma$

Étude des pôles d'une fonction et calcul des résidus

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $z_0 \in \mathbb{C}$ est un **zéro d'ordre** n d'une fonction f lorsque $f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ mais $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Si z_0 **n'est pas un zéro** de f alors $f(z_0) \neq 0$ et puisque $f^{(0)}(z_0) = f(z_0) \neq 0$, en posant $n = 0$ on dit que « z_0 est un zéro d'ordre 0 ».

Méthodes :

A. Soit f donnée par $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ où p et q sont des fonctions holomorphes au voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$ qui est un zéro d'ordre k de p et un zéro d'ordre l de q. Deux cas sont possibles :
   1. Si $l > k$ alors z_0 est un **pôle d'ordre** $l - k$ de f
   2. Si $l \leq k$ alors z_0 est un **point régulier** de f et on dit que z_0 est une singularité éliminable de f en posant $f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{p(z)}{q(z)}$

B. Soient f une fonction holomorphe dans $D \backslash \{z_0\}$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $L = \lim\limits_{z \to z_0} \big((z - z_0)^m f(z)\big)$. Si L est finie et $L \neq 0$, alors z_0 est un pôle d'ordre m de f.

Formules de calcul du résidu d'une fonction :

A. Soit f une fonction holomorphe dans $D \backslash \{z_0\}$ et soit $m \in \mathbb{N}^*$, si z_0 est un pôle d'ordre m de f, alors $\text{Rés}_{z_0}(f) = \dfrac{1}{(m-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z)\right]$

B. Soit f définie par $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, où p et q sont des fonctions holomorphes au voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$ telles que z_0 est un zéro d'ordre 1 de q et $p(z_0) \neq 0$, alors $\text{Rés}_{z_0}(f) = \dfrac{p(z_0)}{q'(z_0)}$.

   Remarque : si z_0 est une zéro d'ordre 2 de q et et un zéro d'ordre 1 de p, alors on a $\text{Rés}_{z_0}(f) = \dfrac{2p'(z_0)}{q''(z_0)}$

Polynômes de Taylor usuels

$f(x)$	**Polynôme de Taylor**
$\dfrac{1}{1-z}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$
$\dfrac{1}{1+z}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$
e^z	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$

$f(x)$	**Polynôme de Taylor**
$\sin(z)$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cos(z)$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$
$\ln(1+z)$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$

4. Théorème des résidus et application au calcul d'intégrales

Le Théorème des résidus

Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe, γ une courbe simple fermée régulière (par morceaux) contenue dans D orientée positivement et $z_1, z_2, \ldots, z_m \in \operatorname{int}\gamma$ tel que $z_i \neq z_j$ pour $i \neq j$ où $i = 1,2,\ldots,m$ et $j = 1,2,\ldots,m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. Si une fonction $f : D\backslash\{z_1, z_2, \ldots, z_m\} \to \mathbb{C}$ est holomorphe, alors $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Rés}_{z_k}(f)$

Commentaire : si f est holomorphe, sauf peut être en un nombre fini de points $z_1, z_2, \ldots, z_m$, alors l'intégrale de f le long de n'importe quelle courbe simple fermée régulière γ contenue dans D orientée positivement est donnée par la somme (multipliée par $2\pi i$) des résidus de la fonction f aux points z_k (où f n'est pas holomorphe) **enfermés** à l'intérieur de γ.

Remarque : le théorème de Cauchy est un cas particulier du théorème des résidus. Si f est holomorphe dans D, alors pour toute courbe γ simple fermée régulière contenue dans D, les points $z_k \in \operatorname{int}\gamma$ sont des points réguliers de f. Dans ce cas $\text{Rés}_{z_k}(f) = 0$ pour tous les z_k et le théorème des résidus donne le résultat $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ du théorème de Cauchy.

Application du théorème des résidus au calcul d'intégrales réelles

Calcul d'intégrales de fonction périodiques

On cherche à calculer des intégrales de la forme $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$ avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y) \mapsto f(x, y) = \dfrac{p(x, y)}{q(x, y)}$ où p et q sont des fonctions polynomiales avec $q(\cos\theta, \sin\theta) \neq 0$ pour tout $\theta \in [0,2\pi]$.

Avec la formule d'Euler, on constate que si $z = x + iy = e^{i\theta}$, alors on peut écrire $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$

Méthode :

1. On définit $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $z \mapsto \tilde{f}(z) \equiv \dfrac{1}{iz} f\left(\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right), \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)\right)$
2. On considère γ le cercle unité (c-à-d de rayon 1) centré en $z = 0$ orienté positivement et z_k pour $k = 1,2,\ldots,m$ les singularités de $\tilde{f}$ à l'intérieur de γ ($z_k \notin \gamma$ car $q(\cos\theta, \sin\theta) \neq 0$ pour tout $\theta \in [0,2\pi]$ et donc il n'y a pas de singularité de $\tilde{f}$ sur γ).

3. On applique le théorème des résidus à la fonction $\tilde{f}$ intégrée le long de γ. On a $\displaystyle\int_\gamma \tilde{f}(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Rés}_{z_k}(\tilde{f})$. Mais on remarque que $\displaystyle\int_\gamma \tilde{f}(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{iz} f\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{ie^{i\theta}} f(\cos\theta, \sin\theta) ie^{i\theta}\,d\theta$ est exactement l'intégrale que l'on veut calculer.
4. Résultat : $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Rés}_{z_k}(\tilde{f})$ où z_k pour tout $k = 1,2,\ldots,m$ sont les singularités de $\tilde{f}$ qui sont à l'intérieur du cercle unité γ centré en $z = 0$.

Calcul d'intégrales généralisées

On cherche à calculer des intégrales de la forme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ où p et q sont des fonctions polynomiales telles que $q(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\text{degré}(q) - \text{degré}(p) \geq 2$.

Les conditions sur p et q impliquent que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < \infty$

Méthode : on choisit un nombre réel $r > 0$ et on considère la courbe $\gamma_r = L_r \cup C_r$ orientée positivement où :

- L_r est le segment de droite défini par l'intervalle $[-r, r]$ situé sur l'axe réel
- C_r est le demi-cercle de rayon r, centré en $z = 0$ situé dans le demi-plan supérieur

On définit la fonction $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $g(z) = f(z)e^{i\alpha z} = \dfrac{p(z)}{q(z)}e^{i\alpha z}$ (variable $x \in \mathbb{R}$ remplacée par $z = x + iy \in \mathbb{C}$).

Les seules singularités de g sont des zéros complexes de q. Comme q est une fonction polynomiale et que $q(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors q possède un nombre fini de zéros et **aucun** n'est situé sur l'axe réel.

On choisit $r > 0$ suffisamment grand pour que **tous** les zéros de q situés dans le demi-plan supérieur soient à l'intérieur de γ_r.

D'une part en appliquant le théorème des résidus à la fonction g définie par $g(z) = f(z)e^{i\alpha z}$ intégrée le long de la courbe γ_r on a : $\displaystyle\int_\gamma f(z)e^{i\alpha z}\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Rés}_{z_k}(g)$ où z_k pour $k = 1,2,\ldots,m$ sont les singularités de g situées dans le demi-plan supérieur.

D'autre part, puisque $\gamma_r = L_r \cup C_r$ on a $\displaystyle\int_{\gamma_r} f(z)e^{i\alpha z}\,dz = \int_{L_r} f(z)e^{i\alpha z}\,dz + \int_{C_r} f(z)e^{i\alpha z}\,dz$ et on écrit $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)e^{i\alpha z}\,dz = \lim_{r\to\infty}\int_{L_r} f(z)e^{i\alpha z}\,dz + \lim_{r\to\infty}\int_{C_r} f(z)e^{i\alpha z}\,dz$.

Étude de chaque limite :

1. $\lim\limits_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)e^{i\alpha z}\,dz = \lim\limits_{r\to\infty} \left[2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Rés}_{z_k}(g)\right] = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Rés}_{z_k}(g)$
2. $\lim\limits_{r\to\infty} \int_{L_r} f(z)e^{i\alpha z}\,dz \overset{(*)}{=} \lim\limits_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx$, avec $z = x \in [-r, r] \subset \mathbb{R}$ ($*$), est l'intégrale généralisée que l'on cherche à calculer.
3. On montre que si $\text{degré}(q) - \text{degré}(p) \geq 2$ alors $\lim\limits_{r\to\infty} \int_{C_r} f(z)e^{i\alpha z}\,dz = 0$

Résultat : en combinant l'étude des trois limites, on obtient la formule suivante :
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Rés}_{z_k}(g)$, où g est la fonction définie par $g(z) = f(z)e^{i\alpha z}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et z_k pour $k = 1,2,\dots,m$ sont les singularités de f situés dans le demi-plan supérieur (c-à-d telles que $\text{Im}\, z_k > 0$).

Remarque : pour $z \in C_r$, on a $z = r^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $|e^{i\alpha z}| = e^{-\alpha r\sin\theta}$. Donc, lorsque $\alpha < 0$ on a $-\alpha r\sin\theta \leq 0$ et $|e^{i\theta z}| \leq 1$ si $\theta \in [\pi, 2\pi]$ et il faut donc choisir le demi-cercle situé dans le **demi-plan inférieur** pour avoir $\lim\limits_{r\to\infty} \int_{C_r} f(z)r^{i\alpha z}\,dz = 0$.

Résultat : pour calculer des intégrales généralisées du type $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx$ avec $\alpha < 0$ on applique la même méthode en considérant les singularités z_k de f situés dans le **demi-plan inférieur** (c-à-d telles que $\text{Im}\, z_k < 0$). ⚠️ Attention : l'orientation positive de la courbe $\gamma_r = L_r \cup C_r$ qui donne l'intégral $\int_{+\infty}^{-\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx$.

Application du théorème des résidus aux transformées de Fourier

(Rappel - Analyse III) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty$. La transformée de Fourier de f est la fonction $\mathfrak{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\, dx$.

(Rappel - Analyse IV) Le théorème des résidus permet de calculer les intégrales généralisées de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\, dx$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et f définie par $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ avec p et q deux fonctions polynomiales telles $q(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\text{degré}(q) - \text{degré}(p) \geq 2$.

En posant $g(z) = f(z)e^{i\alpha z}$ où $z \in \mathbb{C}$ on a que :

1. Pour $\alpha \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Rés}_{z_k}(g)$, où z_k pour $k = 1,2,\ldots,m$ sont les pôles de $f(z)$ tels que $\text{Im } z_k > 0$
2. Pour $\alpha < 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\, dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Rés}_{z_k}(g)$, où $z_k = 1,2,\ldots,m$ sont les pôles de $f(z)$ tels que $\text{Im } z_k < 0$

La méthode des résidus peut s'appliquer pour calculer la transformée de Fourier $\mathfrak{F}(f)(\alpha)$ de fonctions f du type quotient de deux polynômes (fonctions rationnelles) vérifiant les conditions demandées.
⚠️ Pour les calculs, il faut être attentif au signe négatif de l'exponentielle $e^{-i\alpha x}$ de la définition de $\mathfrak{F}(f)$.

Méthodes et formules pour calculer $\mathfrak{F}(f)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction rationnelle définie par $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ telle que $q(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\text{degré}(q) - \text{degré}(p) \geq 2$. Alors, en appliquant la méthode des résidus on a :

1. Si $\alpha \leq 0$,
   $\mathfrak{F}(f)(\alpha) \equiv \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\, dx = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\beta x}\, dx = \sqrt{2\pi} i \sum_{k=1}^{m} \text{Rés}_{z_k}(g)$, où $\beta = -\alpha$, $g(z) = f(z)e^{i\beta z} = f(z)e^{-i\alpha z}$ et z_k pour $k = 1,2,\ldots,m$ sont les pôles de $f(z)$ tels que $\text{Im } z_k > 0$.
2. Si $\alpha > 0$,
   $\mathfrak{F}(f)(\alpha) \equiv \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\, dx = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\beta x}\, dx = -\sqrt{2\pi} i \sum_{k=1}^{m} \text{Rés}_{z_k}(g)$, où $\beta = -\alpha$, $g(z) = f(z)e^{i\beta z} = f(z)e^{-i\alpha z}$ et z_k pour $k = 1,2,\ldots,m$ sont les pôles de $f(z)$ tels que $\text{Im } z_k < 0$.

Remarque : la méthode et les formules s'appliquent aussi pour des fonctions rationnelles $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ avec des polynômes p et q ayant des coefficients complexes.

Méthodes et formules pour calculer $\mathfrak{F}^{-1}(h)$

On peut aussi utiliser la méthode des résidus pour calculer la transformée de Fourier inverse d'une fonction rationnelle $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $h(t) = \dfrac{p(t)}{q(t)}$ où $q(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\text{degré}(q) - \text{degré}(p) \geq 2.$

(Rappel - Analyse III) On a $\mathfrak{F}^{-1}(h)(x) \equiv \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{ixt}\, dt.$

En prenant $g(z) = h(z)e^{ixz}$ où $z \in \mathbb{C}$ et si z_k pour $k = 1,2,\ldots,n$ sont les pôles de $h(z)$ alors on a :

1. Pour $x \geq 0$, $\mathfrak{F}^{-1}(h)(x) = \sqrt{2\pi}i \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \text{Rés}_{z_k}(g)$ où les z_k pour $k = 1,2,\ldots,m$ sont tels que $\text{Im } z_k > 0$
2. Pour $x < 0$, $\mathfrak{F}^{-1}(h)(x) = -\sqrt{2\pi}i \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \text{Rés}_{z_k}(g)$ où les z_k pour $k = 1,2,\ldots,m$ sont tels que $\text{Im } z_k < 0$

En particulier, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, alors la formule d'inverse donne :
$f(x) = \mathfrak{F}^{-1}\left(\mathfrak{F}(f)\right)(x) \equiv \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}(f)(\alpha)e^{ix\alpha}\, d\alpha.$

Résultat : si $\mathfrak{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction rationnelle, alors on peut obtenir $f(x)$ avec les formules de calcul de $\mathfrak{F}^{-1}(h)$ données par la méthode des résidus : on identifie la variable t à α et $h(t)$ à $\mathfrak{F}(f)(\alpha)$, on pose $g(z) = \mathfrak{F}(f)(z) = e^{ixz}$ et on considère les singularités z_k de $\mathfrak{F}(f)(z)$.

Application du théorème des résidus aux transformées de Laplace

(Rappel - Analyse III) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux étendue à $\mathbb{R}$ en posant $f(t) = 0$ pour $t < 0$ et soit $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-\gamma_0 t}\, dt < \infty$.

La transformée de Laplace de f est la fonction $\mathfrak{L}(f) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $\mathfrak{L}(f)(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}\, dt$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}\, z \geq \gamma_0$. La valeur de γ_0 s'appelle l'abscisse de convergence de f. On écrit aussi F pour désigner $\mathfrak{L}(f)$.

(Rappel - Analyse III) Formule d'inversion : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue étendue à $\mathbb{R}$ en posant $f(t) = 0$ pour tout $t < 0$ et soit γ_0 l'abscisse de convergence de f. Si la transformée de Laplace $F = \mathfrak{L}(f)$ de f est telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\gamma + is)|\, ds < \infty$ pour un certain $\gamma > \gamma_0$, alors on a la formule d'inversion : $\mathfrak{L}^{-1}(f)(t) \equiv \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(\gamma + is)e^{(\gamma+is)t}\, ds = f(t)$ pour tout $t \geq 0$, où $\mathfrak{L}^{-1}$ est la transformée de Laplace inverse et l'intégrale de la définition est indépendante de γ.

Méthodes pour calculer $\mathfrak{L}^{-1}(F)$:

1. **Trouver** $\mathfrak{L}^{-1}(F)$ en décomposant l'expression de $F(z)$ en éléments simples et en utilisant les formulaires (tables) donnant des transformées de Laplace connues.
2. **Calculer** $\mathfrak{L}^{-1}(F)$ en utilisant le théorème des résidus et en appliquant l'analyse complexe à la définition donnée par la formule d'inversion.

On peut utiliser la méthode des résidus pour calculer $\mathfrak{L}^{-1}(F)(t)$ pour des fonctions $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, telles que $|F(z)| \leq \dfrac{M}{|z|^k}$ pour $|z|$ assez grand, où $M > 0$ est une constante réelle et $k > 0$. Pour $t \geq 0$ on a la formule $\mathfrak{L}^{-1}(F)(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Rés}_{z_j}(h)$, où h est la fonction définie par $h(z) = F(z)e^{zt}$ et z_j pour $j = 1,2\ldots,n$ sont les singularités de h.

5. Applications conformes

On voudrait définir des fonctions (applications ou transformations) qui préservent les angles de triangles infinitésimaux et les angles entre les courbes qui se croisent en un point.
Une transformation (ou une application) qui préserve localement les angles, en grandeur et en orientation est dite **conforme**.

Soit $\Omega \in \mathbb{C}$ un ensemble ouvert, soit une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et
$f(\Omega) = \{w \in \mathbb{C} : w = f(z) \forall z \in \Omega\}$ l'image de Ω par f. On dit que f est une **application conforme de Ω sur $f(\Omega)$** si :

A. f est holomorphe dans Ω
B. f est bijective de Ω sur $f(\Omega)$
C. $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$

$f(\Gamma)$ désigne l'image d'une courbe Γ par f.

Transformations de Moebius

Une transformation de Moebius est une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $w = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $c \in C^*$ si $d = 0$ et $d \in C^*$ si $c = 0$.

Exemples particuliers :

1. Pour $a \neq 0$, $b = c = 0$ et $d = 1$, donc $f(z) = az$, et en écrivant $a = |a|e^{i\alpha}$ et $z = |z|e^{i\theta}$ on a $f(z) = |a||z|e^{i(\theta+\alpha)}$, la transformations fait une **homothétie** (dilatation si $|a| > 1$, contraction si $|a| < 1$) et une **rotation**.
2. Pour $a = 1$, $c = 0$ et $d = 1$, donc $f(z) = z + b$, la transformation fait une **translation**.
3. Pour $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ et $d = 0$, donc $f(z) = \dfrac{1}{z}$, et en écrivant $z = |z|e^{i\theta}$ on a $f(z) = \dfrac{1}{|z|}e^{-i\theta}$, la transformation fait une **inversion**.

Résultats :

1. Si $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$ alors la transformation de Moebius définie par $w = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ est une application conforme de $\Omega = \mathbb{C} \backslash \left\{ \dfrac{-d}{c} \right\}$ sur $f(\Omega) = \mathbb{C} \backslash \left\{ \dfrac{a}{c} \right\}$. Remarques :
    1. Si $c = 0$ et $ad \neq 0$, alors $f(z) = \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d}$ et f est conforme de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.
    2. Si $ad - bc = 0$, alors $f'(z) = 0$ pour tout $z \in \Omega$, f est constante dans Ω et donc f n'est pas conforme
    3. On a que f^{-1} est aussi une transformation de Moebius conforme de $f(\Omega) = \mathbb{C} \backslash \left\{ \dfrac{a}{c} \right\}$ sur $\Omega = \mathbb{C} \backslash \left\{ \dfrac{-d}{c} \right\}$ définie par $w \mapsto z = f^{-1}(w) = \dfrac{-dw+b}{cw-a}$

2. Une transformation de Moebius donnée par $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ avec $ad - bc \neq 0$ s'écrit toujours comme une composition d'homothéties, de rotations, et translations et d'inversions.
3. Toute transformation de Moebius f définie par $z \mapsto w = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ avec $ad - bc \neq 0$ transforme des cercles et des droites du plan de la variable z en des cercles et des droites du plan de la variable w. Remarque : dans la formulation de ce résultat, il est intuitivement sous-entendu que le point $z = -\dfrac{d}{c}$ est envoyé par f vers des « points à l'infini » du plan de la variable w et que le point $w = \dfrac{a}{cx}$ est l'image de « points à l'infini » du plan de la variable z.
4. Si f est une transformation de Moebius définie par $z \mapsto w = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ avec $ad - bc \neq 0$ et si $w_j = f(z_j)$ pour $j = 1,2,3$ avec $z_j \neq z_k$ lorsque $j \neq k$, alors pour tout $z \neq z_3$ on a : $\dfrac{z - z_1}{z - z_3}\dfrac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \dfrac{f(z) - w_1}{f(z) - w_3}\dfrac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}$

Théorème de caractérisation : étant donné trois points distincts z_1, z_2, z_3 du plan de la variable z et trois points distincts w_1, w_2, w_3 du plan de la variable w, alors il existe une unique transformation de Moebius f définie par $z \mapsto w = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ avec $ad - bc \neq 0$ telle que $w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2), w_3 = f(z_3)$.

6. Équation de Laplace

Équation de Laplace dans un disque

On considère $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$ un disque de rayon $R > 0$ centré à l'origine. Le problème est de trouver une solution $u(x, y)$ de l'équation de Laplace $(\Delta u)(x, y) = 0$ pour $(x, y) \in \Omega$ avec la condition au bord $u(x, y) = \varphi(x, y)$ pour $(x, y) \in \partial\Omega$ donnée par une fonction $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x, y)$. On suppose que $\varphi \in C^1(\partial\Omega)$.

Rappel : Δ est l'opérateur différentiel Laplacien, avec $(\Delta u)(x, y) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)$

Méthode de résolution :

1. On utilise les coordonnées polaires $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ avec $r \in]0,R]$ et $\theta \in [0,2\pi]$. En écrivant $u(r\cos\theta, r\sin\theta) = v(r, \theta)$, $\varphi(R\cos\theta, R\sin\theta) = \psi(\theta)$ et en exprimant le laplacien Δ en coordonnées polaires le problème revient à trouver une solution $v(r, \theta)$ de $\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, \theta) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r, \theta) = 0$ pour $r \in]0,R[$ et $\theta \in]0,2\pi[$ avec la condition au bord $v(R, \theta) = \psi(\theta)$ pour $\theta \in]0,2\pi[$ et les conditions de périodicité $v(r,0) = v(r,2\pi)$ et $\dfrac{\partial v}{\partial \theta}(r, \theta) = \dfrac{\partial v}{\partial \theta}(r,2\pi)$ pour $r \in]0,R[$.
2. On ignore la condition au bord et on procède par la méthode de séparation de variables. C'est à dire on cherche des solutions de :
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r, \theta) = 0 & r \in]0,R[, \theta \in]0,2\pi[\\ v(r,0) = v(r,2\pi) & r \in]0,R[\\ \frac{\partial v}{\partial \theta}(r,0) = \frac{\partial v}{\partial \theta}(r,2\pi) & r \in]0,R[\end{cases}$$

En écrivant $v(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ sous forme « séparée » (produit d'une fonction f dépend seulement de r et d'une fonction g qui dépend seulement de θ). On a $\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, \theta) = f''(r)g(\theta)$, $\dfrac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) = f'(r)g(\theta)$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r, \theta) = f(r)g''(\theta)$ et obtient $f''(r)g(\theta) + \dfrac{1}{r}f'(r)g(\theta) + \dfrac{1}{r^2}f(r)g''(\theta) = 0 \iff \dfrac{r^2f''(r) + rf'(r)}{f(r)} = -\dfrac{g''(\theta)}{g(\theta)}$, donc les variables sont séparées. L'égalité doit être vérifiée pour **tout** $r \in]0,R[$ et **tout** $\theta \in]0,2\pi[$, donc il faut que chaque membre soit égal à une même constante $\lambda \in \mathbb{R}$. On obtient $\dfrac{r^2f''(r) + rf'(r)}{f(r)} = \lambda$ et $-\dfrac{g''(\theta)}{g(\theta)} = \lambda$.

Les conditions de périodicité deviennent $g(0) = g(2\pi)$ et $g'(0) = g'(2\pi)$ et la 2e étape revient à résoudre les problèmes suivants :

1. $\begin{cases} g''(\theta) + \lambda g(\theta) = 0,\ \theta \in]0,2\pi[\\ g(0) = g(2\pi) \text{ et } g'(0) = g'(2\pi) \end{cases}$
2. $r^2f''(r) + f'(r) - \lambda f(r) = 0$ pour $r \in]0,R[$

- L'équation (1) est un problème de Sturm-Liouville avec des conditions périodiques. Il y a des solutions non triviales seulement lorsque $\lambda = n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$ et elles sont données par $g_n(\theta) = \alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)$, où α_n et β_n sont des constantes arbitraires.
- L'équation (2) devient $r^2 f''(r) + rf'(r) - n^2 f(r) = 0$ Et les solutions sont données par $f_n(r) = \begin{cases} \gamma_n r^n + \delta_n r^{-n} & n \neq 0 \\ \gamma_0 + \delta_0 \ln r & n = 0 \end{cases}$, où γ_n et δ_n pour $n \in \mathbb{N}$ sont des constantes arbitraires.

  Conclusion: pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction $v_n(r, \theta) = f_n(r) g_n(\theta) = \begin{cases} (\gamma_n r^n + \delta_n r^{-n})[\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta) & n \neq 0 \\ \alpha_0(\gamma_0 + \delta_0 \ln r & n = 0 \end{cases}$ est solution de l'équation de Laplace en ignorant la condition initiale sur $\partial\Omega$ du disque. Puisque on cherche une solution définie dans le disque Ω centré à l'origine, alors les solutions avec r^{-n} et $\ln r$ qui divergent lorsque r tend vers 0 sont exclues et on en déduit que $\delta_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, la solution générale de la deuxième étape est (combinaison linaire avec des coefficients $c_n \in \mathbb{R}$ et limite lorsque n tend vers $+\infty$) :
$v(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n v_n(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right] r^n$, où $A_0 = 2c_0\alpha_0\gamma_0$, $A_n = c_n\gamma_n\alpha_n$ et $B_n = c_n\gamma_n\beta_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ sont des constantes arbitraires

3. On impose la condition au bord du disque : pour tout $\theta \in]0{,}2\pi[$ on doit avoir $v(R, \theta) = \psi(\theta) \implies \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right] R^n = \psi(\theta) \implies A_n R^n$ et $B_n R^n$ **sont** les coefficients de Fourier de la fonction ψ de période $T = 2\pi$. Donc on obtient $A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \cos(n\theta)\, d\theta$ et $B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \sin(n\theta)\, d\theta$, où $\psi(\theta) = \varphi(r \cos\theta, r \sin\theta)$ est déterminée par la condition au bord $\varphi(x, y)$ exprimée en coordonnées polaires

4. On trouve la solution $u(x, y)$ cherchée exprimée en coordonnées cartésiennes en utilisant $u(r \cos\theta, r \sin\theta) = v(r, \theta)$.

Équation de Laplace dans un rectangle

Le problème consiste à trouver une solution $u(x, y)$ de l'équation de Laplace $(\Delta u)(x, y) = 0$ pour $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0,L[,\ y \in]0,M[\}$ où $L, M \in \mathbb{R}_+^*$ sont des constantes, avec les conditions aux bords :

- $u(0,y) = u(L, y) = 0$ pour tout $y \in]0,M[$
- $u(x,0) = f(x)$ et $u(x, M) = g(x)$ pour tout $x \in]0,L[$

Avec un raisonnement analogue à celui fait pour l'équation de Laplace dans un disque mais en coordonnées cartésiennes on obtient que la solution est

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{L}y\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \text{ où}$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx \text{ et}$$

$$B_n = \frac{2}{L\sinh\left(\frac{n\pi}{L}M\right)}\int_0^L \left[g(x) - \cosh\left(\frac{n\pi}{L}M\right)f(x)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx$$